



УЧЕТ БЕССЕЛЕВЫХ МОД ПРИ ОПИСАНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

П.Б.Руткевич, П.П.Руткевич

Институт космических исследований
РАН, Москва
email: peter@d902.iki.rssi.ru



Содержание

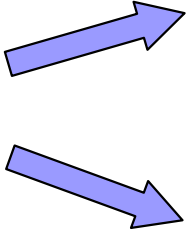
- Постановка задачи;
- Система линейных уравнений гидродинамики;
- Дисперсионное соотношение;
- Численное решение;
- Нелинейные расчёты;
- Заключение.

Введение

- Обычное выражение для неустойчивости:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a f \qquad f(t) = f_0 \exp(at)$$

- Уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 f$$

$$f(t) = f_{01} \exp(at) + f_{02} \exp(-at)$$
$$f(t) = f_1 \cos(at) + f_2 \sin(at)$$

Уравнение третьего порядка

$$\begin{cases} y_1'(t) = a y_2(t) \\ y_2'(t) = b y_3(t) \\ y_3'(t) = c y_1(t), \end{cases}$$

$$y'''(t) - abc y(t) = 0$$

$$y_{1,2,3}(t) = y_0 e^{\sqrt[3]{abc} t}$$

Обычно уравнение третьего порядка описывается уравнением:

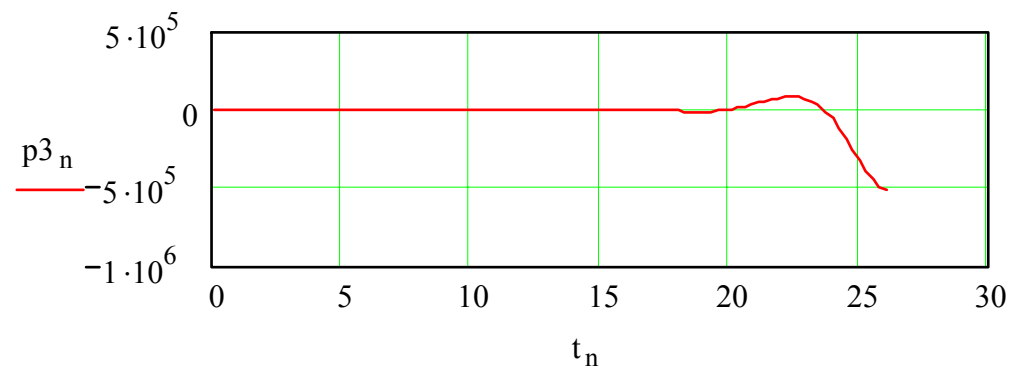
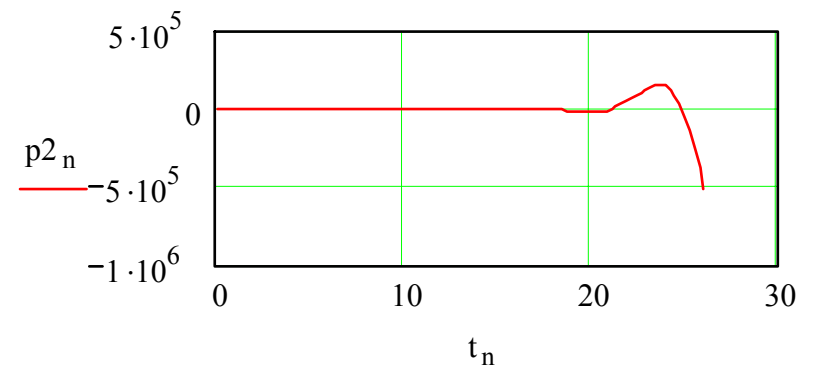
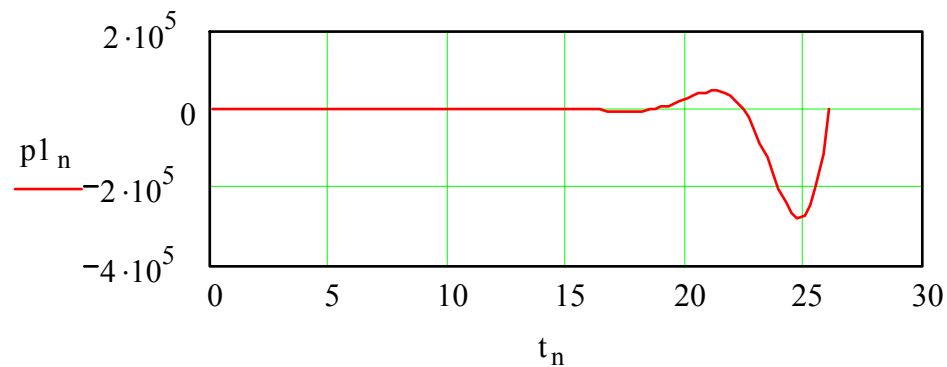
$$y_1(t) = y_{01} \exp\left(-\sqrt[3]{|abc|} \cdot t\right)$$

$$y'''(t) + |abc| y(t) = 0$$

$$y_2(t) = y_{02} \exp\left(\sqrt[3]{|abc|} \frac{1}{2} \cdot t\right) \exp\left(i \sqrt[3]{|abc|} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)$$

$$y_3(t) = y_{03} \exp\left(\sqrt[3]{|abc|} \frac{1}{2} \cdot t\right) \exp\left(-i \sqrt[3]{|abc|} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)$$

Численное решение уравнения третьего порядка





Основные характеристики неустойчивости

- Требуется по крайней мере уравнение третьего порядка,
- Всегда имеется колебательная составляющая.

Система линейных гидродинамических уравнений

- Уравнения Навье - Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nabla P_1}{\rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \rho_1 \vec{e}_z + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0,$$

- Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0,$$

- Уравнение баланса энтропии:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma \rho_0 v_z = \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 - c^2 \chi \Delta \rho_1 \quad .$$

Уравнения в терминах потенциалов скорости

■ Для скорости: $\vec{v} = \nabla \cdot \Phi + \nabla \times \vec{e} \psi + \nabla \times (\nabla \times \vec{e} \varphi)$

■ Уравнения Навье - Стокса:

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta \Phi + \frac{\Delta P_1}{\rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{g \rho_1}{\rho_0} \right] + 2\Omega \Delta_{\perp} \psi = 0$$

$$\frac{\partial \Delta_{\perp} \psi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta_{\perp} \psi - 2\Omega \Delta_{\perp} \Phi - 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta \Delta_{\perp} \varphi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta \Delta_{\perp} \varphi + \frac{g}{c^2} \frac{\Delta_{\perp} P_1}{\rho_0} - \frac{g}{\rho_0} \Delta_{\perp} \rho_1 + 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

■ Уравнение непрерывности: $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \Delta \Phi - \rho_0 \frac{g}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho_0 \frac{g}{c^2} \Delta_{\perp} \varphi = 0$

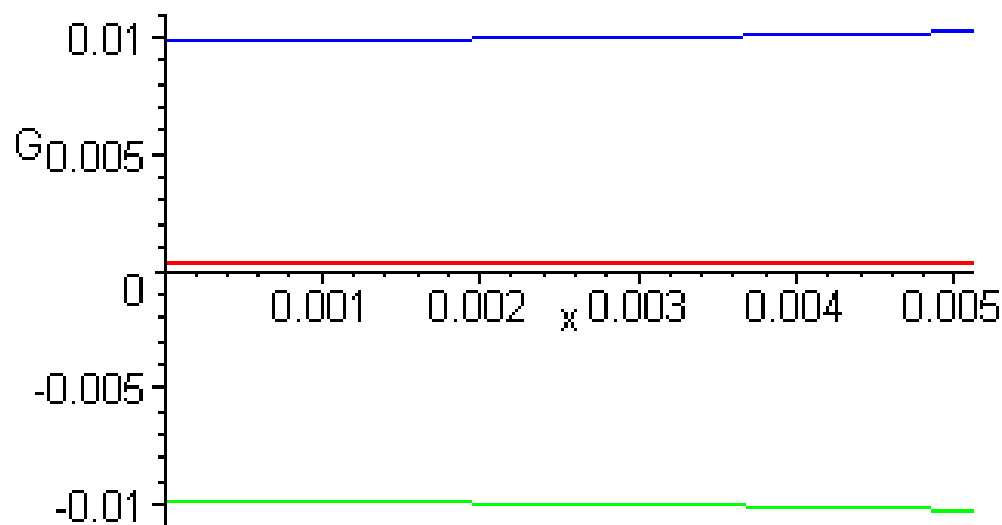
■ Баланс энтропии:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Delta_{\perp} \varphi \right) - \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 + \chi c^2 \Delta \rho_1 = 0$$

Дисперсионное соотношение

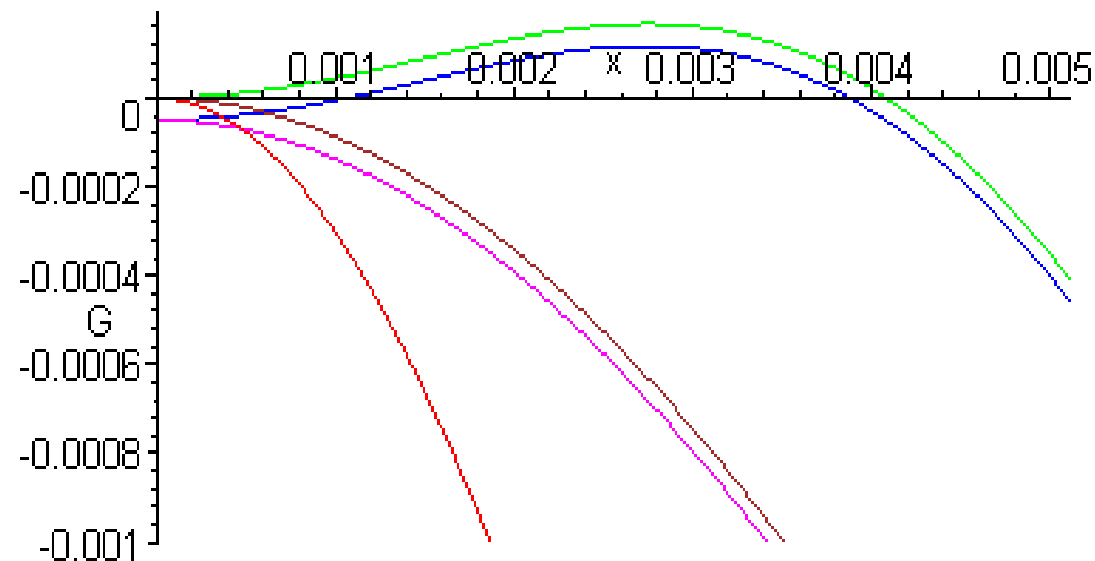
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \equiv x \right)$$

$$f_5(k)x^5 + f_4(k)x^4 + f_3(k)x^3 + f_2(k)x^2 + f_1(k)x + f_0(k) = 0$$



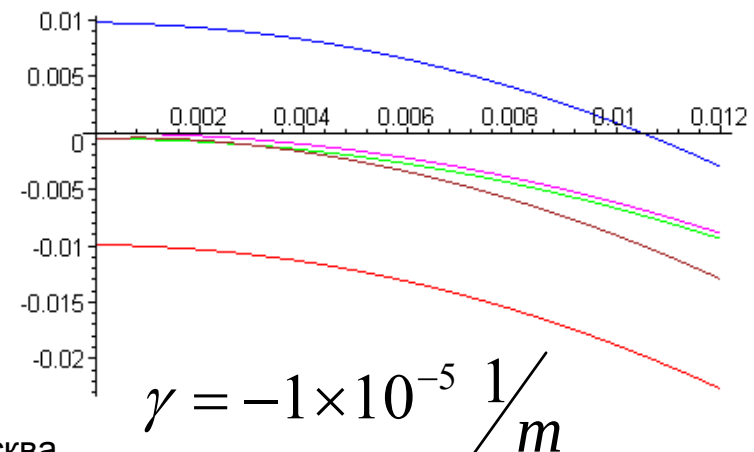
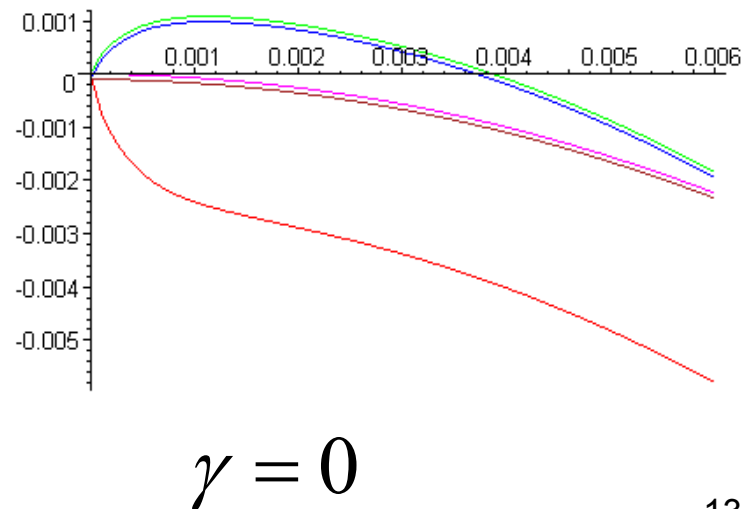
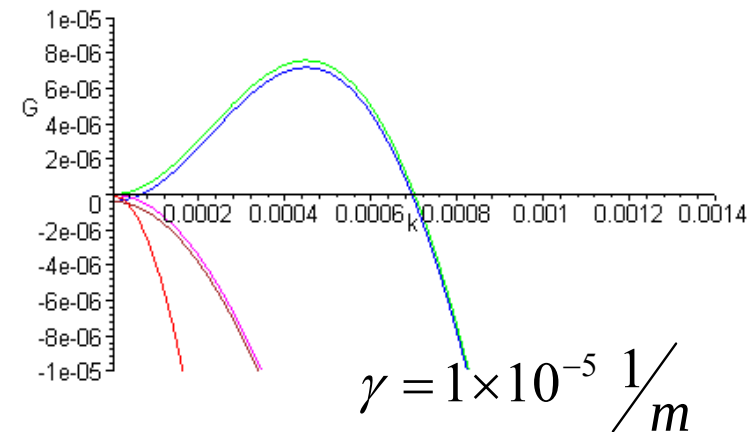
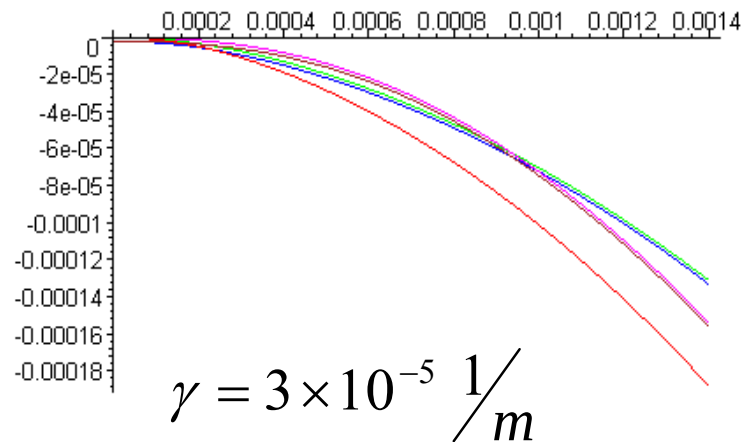
■ Мнимая часть

(звуковые корни не показаны)

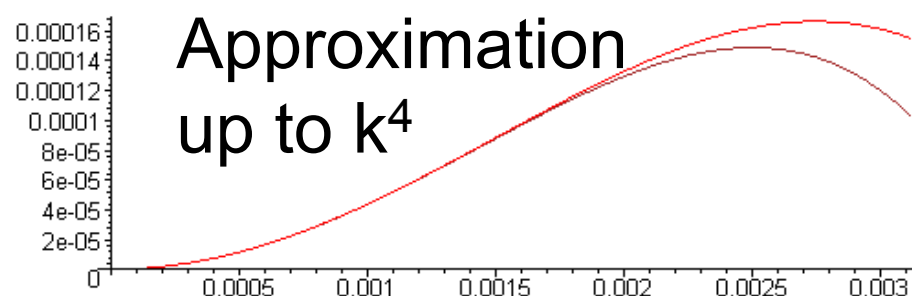
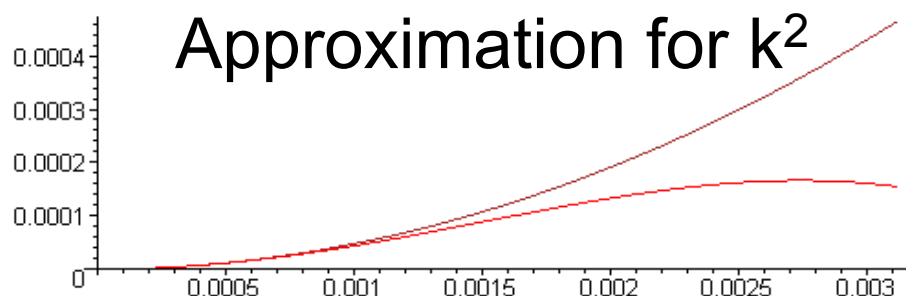


Реальная часть

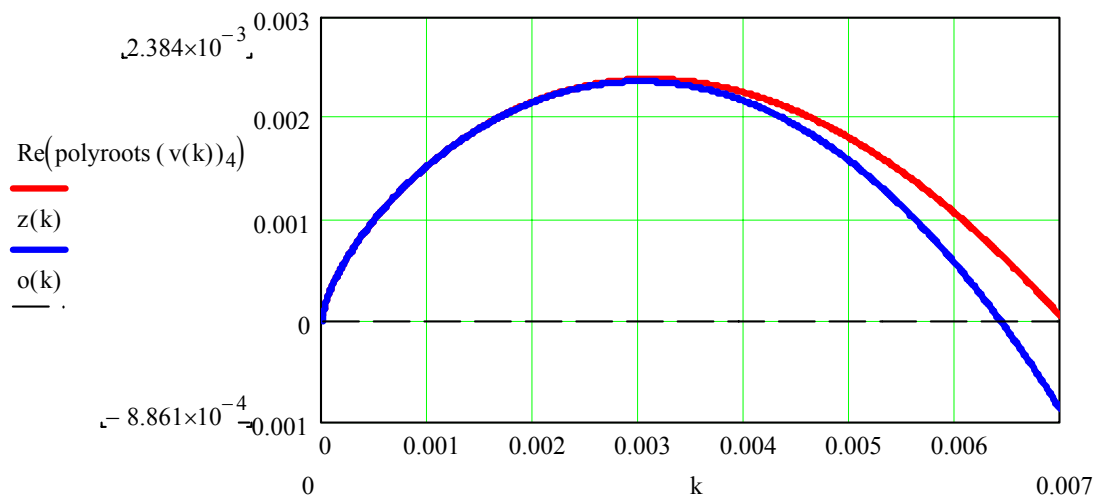
Дисперсионное уравнение: эффект градиента температуры



Аппроксимация дисперсионного соотношения (разложение в ряд Тэйлора)



- Для $\gamma = 0$
- Нужно
- использовать
- разложение по: $k^{2/3}$



Выражение для инкремента неустойчивости при малых волновых числах для нейтральной стратификации

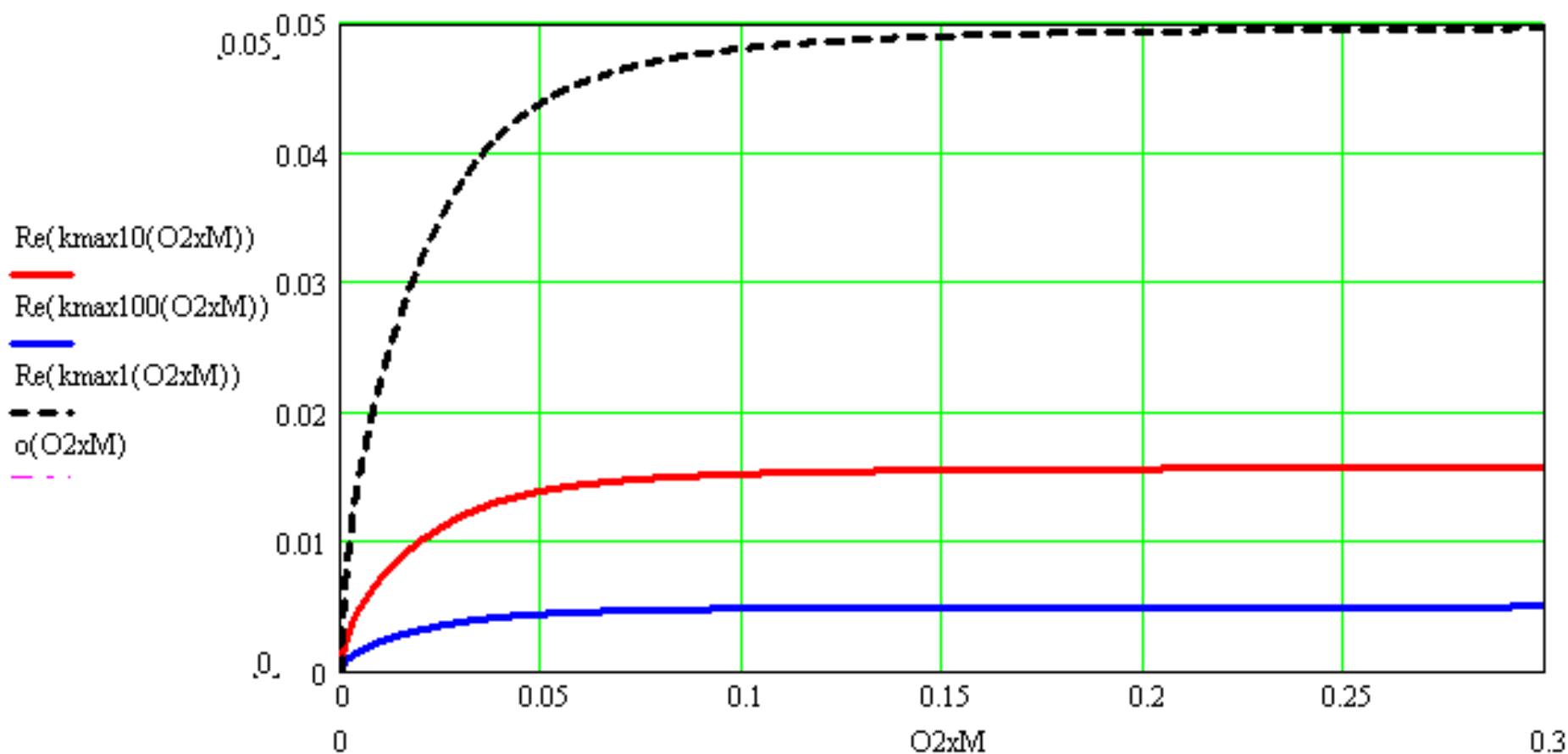
- В знаменателе содержится скорость звука, таким образом, неустойчивость осуществляется только в сжимаемой жидкости :

$$\begin{aligned} x_1 = & \frac{\left((1 - \kappa) g^2 \nu (2\Omega)^2 \right)^{1/3}}{\left(g^2 + c^2 (2\Omega)^2 \right)^{1/3}} k^{2/3} - \\ & - \frac{(2 + \kappa) g^4 \nu + (4 + \kappa) c^2 g^2 \nu (2\Omega)^2 + (1 + \kappa) c^4 \nu (2\Omega)^4}{3 \left(g^2 + c^2 (2\Omega)^2 \right)^2} k^{6/3} + \dots \end{aligned}$$

Выражение для максимального волнового числа при сохранении двух членов разложения

$$k_{\max} = \left[\frac{\left((1-\kappa) g^2 \nu (2\Omega)^2 \right)^{1/3} \left(g^2 + c^2 (2\Omega)^2 \right)^{5/3}}{\left[(2+\kappa) g^4 \nu + (4+\kappa) c^2 g^2 \nu (2\Omega)^2 + (1+\kappa) c^4 \nu (2\Omega)^4 \right]} \right]^{3/4}$$

Зависимость максимального значения волнового числа как функция параметра Кориолиса для различных значений вязкости $V = 1; 10; 100$.



Численные расчёты

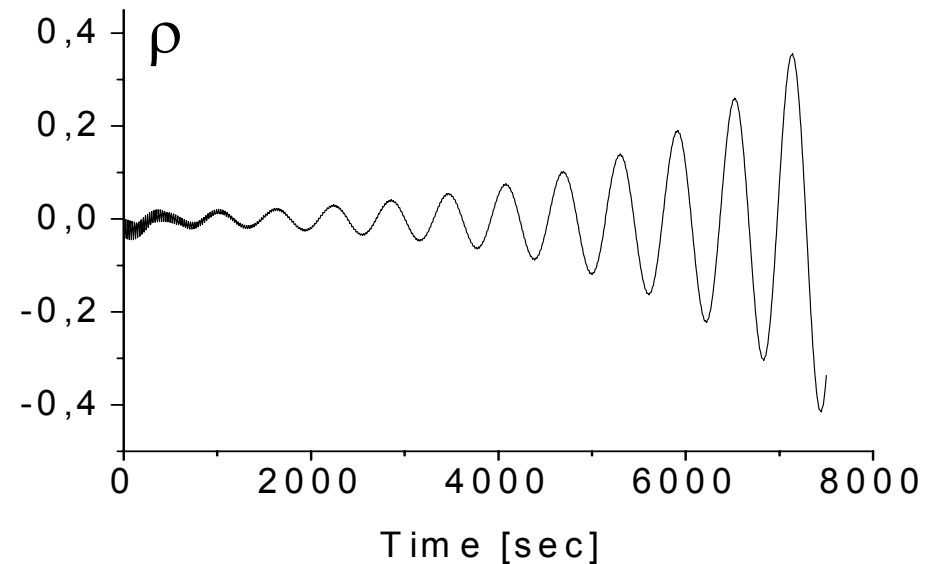
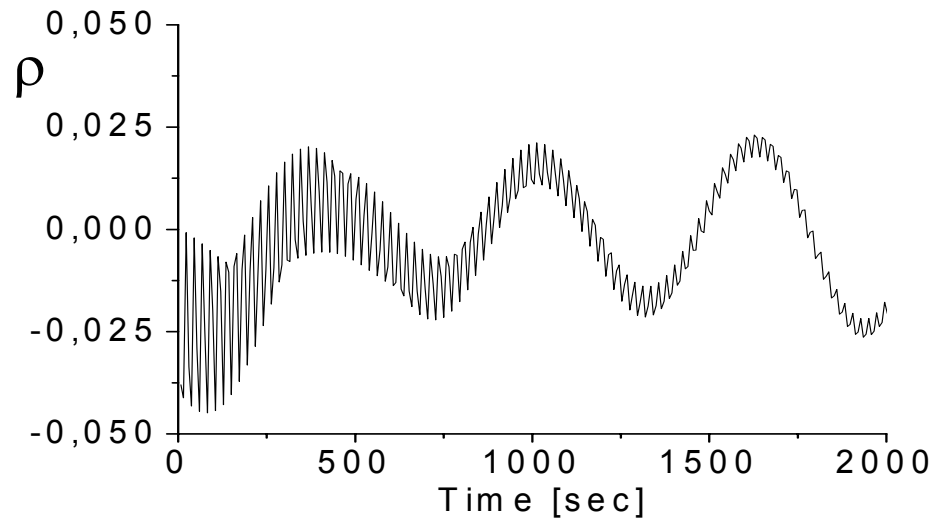
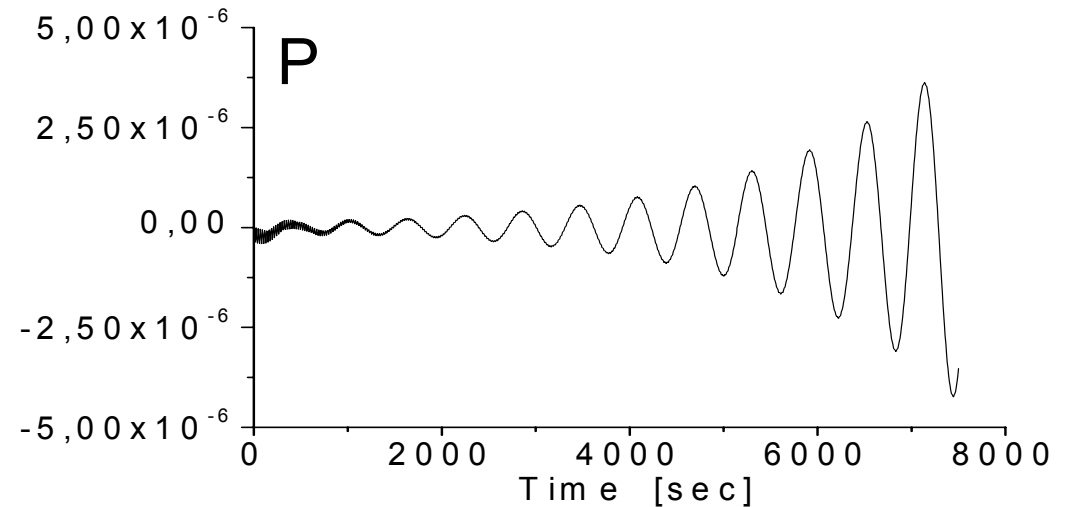
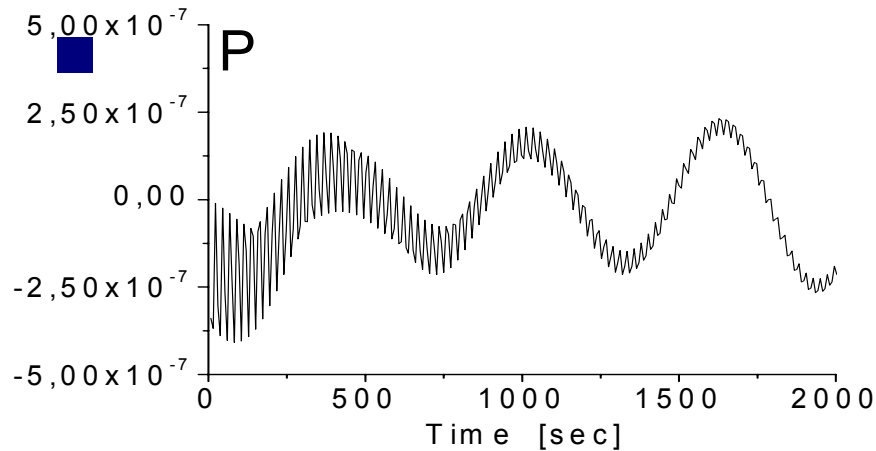
- Цилиндрические координаты, Граничные условия:

- $r=0$: $\left. \frac{dF}{dr} \right|_0 = 0$

- $r=R_{\max}$: $F|_{R_{\max}} = 0$

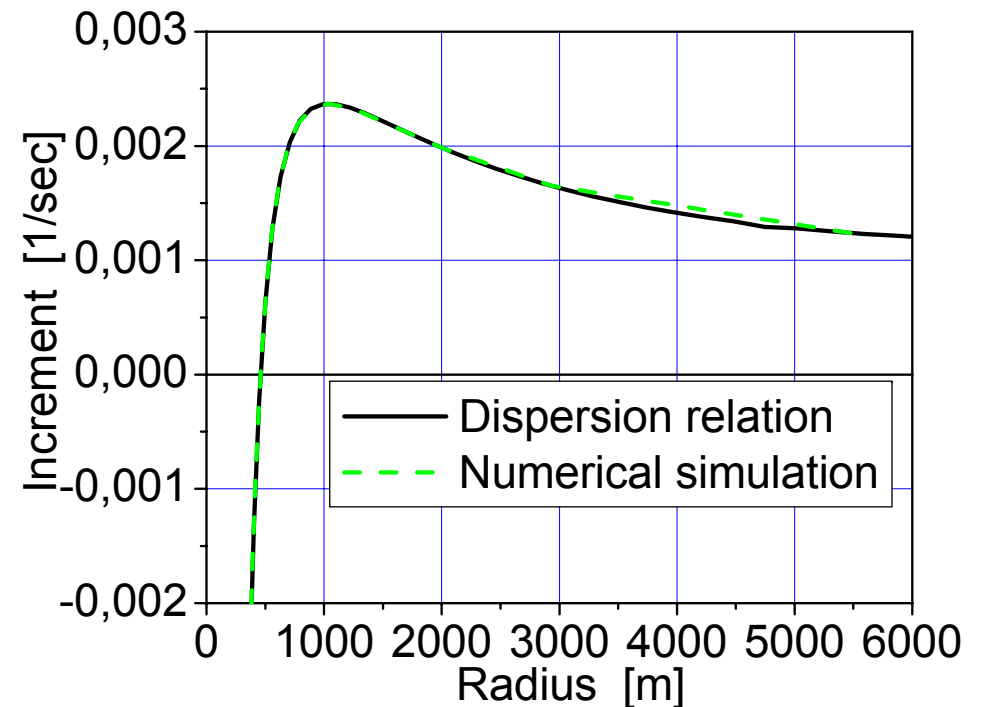
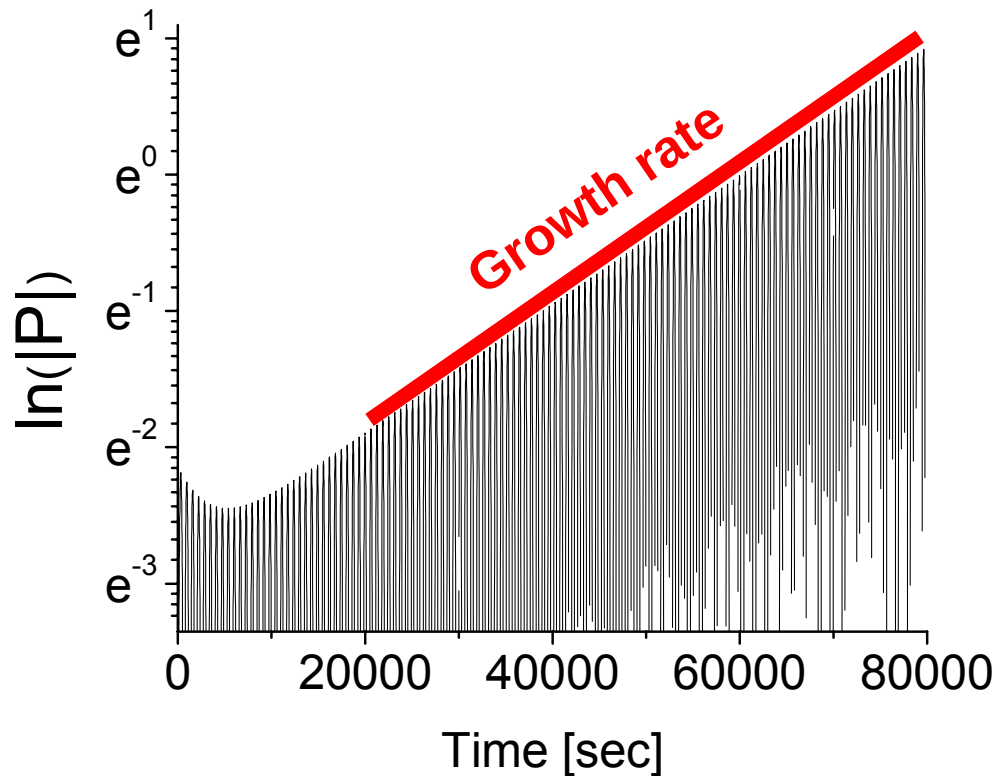
- 80 точек вдоль r направления,
- Шаг по времени: $dt \propto 0.1 \cdot T_{\text{sound}}$
- Начальные условия - 1^{ая} функция Бесселя.

Временная зависимость термодинамических параметров : P , ρ .



(1^{ая} бесселева мода, численный расчёт)

Сравнение решения дисперсионного уравнения и численного решения



Нелинейные уравнения

- Уравнения Навье - Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nabla P_1}{\rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \rho_1 \vec{e}_z + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{f} = 0,$$

- Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

- Баланс энтропии:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma \rho_0 v_z = \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 - c^2 \chi \Delta \rho_1 \quad .$$

Нелинейные слагаемые для потенциалов

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{1}{2} \Delta_{\perp} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2$$

$$\vec{e}_z \operatorname{rot} \vec{f} = -\frac{2}{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right)$$

$$\vec{e}_z \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{f} = \Delta_{\perp} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} (\Delta_{\perp} \varphi) \right)$$

Система нелинейных уравнений в терминах потенциалов

- Для скорости: $\vec{v} = \nabla \cdot \Phi + \nabla \times \vec{e} \psi + \nabla \times (\nabla \times \vec{e} \varphi)$
- Уравнения Навье - Стокса:

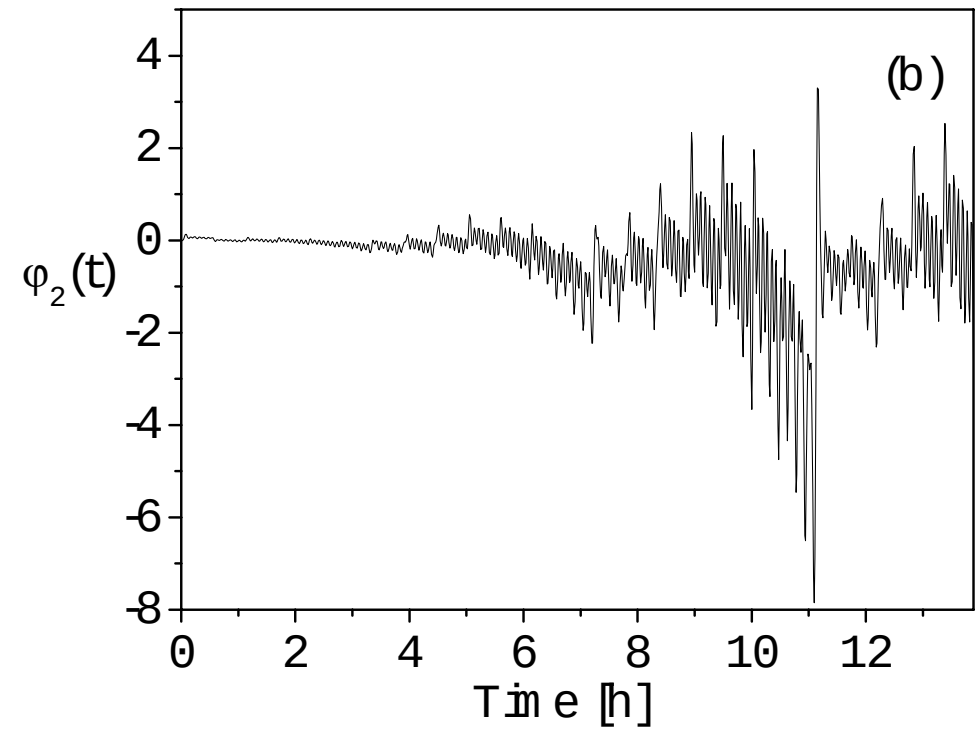
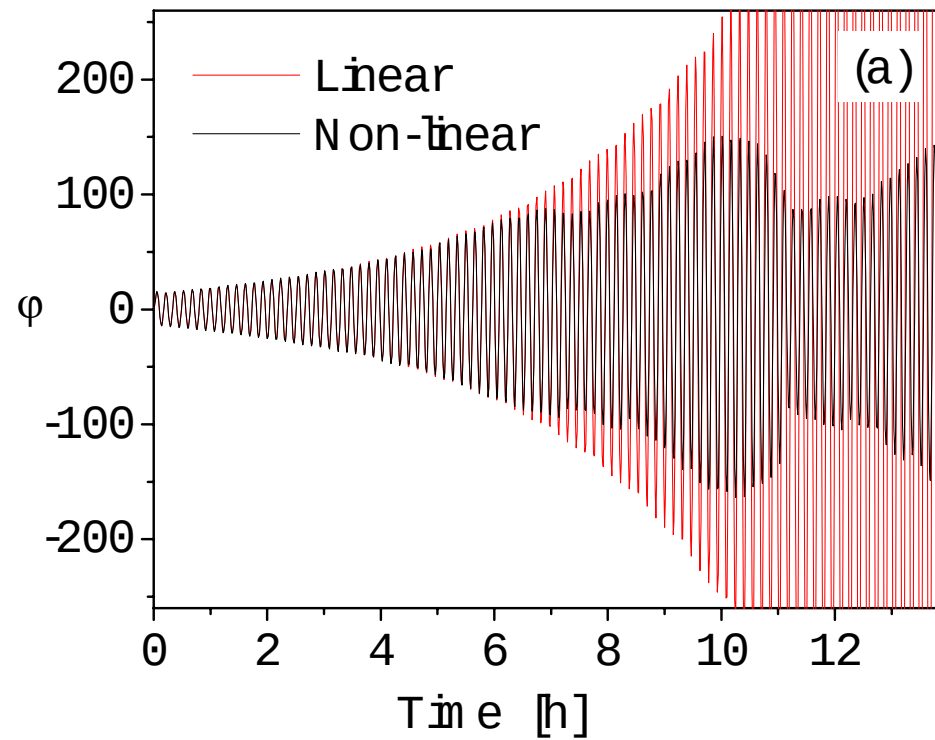
$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta \Phi + \frac{\Delta P_1}{\rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{g \rho_1}{\rho_0} \right] + 2\Omega \Delta_{\perp} \psi + \operatorname{div}(\vec{f}) = 0$$

$$\frac{\partial \Delta_{\perp} \psi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta_{\perp} \psi - 2\Omega \Delta_{\perp} \Phi - 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \vec{e}_z \operatorname{rot}(\vec{f}) = 0,$$

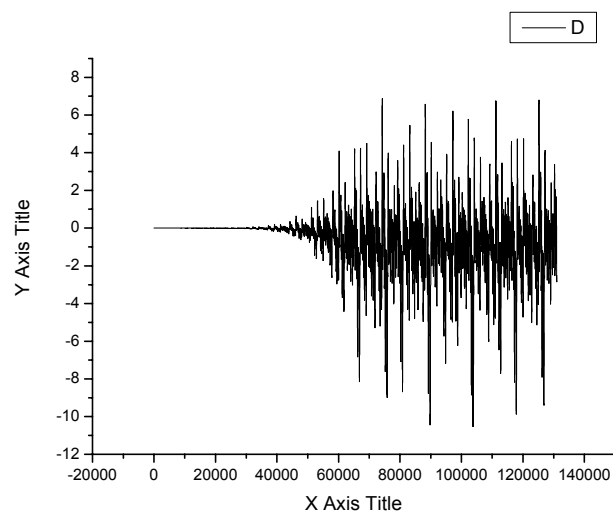
$$\frac{\partial \Delta \Delta_{\perp} \varphi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta \Delta_{\perp} \varphi + \frac{g}{c^2} \frac{\Delta_{\perp} P_1}{\rho_0} - \frac{g}{\rho_0} \Delta_{\perp} \rho_1 + 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \vec{e}_z \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\vec{f}) = 0,$$
- Уравнение непрерывности: $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \Delta \Phi - \rho_0 \frac{g}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho_0 \frac{g}{c^2} \Delta_{\perp} \varphi = 0$
- Баланс энтропии:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Delta_{\perp} \varphi \right) - \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 + \chi c^2 \Delta \rho_1 = 0$$

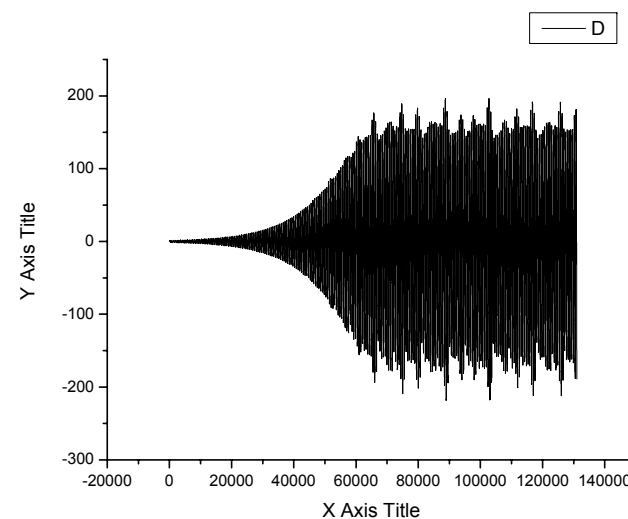
Nonlinear effects



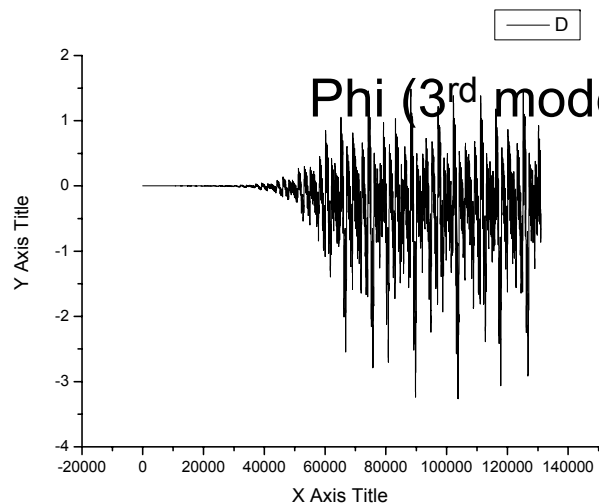
Phi (1st mode)



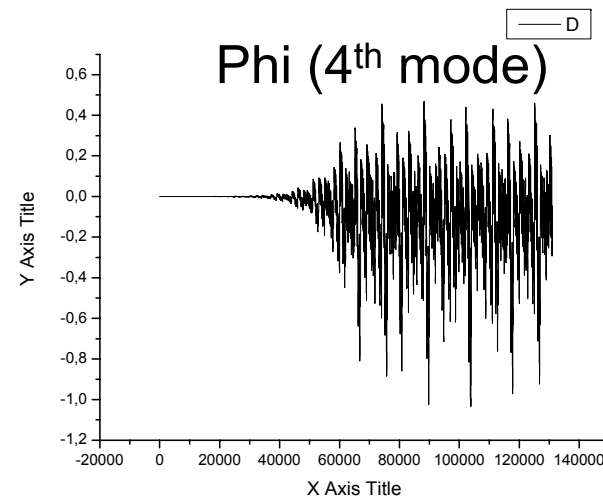
Phi (2nd mode)



Phi (3rd mode)



Phi (4th mode)



Роль нелинейности

- Осцилляции с малыми или большими значениями k распадаются, таким образом, взаимодействие различных мод должно ограничивать рост неустойчивости.
- Были проделаны расчёты для взаимодействия 10 бесселевых мод.
- Результат: осцилляции выходят на стационар, поскольку энергия движения распределяется между другими модами

Заключение

- Обнаружена новая неустойчивость гидродинамических уравнений,
- Неустойчивость имеет колебательный характер,
- Неустойчивость ограничивается нелинейностью.