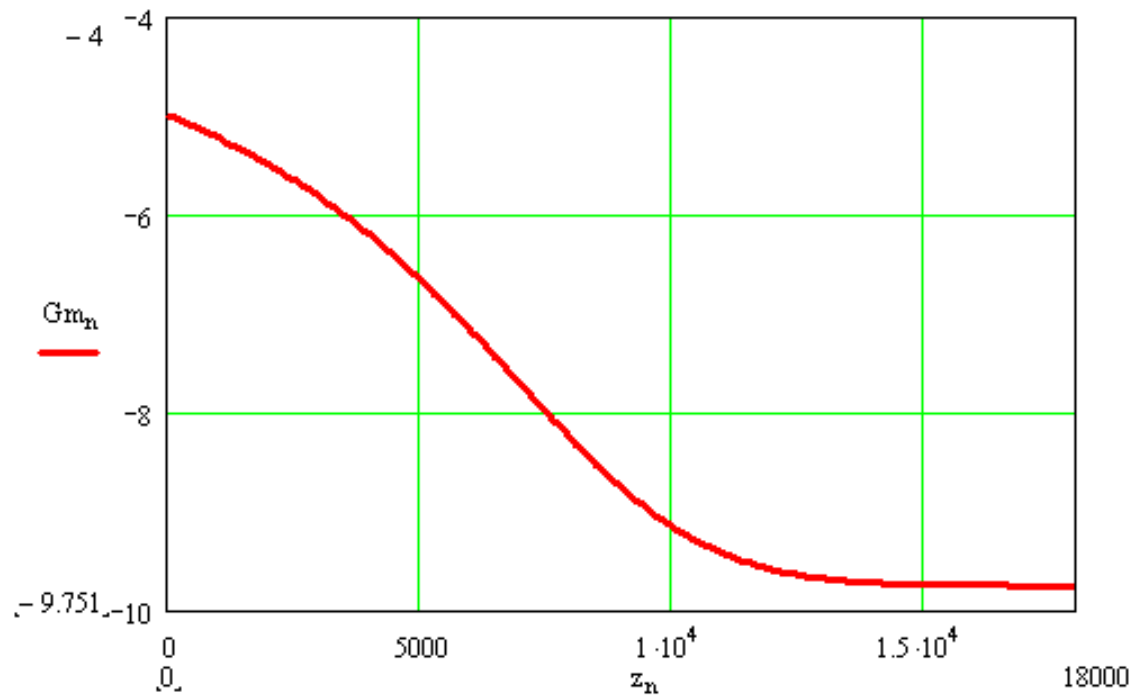


# Нелинейная конвекция в аксиальном вертикальном канале

П.Б.Руткевич, П.П.Руткевич

Институт космических исследований РАН,  
Москва  
email: [peter\\_home@tarusa.ru](mailto:peter_home@tarusa.ru)

Вначале рассмотрим задачу о нелинейной конвекции в аксиально симметричной постановке. Будем считать, что нелинейность связана с условиями подогрева. Хорошо известно, что вертикальные адиабатические градиенты температуры (град/км) в атмосфере для сухого и влажного воздуха отличаются.



Считаем, что вертикальный градиент температуры зависит от скорости вертикального потока воздуха:

$$\gamma(v) = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{v(r)}{v_T},$$

Уравнение конвекции в терминах потенциалов скоростей тогда примет вид:

$$\Delta_{\perp} \Delta_{\perp} \varphi(r) + \frac{g}{\chi v} \left( \gamma_0 \varphi(r) + \gamma_1 \frac{-\varphi(r) \Delta_{\perp} \varphi(r)}{v_T} \right) = 0,$$

$$\Delta_{\perp} \varphi(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \right) \quad \vec{v} = \nabla \cdot \Phi + \nabla \times \vec{e} \psi + \nabla \times (\nabla \times \vec{e} \varphi)$$

В безразмерных переменных:

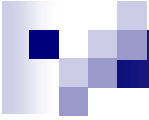
$$r = \lambda \rho, \quad \varphi(r) = Cf(\rho),$$

$$\lambda = \left( \frac{\chi v}{g \gamma_0} \right)^{1/4}, \quad C = \lambda^2 \frac{\gamma_0}{\gamma_1} v_T,$$

$$\Delta_{\perp} f(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right)$$

уравнение принимает вид:

$$\Delta_{\perp} \Delta_{\perp} f(\rho) + f(\rho) - f(\rho) \Delta_{\perp} f(\rho) = 0, \quad (1)$$




Мы ищем решение этого уравнения на полупрямой  
регулярное в нуле и исчезающее на бесконечности

$$f(0) = \text{Const}, \quad f(\infty) = 0.$$

Для нахождения решения используем такой метод:  
регулярное решение в нуле можно представляем в виде  
разложения:

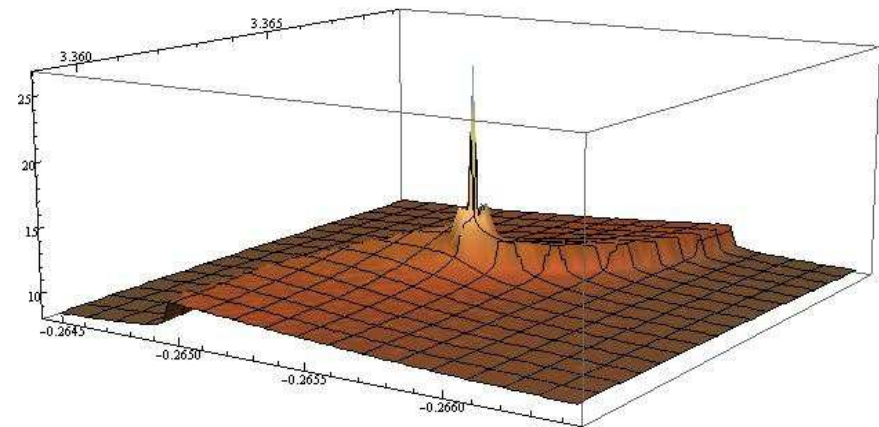
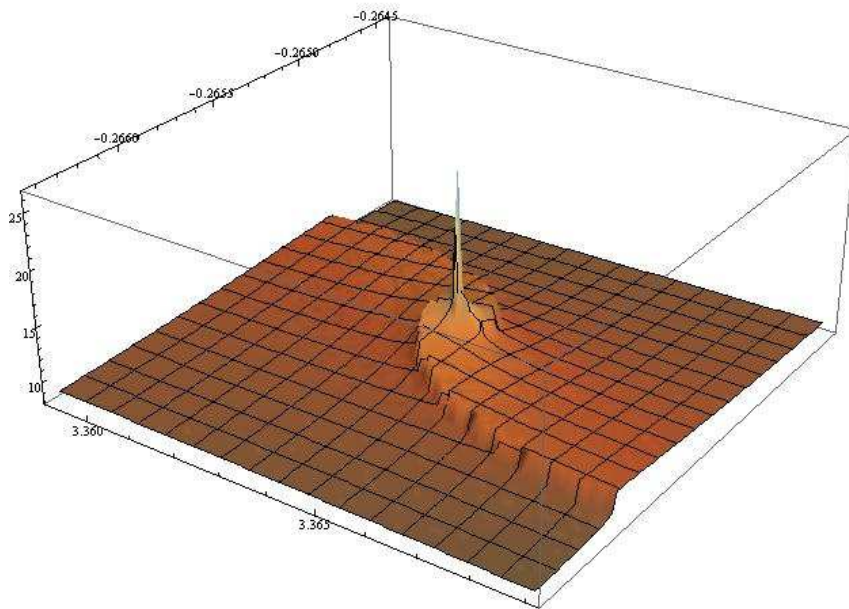
$$f(\rho, A, a_2) = A \left[ 1 + a_2 \rho^2 + \sum_{j=2}^{\infty} a_{2j} \rho^{2j} \right],$$

где коэффициенты  $a_4, a_6, \dots$  определяются рекурсивно  
через параметры  $A, a_2$ .



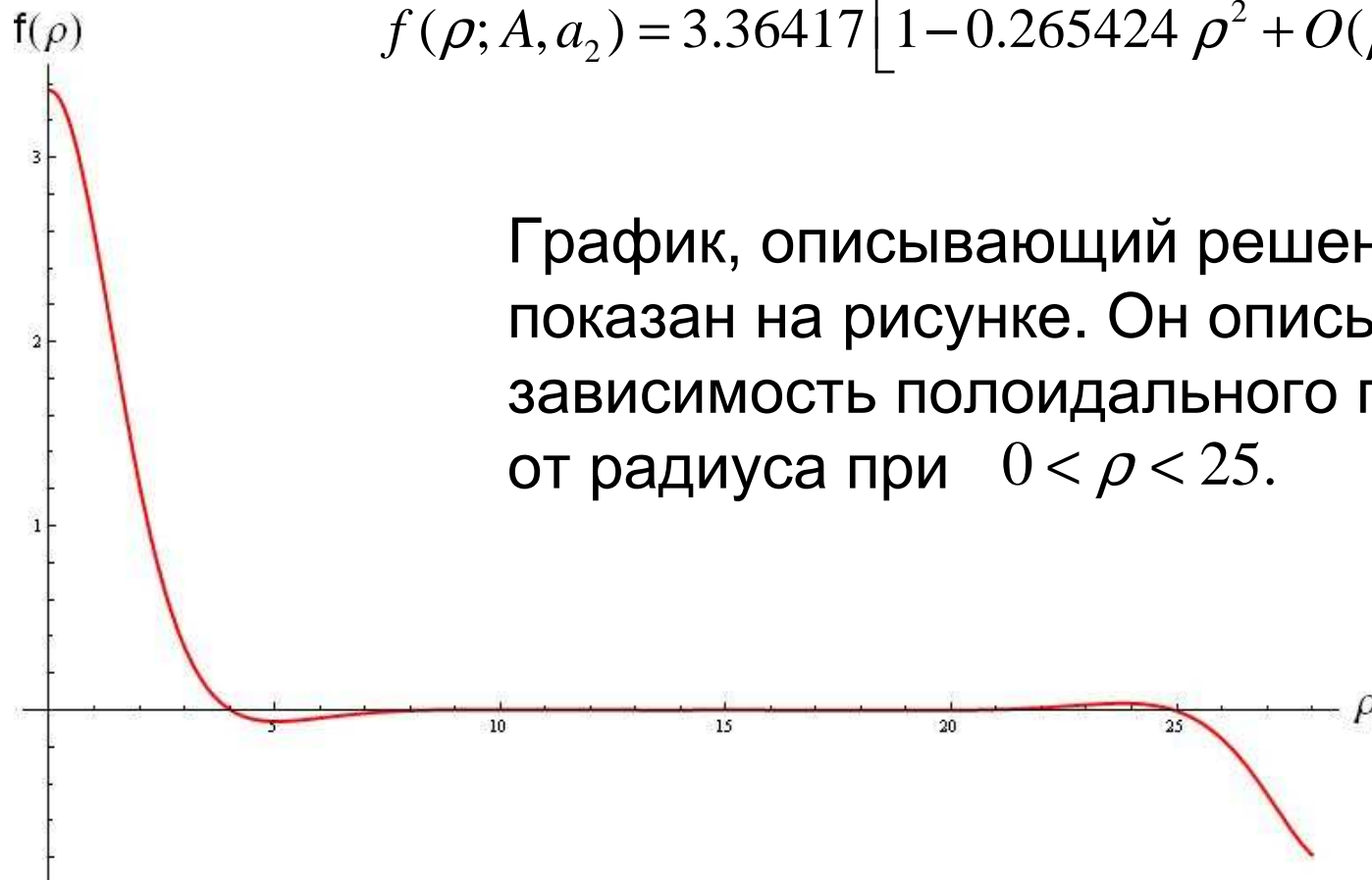
Для произвольных значений параметров  $A$ ,  $a_2$  решение искомого уравнения будет быстро (экспоненциально быстро) расти в ростом радиуса. Нас же интересуют такие значения параметров  $A$ ,  $a_2$ , при которых решение быстро затухает на больших расстояниях от оси. Ясно, что если значения параметров  $A$ ,  $a_2$  выбраны достаточно точно, то решение  $f(\rho, A, a_2)$  сперва будет приближаться к нулю и только потом устремится в бесконечность начиная с некоторого значения  $\rho_m(A, a_2)$ . Причем, чем ближе значения выбранных нами параметров к точным, тем позже начнется взрывной рост функции  $f(\rho, A, a_2)$ .

Изменяем параметры  $A$  и  $a_2$ , вычисляем численно решение уравнения конвекции (1) и определяем для него параметр  $\rho_m(A, a_2)$ . Результат представляем в виде трехмерного графика.



Приближенные значения параметров  $A$ ,  $a_2$  найдём из условия максимума функции  $\rho_m(A, a_2)$ . Решение «шпилька» при заданных условиях получается для следующих значений параметров:

$$f(\rho; A, a_2) = 3.36417 \left[ 1 - 0.265424 \rho^2 + O(\rho^4) \right].$$

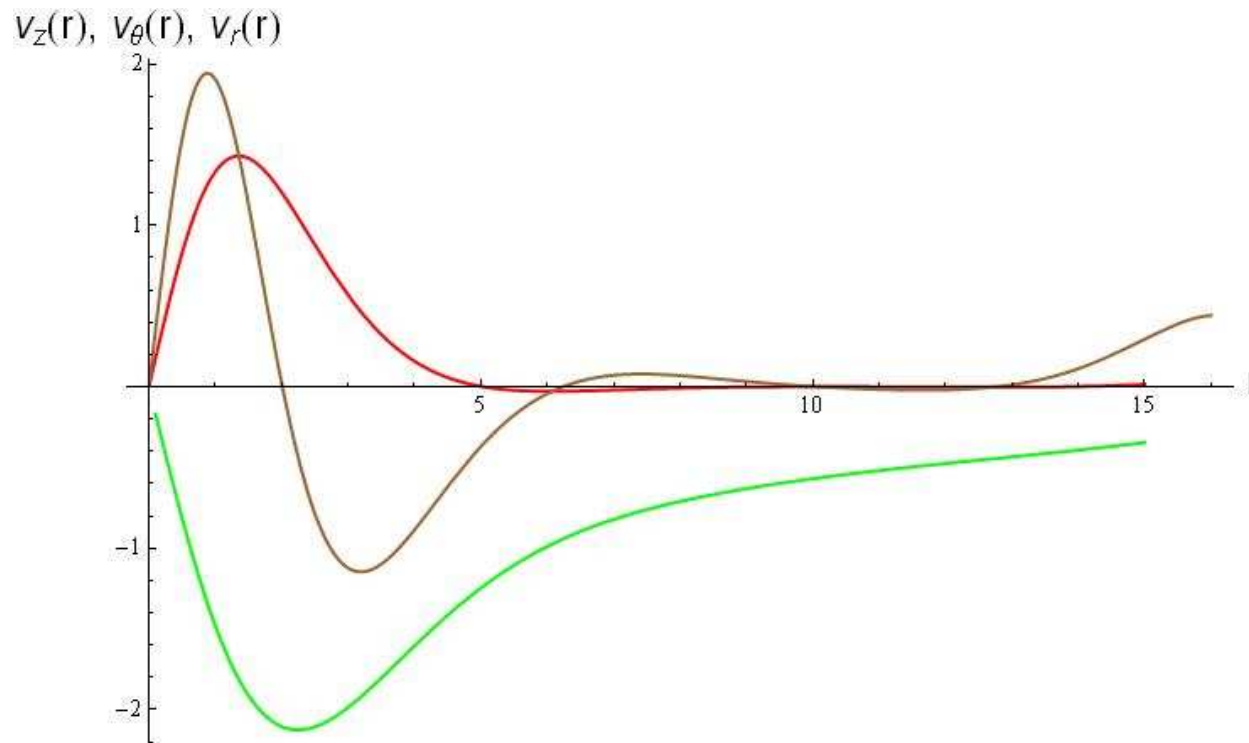


График, описывающий решение, показан на рисунке. Он описывает зависимость полоидального поля от радиуса при  $0 < \rho < 25$ .



В этой постановке задачи можно определить и другие поля скорости – тороидальное и потенциальное.

$$v\Delta_{\perp}\psi = -2\Omega\Phi, \quad \Phi = -\frac{g}{c^2}\varphi.$$



При учете вращения необходимо включать в рассмотрение сжимаемость атмосферы.

Система линейных гидродинамических уравнений:

- Уравнения Навье - Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nabla P_1}{\rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \rho_1 \vec{e}_z + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0,$$

- Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0,$$

Уравнение баланса энтропии:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma \rho_0 v_z = \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 - c^2 \chi \Delta \rho_1 .$$

## Уравнения в терминах потенциалов скорости

- Для скорости:  $\vec{v} = \nabla \cdot \Phi + \nabla \times \vec{e}\psi + \nabla \times (\nabla \times \vec{e}\varphi)$

- Уравнения Навье - Стокса:

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta \Phi + \frac{\Delta P_1}{\rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \left[ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{g \rho_1}{\rho_0} \right] + 2\Omega \Delta_{\perp} \psi = 0$$

$$\frac{\partial \Delta_{\perp} \psi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta_{\perp} \psi - 2\Omega \Delta_{\perp} \Phi - 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta \Delta_{\perp} \varphi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta \Delta_{\perp} \varphi + \frac{g}{c^2} \frac{\Delta_{\perp} P_1}{\rho_0} - \frac{g}{\rho_0} \Delta_{\perp} \rho_1 + 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

- Уравнение непрерывности:  $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \Delta \Phi - \rho_0 \frac{g}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho_0 \frac{g}{c^2} \Delta_{\perp} \varphi = 0$

- Баланс энтропии:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma \rho_0 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Delta_{\perp} \varphi \right) - \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 + \chi c^2 \Delta \rho_1 = 0$$

В случае вертикальной однородности задачи уравнения упрощаются.

$$\Delta^3 \varphi - \frac{g^2 \kappa}{c^4} \Delta^2 \varphi + \frac{g \gamma}{v^2} \Delta \varphi - \frac{g^3 \gamma \varphi}{v^2 c^4} - \frac{g^2 (2\Omega)^2}{v^2 c^4} (\kappa - 1) \varphi = 0.$$

Уравнение для тороидального поля скорости:

$$\frac{\partial \Delta_{\perp} \psi}{\partial t} - \nu \Delta_{\perp} \Delta_{\perp} \psi - 2\Omega \Delta_{\perp} \Phi = 0, \quad \nu \Delta_{\perp} \psi = -2\Omega \Phi,$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \Delta \Phi + \rho_0 \frac{g}{c^2} \Delta_{\perp} \varphi = 0 \quad \Phi = -\frac{g}{c^2} \varphi$$



В безразмерных переменных:


$$\Delta_{\perp}[\Delta_{\perp}\Delta_{\perp}f(\rho)+f(\rho)-f(\rho)\Delta_{\perp}f(\rho)]-Qf(\rho)=0, \quad (2)$$

$$Q = \left( \frac{2\Omega g \lambda^3}{vc^2} \right)^2.$$

Граничные условия для уравнения (3) те же самые

$$f(0) = Const, \quad f(\infty) = 0.$$

Мы проводили вычисления для значения  $Q=1$ .

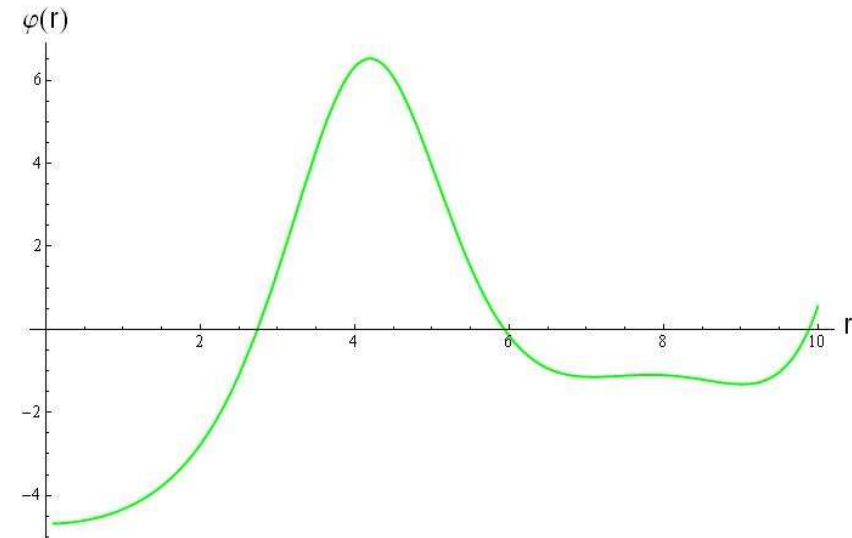
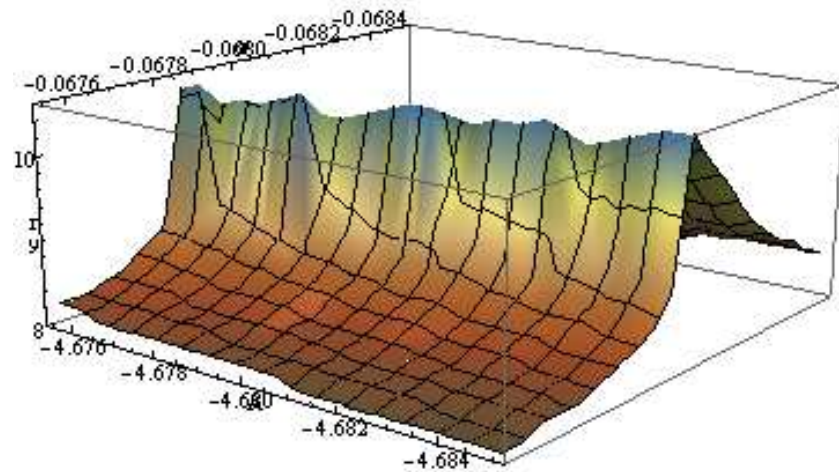


Искомая функция должна быть регулярной в нуле и стремиться к нулю на бесконечности. При малых значениях радиуса она может быть представлена в виде разложения:

$$f(\rho; A, a_2, a_4) = A \left[ 1 + a_2 \rho^2 + a_4 \rho^4 + \sum_{j=3}^{\infty} a_{2j} \rho^{2j} \right],$$

где коэффициенты  $a_6, a_8, \dots$  выражаются через коэффициенты  $A, a_2, a_4$ . Произвольная решение дифференциального уравнения (2) быстро растет при больших радиусах. Мы должны найти такие значения параметров  $A, a_2, a_4$ , при которых решение будет близко к нулю при достаточно больших радиусах.

Найти максимум функции  $\rho_m(A, a_2, a_4)$  оказалось гораздо труднее, так как теперь нужно варьировать три параметра:  $A, a_2, a_4$ , причем функция  $\rho_m(A, a_2, a_4)$  зависит от своих аргументов нерегулярно, имеет множество скачков и локальных максимумов.

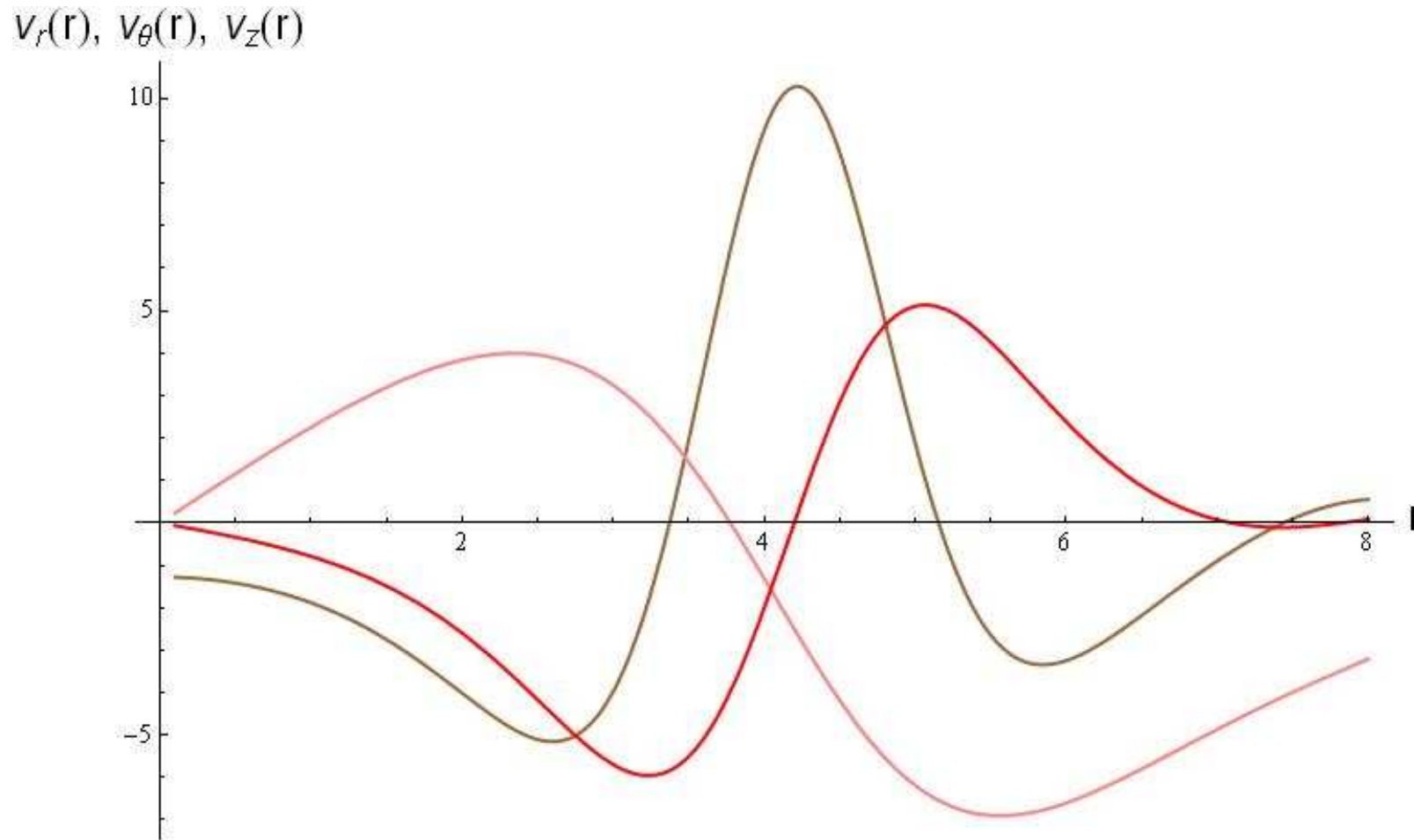


Наилучшее найденное нами приближение для потенциала полоидальной (вертикальной) скорости показано на рисунке. Оно отвечает значениям параметров:  $A=-4.6835$ ;  $a_2=-0.06804$ ;  $a_4=-0.0074987$ .

Для этого значения  $\rho_m(A, a_2, a_4) = 10$ .

$$f(\rho) = -4.6835 \left[ 1 - 0.06804 \rho^2 - 0.0074987 \rho^4 + O(\rho^6) \right]$$

Графики для полоидальной (вертикальной),  
потенциальной (радиальной) и тороидальной  
(азимутальной) компонент полей скорости







Спасибо за внимание!!