

К вопросу о правомерности применения теории Ми при проведении атмосферной коррекции спутниковых многозональных изображений

В.А. Козеев, Д.В. Козеев

*ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения
(ФГУП ЦНИИмаши)
141070 Московская обл., г. Королев, ул. Пионерская, д. 4
E-mail: vicko@inbox.ru*

Большинство программ атмосферной коррекции базируются на теории Ми, задаче о рассеянии электромагнитного поля на шаре. Особенность этого решения заключается в вытянутости индикатрисы рассеяния "вперед". В статье показано, что в построении решения Ми кроется ошибка, а результаты расчетов теряют всякий физический смысл при больших параметрах дифракции. Причина возникновения ошибки в построении решения Ми становится понятной на примере подобной двумерной задачи дифракции поля на бесконечном цилиндрическом идеальном проводнике, наиболее простой для восприятия и, соответственно, проверки правильности рассуждений. Для решения задачи дифракции поля на цилиндре характерна та же вытянутость диаграммы направленности "вперед", но при этом существуют еще более бессмысленные результаты расчетов, дающие огромные по величине магнитные поля и токи на поверхности металлического проводника. Предлагается отказаться от теории Ми, а при изучении процессов переноса излучения через атмосферу использовать расчеты индикатрисы рассеяния отдельных частиц на основе методов геометрической оптики.

Введение

Перед тематической обработкой полученных аэрокосмических снимков необходимо устранить влияние атмосферы – провести атмосферную коррекцию. Восстановление истинных коэффициентов спектральной яркости поверхности требует решения обратных задач, хорошего изучения процессов переноса излучения в атмосфере. В том числе, изучения процессов рассеяния и поглощения излучения молекулами и частицами в разных спектральных диапазонах.

Многие существующие методы атмосферной коррекции аэрокосмических изображений основаны на теории Ми (задача дифракции плоской электромагнитной волны на шаре), которая является основой изучения рассеяния излучения в атмосфере сферическими частицами и подробно изложена в монографии К. Борена и Д. Хафмена [1]. Отмечаются трудности физической интерпретации [1, стр.107] и большой вычислительной работы при больших параметрах дифракции χ ($k = 2\pi/\lambda$, $\chi = k \cdot \rho$, где k - волновое число, ρ - радиус частицы) [1, стр.161].

При этом безразлично: растет ли безразмерный параметр χ за счет увеличения радиуса частицы или за счет уменьшения длины волны излучения.

Поскольку теория Ми принимается для любых параметров дифракции [1, стр.133], сделаем оценку конуса угла рассеяния для капли воды радиусом 1 мм и Луны, как крупной непрозрачной частицы (радиус Луны 1738 км), на длине волны зеленого цвета $\lambda = 0,55$ мкм. Как отмечается в [1, стр.160] при суммировании рядов Ми для капли воды, указанного радиуса, нужно удерживать 12 тысяч членов ряда (число членов ряда приходится брать больше параметра дифракции), причем при вычислении коэффициентов ряда используются быстро осциллирующие сферические функции Бесселя и их производные в общем случае с комплексными аргументами [1, стр.161].

Воспользуемся рисунком «Рис. 4.8. Индикатриса рассеяния в случае дифракции на круглом диске» [1, стр.141] и выводами [1, стр.142]: «...почти весь рассеянный свет сосредоточен в конусе с половинным углом раствора $\theta \approx 10/\chi$ » (см. рис 1).

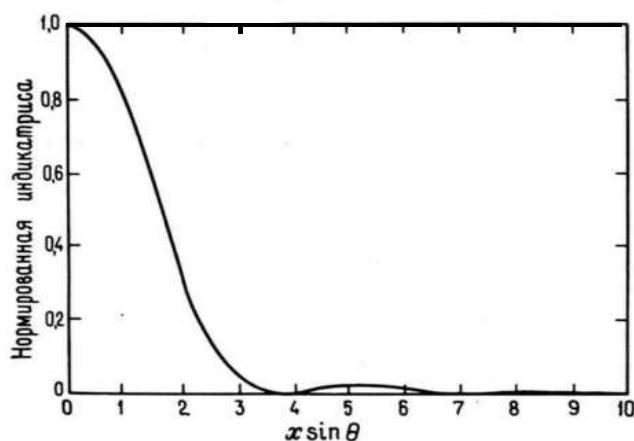


Рис. 1. Индикатриса рассеяния в случае дифракции на круглом диске

Таким образом, получаем следующие оценки:

- для капли воды: параметр дифракции $\chi = 11400$; угол рассеяния $2\theta \approx 0,1$ град;
- для Луны: параметр дифракции $\chi = 1,99 \cdot 10^{13}$; угол рассеяния $2\theta \approx 5,73 \cdot 10^{-12}$ град.

Заметим, что если бы не было атмосферы Земли, то вся энергия Солнца, падающая на геометрическое сечение Луны (в небольшой полосе длин волн $\Delta\lambda$ вблизи зеленой линии, среднее расстояние до Земли 384,4 тыс. км.) была сосредоточена на поверхности Земли в пятне диаметром 0,39 мм.

Причину ошибочности решения Ми легко можно показать на другом случае аналитического решения задачи дифракции электромагнитного поля – случае дифракции на бесконечном цилиндре.

1. Дифракция поля на цилиндре

Рассмотрим самый простой случай. Плоская электромагнитная волна падает на бесконечный идеальный цилиндрический проводник так, что вектор напряженности электрического поля параллелен оси цилиндра (см. рис. 2). Условия постановки задачи выбраны так, чтобы перейти к двумерной задаче. Идеальная проводимость цилиндра дает возможность рассматривать только падающее, отраженное поле и поверхностную плотность тока (поля внутри проводника нет).

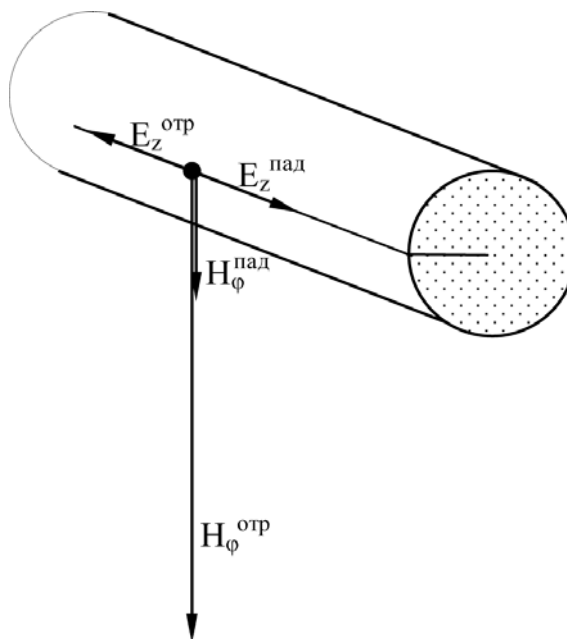


Рис. 2. Традиционное решение задачи дифракции поля на цилиндре

Подробно эта задача рассмотрена у А.И. Потехина в работе [2]. Там же [2, стр.82] впервые даются вычисленные диаграммы направленности рассеянного поля (для значений параметра дифракции не выше 8, см. рис.3), которые охотно приводятся многими другими авторами [3, стр.237; 4, стр.372; 5, стр.178] в качестве подтверждения торжества теории над здравым смыслом, подчеркивая наблюдаемый максимум излучения рассеянного поля «вперед» по направлению падающего поля («... вместо тени наблюдается максимум излучения.» [4, стр.373]). В то же время, говорится, что предельным случаем при возрастании χ является пунктирная линия («... соответствует предельной ($\lambda \rightarrow 0$) задаче...» [3, стр.236]).

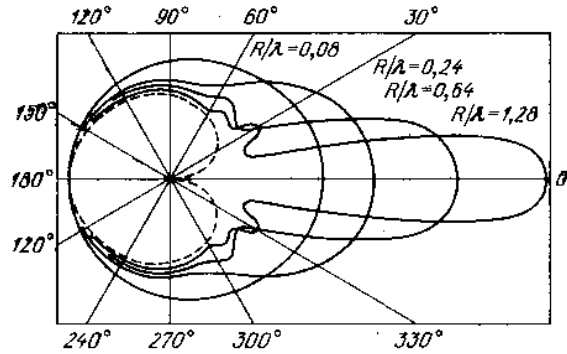


Рис. 3. Диаграммы направленности рассеянного на цилиндре поля

Ключевым моментом в полученных аналитических решениях дифракции плоской волны на бесконечном цилиндре и на шаре явилась возможность разложения плоской волны по гармоникам, содержащим функции Бесселя (цилиндрические функции или сферические соответственно).

В теории функций Бесселя известно соотношение [3, стр. 380]

$$e^{-jkr \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) e^{jn(\varphi - \frac{\pi}{2})},$$

которое описывает разложение в ряд Фурье экспоненты (плоской волны), при этом получаются коэффициенты Фурье в виде функций Бесселя. Это соотношение является своеобразной ловушкой. Рассмотрим этот момент подробнее.

Решение задачи дальше строится так. Отраженное поле представляется в виде ряда, где коэффициенты Фурье от расстояния описываются цилиндрическими функциями соответствующих индексов, но не произвольными, а теми, которые удовлетворяют условиям излучения на бесконечности – функциями Ханкеля второго рода. При этом для каждого индекса вводится неизвестный постоянный коэффициент, который определяется из граничных условий (сумма тангенциальных составляющих электрического поля на поверхности идеального проводника равна нулю, а магнитного поля – поверхностной плотности тока).

Падающее поле:

$$E_z^{nad} = z_0 \cdot E_m^0 e^{-jkr \cos \varphi} = z_0 \cdot E_m^0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) e^{jn(\varphi - \frac{\pi}{2})},$$

Отраженное поле:

$$E_z^{omp} = z_0 \cdot E_m^0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot H_n^{(2)}(kr) \cdot e^{jn(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

Но при $r = \rho$: $E_z^{omp}(k\rho) = -E_z^{nad}(k\rho)$

Отсюда получаем, что неизвестные коэффициенты A_n вычисляются по формуле:

$$A_n = -\frac{J_n(k\rho)}{H_n^{(2)}(k\rho)}$$

Итак:

$$E_z^{omp} = z_0 \cdot E_m^0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{J_n(k\rho)}{H_n^{(2)}(k\rho)} \right) \cdot H_n^{(2)}(kr) \cdot e^{in(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

При больших аргументах все цилиндрические функции, как показано в [6] можно описать в виде суммы двух цилиндрических волн:

$$z_n(kr) = T_{1n} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} + T_{2n} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}$$

Для функций Ханкеля второго рода $T_{2n} = 0$, поэтому общая для всех цилиндрических функций уходящая цилиндрическая волна выносится за знак суммы. Под знаком суммы остаются дополнительные постоянные комплексные коэффициенты T_{1n} , которые, в общем, известны, а сумма становится функцией одного аргумента φ – диаграммой направленности. Таким образом, на большом расстоянии отраженное электрическое поле вычисляется по формуле:

$$E_z^{omp} = z_0 \cdot E_m^0 \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{J_n(k\rho)}{H_n^{(2)}(k\rho)} \right) \cdot T_{1n} \cdot e^{in(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

Тангенциальная составляющая магнитного поля из найденного электрического поля находится путем дифференцирования.

2. Обсуждение причины ошибочности решения

Ошибка кроется в том, что неправильно выбрана область существования падающего поля. Правильно эта область показана на рис. 4, где существует область тени. В этом случае при нахождении коэффициентов Фурье интегрирование осуществляется от угла φ до $-\varphi$ (где $\varphi = \arcsin(\rho/r)$), а не от π до $-\pi$, как это делается традиционно. Получаются коэффициенты Фурье, которые также зависят от расстояния, но это не цилиндрические функции. Как показали расчеты, новые коэффициенты $C_n(kr)$ при малых индексах приближаются с увеличением расстояния к функциям Бесселя $J_n(kr)$, однако, с ростом индексов существенная разница между ними остается. На рис. 5. для примера приведена зависимость коэффициентов Фурье $C_0(kr)$ в зависимости от r/ρ (при малом ρ), а также функция Бесселя $J_0(kr)$. Отметим, что $C_0(kr)$ функция комплексная, поэтому приводятся действительная, мнимая часть и ее модуль. Функция Бесселя $J_0(kr)$ же действительна. При $r = \rho$, функция Бесселя $J_0(kr) \approx 1$, а действительная часть функции $C_0(kr) = 0,5$ (мнимая часть отрицательна и очень мала). Но уже при $r > 11 \rho$, функции практически сливаются.

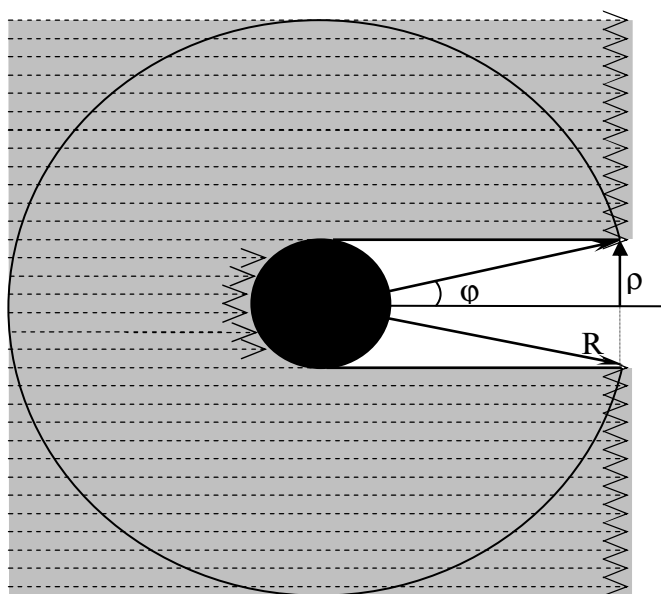


Рис. 4. Область существования падающего поля

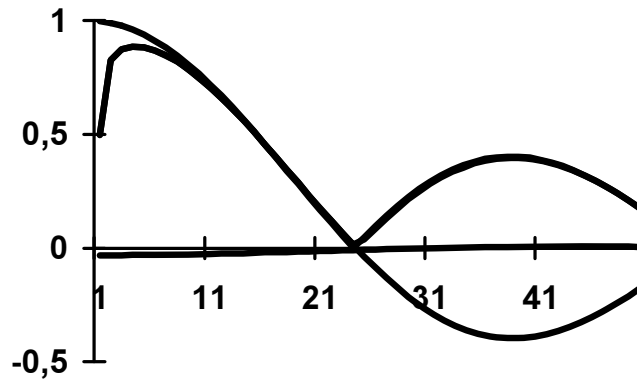


Рис. 5. Коэффициенты Фурье $C_0(kr)$ и функция Бесселя $J_0(kr)$ в зависимости от r/ρ

Вернемся к тому, как получаются коэффициенты Фурье.

Пусть имеется двумерная функция $F(r, \varphi)$. При фиксированном $r = R$ (рассматриваем функцию $F(r, \varphi)$ по дуге окружности радиуса R). Получается одномерная функция $f(\varphi)$. Разлагаем эту функцию в ряд Фурье.

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(kR) e^{in\varphi}$$

Неизвестные коэффициенты отыскиваются следующим образом:

Умножаем правую и левую часть на экспоненту $e^{-im\varphi}$ и берем интеграл в пределах от нуля до 2π

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} f(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(kR) e^{in\varphi} d\varphi$$

После интегрирования от бесконечного ряда останется один член с номером $n=m$.

Таким образом, можно записать:

$$C_n(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{-jkr \cos \varphi} d\varphi.$$

3. Оценка наведенного на проводнике тока

Отметим, что для задачи дифракции на цилиндре кроме «рассеяния вперед» возникает еще одна «беда»: при малых параметрах дифракции $\chi \ll 1$ отраженное магнитное поле во много раз превышает (вплоть до бесконечности) падающее (см. рис. 2).

Найдем верхнюю оценку тока, наведенного на цилиндрическом проводнике, используя традиционное решение задачи дифракции, например, при действии поля грозы.

Импульс поля грозы можно аппроксимировать, например, следующей аналитической зависимостью в виде двух экспонент:

$$E(t) = E_0 (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}),$$

где $\alpha = 10^4$ 1/сек, $\beta = 10^6$ 1/сек

Спектральная плотность воздействующего импульса оценивается функцией:

$$E(i\omega) = E_0 \left(\frac{1}{\alpha + i\omega} - \frac{1}{\beta + i\omega} \right)$$

Модуль спектральной плотности имеет максимум на частоте $\omega = 0$, который далее плавно уменьшается с увеличением частоты. Спектр, практически ограничен единицами мегагерц (см. рис. 6).

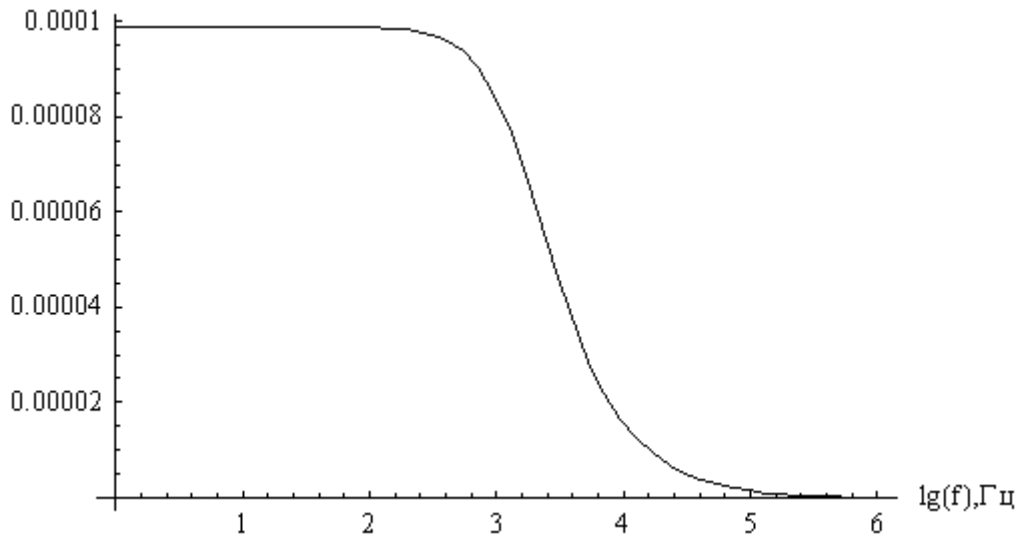


Рис. 6. Модуль спектральной плотности ЭМИ грозы

Если учесть, что $k = \frac{\omega}{c}$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/сек), то для тонких проводников (радиус $\rho = 1 - 5$ мм) аргумент цилиндрических функций $k\rho$ лежит во всем диапазоне принятого спектра частот в пределах много меньше единицы (от 0 до 10^{-3})

Проследим далее традиционное решение. По известному Е-полю, находим азимутальное магнитное поле:

$$H_{\varphi}^{omp}(r, \varphi) = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_z^{omp}(r, \varphi)}{\partial r} = -\frac{ik}{\omega\mu} E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k\rho)}{H_n^{(2)}(k\rho)} H_n^{(2)}(kr) e^{in(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

Обратим внимание, что в рядах для магнитного поля функции, зависящие от расстояния – это производные по аргументу для функций Ханкеля.

В дальнейшем учтём, что:

$$\frac{k}{\omega\mu} = \frac{1}{\rho_0} \approx \frac{1}{377\text{ом}}; \quad \frac{k}{\omega\mu} E_0 = H_0$$

Полный ток по поверхности проводника можно оценить, интегрируя суммарное значение азимутального магнитного поля по контуру сечения проводника:

$$I = \oint H_{\varphi}^{сумм}(\rho) d\ell = \int d\ell = \rho d\varphi = \rho \int_0^{2\pi} H_{\varphi}^{сумм}(\rho) d\varphi = -2\pi\rho i \left[J_0'(k\rho) - J_0(k\rho) \frac{H_0^{(2)'}(k\rho)}{H_0^{(2)}(k\rho)} \right] H_0$$

Из бесконечной суммы выделяется только постоянная составляющая потому, что $\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} d\varphi = 0$ при $n \neq 0$.

Аналогичная формула приведена в задаче № 416 [7, стр.321].

Учтем, что:

$$H_n^{(2)}(k\rho) = J_n(k\rho) - iN_n(k\rho).$$

Поскольку аргумент $k\rho \ll 1$, то при вычислении цилиндрических функций воспользуемся аппроксимацией малого аргумента [3]:

$$J_0(k\rho) \approx 1; J_0'(k\rho) \approx -\frac{k\rho}{2}; N_0(k\rho) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{1,781k\rho}; N_0'(k\rho) \approx \frac{2}{\pi k\rho}$$

Приведём оценки суммарного магнитного поля и тока на проводнике радиусом $\rho = 5$ мм на различных частотах при напряжённости падающего поля $H = 1$ А/м (табл. 1).

Таблица 1.

Частота, f	Аргумент, параметр дифракции, $k\rho$	Постоянная составляющая магнитного поля, A/m	Наводимый ток, A
10 Гц	$1,047 \cdot 10^{-9}$	$(4,6 + i0,35) \cdot 10^{+7}$	$(0,108 - i1,44) \cdot 10^{+6}$
10 кГц	$1,047 \cdot 10^{-6}$	$(6,8 + i0,77) \cdot 10^{+4}$	$(0,24 - i2,14) \cdot 10^{+3}$
10 МГц	$1,047 \cdot 10^{-3}$	$(1,32 + i0,29) \cdot 10^{+2}$	$(0,91 - i4,1) \cdot 10^{+0}$

Таким образом, тонкий провод на низких частотах служит некоторым подобием магнитного усилителя. Получается это потому, что при малом аргументе $k\rho = 0 \div 10^{-2} \ll 1$ в знаменателе формулы для вычисления тока стоит величина пропорциональная натуральному логарифму от малой величины (для выбранных аргументов это единицы и десятки), а в числителе – величина пропорциональная обратному значению малого аргумента (сотни и десятки миллионов).

По нашему мнению на идеальном проводнике поверхностная плотность тока не должна превышать удвоенного значения тангенциальной составляющей напряженности падающего магнитного поля, а сами составляющие равны между собой. Поэтому в конструкции построенного решения для рассеянного поля принципиально не могут быть использованы цилиндрические функции Ханкеля. Это могут быть какие-то функции, сложным (трудно предсказуемым) образом зависящие от расстояния, хотя и удовлетворяющие условию излучения на бесконечности. При этом должны соблюдаться физические законы (например, сохранения энергии) на поверхности проводника, а не только на бесконечности.

Расчетные оценки токов могут достигать десятков килоампер (данные можно найти в работе [8, стр. 55]) вместо реальных единиц ампер.

4. Дифракция на шаре

Для случая дифракции на шаре расчетные формулы сложнее, они подробно изложены в работе [1, стр. 107-165]. Отметим только, что там ошибки возникают также из-за неучета области тени, при использовании известных тождеств [1, стр. 119]. Так, при вычислении неизвестных коэффициентов разложения падающего поля требуется вычисление интегралов:

- предложенное Гогенбауэром обобщение интеграла Пуассона

$$j_n(\rho) = \frac{i^{-n}}{2} \int_0^\pi e^{i\rho \cos \theta} P_n^1 \sin \theta d\theta$$

- вычисление интеграла по частям дает:

$$\int_0^\pi P_n^1 \sin \theta e^{i\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{2n(n+1)j_n(\rho)i^n}{i\rho}$$

- вычисление другого интеграла после преобразований дает:

$$\int_0^\pi \left(\cos \theta \frac{dP_n^1}{d\theta} + \frac{P_n^1}{\sin \theta} \right) e^{i\rho \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{2n(n+1)i^n}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho j_n(\rho))$$

(полученные сферические функции Бесселя и их производные дают возможность построить решение дифракции поля на шаре в виде решения Ми).

Если интегрирование по углу места θ вести не от 0 до π , а от какого-то угла θ_0 (зависящего от расстояния, с учетом тени) до π , то тождества становятся неприменимы. Стройная теория Ми распадается.

5. Рекомендации

Для изучения процессов рассеяния в атмосфере излучения крупными частицами можно использовать метод геометрической оптики [1, стр.207]. Авторами была разработана численная про-

грамма расчета RADUGA, построенная на основных положениях метода геометрической оптики с учетом отражений, преломлений, переотражений и затухания в среде и фазовых соотношений. Прослеживается каждый узкий луч на выбранной сетке узлов, до десяти его выходов из сферической частицы, при этом после первого выхода потока излучения сквозь частицу с плавной диаграммой направленности, все последующие выходы – это радуги с резким максимумом.

На рис.7. приводятся результаты расчетов для частицы диаметром 1 мкм, с коэффициентом преломления $n = 1,409 - i0,1747$, а также без учета затухания $n = 1,409 - i0,0$. Коэффициенты взяты произвольно.

Рассчитанные по-новому индикатрисы рассеяния частиц могут служить основой для изучения переноса излучений в атмосфере и более точного проведения атмосферной коррекции многозональных аэрокосмических снимков поверхности Земли.

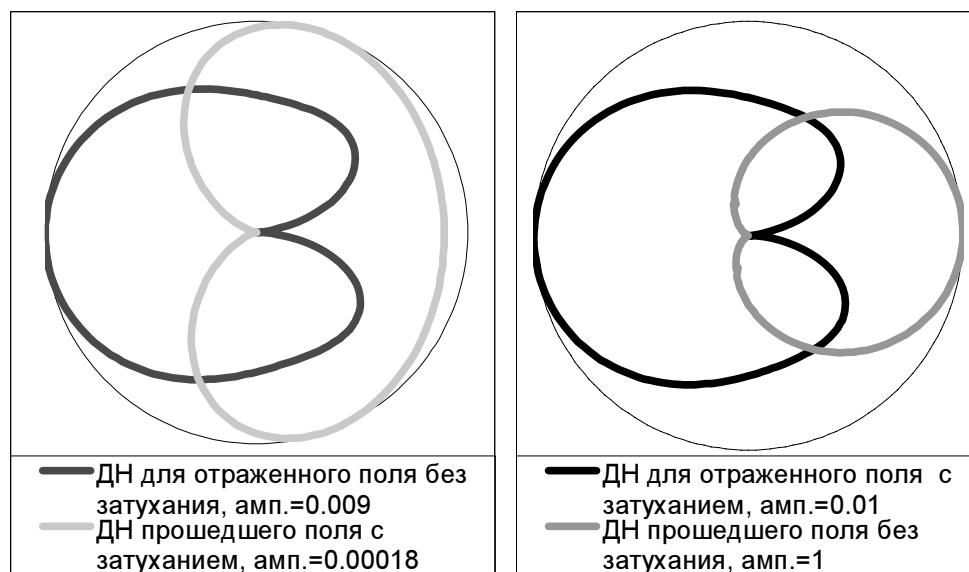


Рис. 7. Нормированные диаграммы направленности для расчетных случаев

По результатам анализа численных экспериментов можно заключить, что прошедшее сквозь частицу излучение существенным образом зависит от мнимой части комплексного волнового коэффициента и, соответственно, размеров частицы. Если затухания энергии в частице нет, то индикатриса рассеяния и картина рассеяния от размеров частиц не меняется.

Полученные результаты исследований частично излагались в 2006 году в виде стендового доклада [9] и вызвали интерес многих коллег.

Выводы:

1. При постановке задач дифракции электромагнитного поля (плоской волны) на шаре и цилиндре при выборе области существования падающего на тело поля необходимо учитывать область тени.
2. Аналитическое решение задач дифракции поля на шаре и бесконечном цилиндре становится невозможным, так как разложение воздействующего поля по гармоникам содержит не аналитические функции Бесселя (сферические функции Бесселя), а функции $C_n(kr)$, сложным образом зависящие от расстояния и получаемые в результате вычислений.
3. Искомое рассеянное поле для шара и бесконечного цилиндра (и преломленные поля внутри тела) также не имеют разложений по гармоникам, содержащим цилиндрические и сферические функции.

4. Оценки токов, наводимых на протяженных проводниках под действием электромагнитного поля, сделанные на основе традиционного методического подхода к задаче дифракции поля на бесконечном цилиндре, являются завышенными, что может потребовать, например, излишней защиты на оконечных узлах кабельных линий связи. Предлагаемый авторами методический подход лишен этого недостатка.

5. Для уточнения индикатрис рассеяния крупными сферическими частицами, содержащихся в аэрозолях и атмосфере, рекомендуется использовать метод геометрической оптики. Это позволит полнее изучить процессы переноса излучения в атмосфере и точнее провести атмосферную коррекцию многоспектральных аэрокосмических изображений.

Литература

1. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 664 с.
2. *Потехин А.И.* Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1948. 135 с.
3. *Никольский В.В.* Теория электромагнитного поля. М.: Высшая школа, 1964. 384 с.
4. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, Гл. ред. ФМЛ, 1989. 543 с.
5. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М-Л.: Энергия, 1967. 376 с.
6. *Козеев В.А.* Нетрадиционное решение уравнения Бесселя. Универсальная программа вычисления цилиндрической функции, ее производных и интеграла с произвольными комплексным индексом и аргументом. Монография. Калининград М.о.: ЦНИИмаш, 1993. 103 с.
7. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. М.: Гос. Изд. ФМЛ, 1962. 480 с.
8. *Рикетс Л.У., Бриджес Дж. Э., Майлетта Дж.* Электромагнитный импульс и методы защиты. Перевод с англ. под ред. Ухина Н.А. // М.: Атомиздат, 1979. 328 с.
9. *Козеев В.А., Козеев Д.В.* Новое представление о рассеянии электромагнитного излучения крупными частицами // Доклад на Всероссийской открытой конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса», ИКИ РАН, 2006.