Стационарная модель тропического циклона в безграничном океане

О.О. Архипкин[1], Б.П. Руткевич[2], П.Б. Руткевич[1]

[1] Институт космических исследований РАН
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 84/32
[2] Радиоастрономический институт НАН Украины
ул. Краснознаменная 4, Харьков 61002, Украина

В работе построена аксиально симметричная стационарная модель тропического циклона с учётом выделения энергии в области стены глаза и диссипации энергии в окружающем пространстве. Модель строится на основе теории конвекции в вертикальных каналах. Основным энергетическим источником существования тропического циклона считается выделение скрытой теплоты конденсации водяного пара, присутствующего в атмосфере и приводящего к резкому усилению неустойчивости за счёт меньшего значения адиабатического распределения температуры по сравнению со значения адиабатического распределения температуры в сухом воздухе. Наличие сильного энергетического источника, очевидно, приведёт к подъёму воздуха в оси структуры, и движения будут затухать при устремлении радиуса структуры в бесконечность. В результате получено, что радиальное распределение течения воздуха зависит от устойчивого вертикального распределения температуры в окружающем пространстве. При достаточно сильной устойчивой стратификации, скорость подъёма воздуха в центральной части максимальна вблизи оси структуры. А при слабой стратификации почти нейтрально стратифицированный воздух легко увлекается вверх сильным вертикальным движением прогретого воздуха в стене глаза, и появляется нисходящий поток– глаз тропического циклона. Работа выполнена при поддержке ГРАНТа РФФИ 06-05-64275-а.

Согласно наблюдениям, тропический циклон в горизонтальном направлении можно условно разделить на три зоны: область глаза, область стены глаза и окружающую область [1]. В области глаза влажный воздух поднимается и при этом выделяется большое количество скрытой теплоты конденсации, что и является основной энергетикой развития и существования тропического циклона. В остальных областях происходит диссипация этой выделившейся энергии.

Целью теоретического рассмотрения такого рода стационарной структуры является определение распределения температур и скоростей движения воздуха в различных областях. Область развитого тропического циклона разделим на две зоны: внутреннюю с неустойчивым (конвективным градиентом температуры), в которой происходит конденсация водяного пара и основное выделение энергии и внешнюю окружающую с устойчивым (не конвективным градиентом температуры). Модель формулируем в рамках постановки задачи Остроумова [2-5], в которой рассмотрена конвекция в аксиально симметричном вертикальном канале. Считаем канал бесконечным в горизонтальном направлении, что не входит в противоречие с постановкой задачи Остроумова, поскольку решения в устойчивой области быстро исчезают, определяя тем самым горизонтальные размеры самого вихря. Размер области неустойчивой стратификации зададим равным $\mathrm{r} = \mathrm{a}$.

Система уравнений, описывающих конвекцию, как известно, имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{t}} - \nu \Delta \vec{\mathrm{v}} + \frac{\nabla P_1}{\rho_0} + \frac{\mathrm{g}}{\rho_0} \gamma T_1 \vec{e}_z = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathrm{t}} + \gamma v_z = \chi \Delta T_1, \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{v}} = 0, \qquad (3)$$

Здесь γ - градиент температуры в рассматриваемой области, во внутренней области γ_{in} он считается конвективным, во внешней области γ_{out} он принимается устойчивым, $\nu-$ коэффициент вязкости, $\chi-$ температуропроводность. Таким образом, система уравнений (1)-(3) представляет собой систему уравнений с переменным коэффициентом. Для её решения необходимо выполнять сшивку на границе двух областей при $r = a$.

Поле скорости можно представить в виде суммы потенциальной, тороидальной и полоидальной компонент:

$$\vec{v} = \nabla \cdot \Phi + \nabla \times (\vec{e}\psi) + \nabla \times (\nabla \times (\vec{e}\varphi)), \tag{4}$$

где $\vec{e}$ - единичный вектор, направленный вертикально вверх, Φ, ψ, φ - потенциалы «потенциального», тороидального и полоидального полей скорости, которые являются скалярными функциями времени и координат. В принятой нами геометрии задачи существует только одна компонента скорости – вертикальная. Её можно представить как полоидальное поле скорости $\vec{v} = \mathrm{rotrot}\varphi = -\Delta_{\perp}\varphi$, где φ - потенциал этого поля. Система уравнений в этом случае (1-3) в устойчивой (не конвективной) области описывается уравнением (система отнормирована обычным образом, при этом горизонтальный размер внутренней зоны оказывается равным единице a=1):

$$\left(D^2 + R_{out}\right)\varphi = 0. \tag{5}$$

Здесь $Df = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}f = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)f$, R_{out} - число Рэлея в устойчивой зоне.

$$R_{out} = \frac{\gamma_{out} g a^4}{\nu\chi}.$$

Поскольку мы рассматриваем только внешнюю область, имеющую устойчивую стратификацию, то из четырех решений этого уравнения следует оставить только два, обращающихся в нуль на бесконечности.

$$\varphi_{out}(r) = A_{out}\ \mathrm{KelvinKei}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\,r) + B_{out}\ \mathrm{KelvinKer}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\,r), \tag{6}$$

где $\mathrm{KelvinKei}_0(x), \mathrm{KelvinKer}_0(x)$ - табулированные цилиндрические функции Кельвина, а A_{out}, B_{out} - константы интегрирования.

В неустойчивой внутренней области уравнение для потенциала полоидального поля скорости имеет вид:

$$\left(D^2 - R_{in}\right)\varphi = 0. \tag{7}$$

Решение уравнения для потенциала полоидального поля скорости в неустойчивой части, поскольку они должны оставаться ограниченными в области оси структуры, можно представить как:

$$\varphi_{in}(r) = A_{in}J_0(\sqrt[4]{R_{in}}\,r) + B_{in}I_0(\sqrt[4]{R_{in}}\,r), \tag{8}$$

где $J_0(x), I_0(x)$ - обычная и модифицированная функции Бесселя, A_{in}, B_{in} - константы интегрирования.

Для получения полного решения задачи во всей области $0 < r < \infty$ на границе при $r = a$ решения (6-2) и (6-4) необходимо приравнивать между собой, что позволяет определить значения констант интегрирования.

$$\begin{aligned} &A_{in}J_0(\sqrt[4]{R_{in}}\,a) + B_{in}I_0(\sqrt[4]{R_{in}}\,a) = \\ &= A_{out}\ \mathrm{KelvinKei}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\,a) + B_{out}\ \mathrm{KelvinKer}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\,a), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left[A_{in}J_0(\sqrt[4]{R_{in}}\,a) + B_{in}I_0(\sqrt[4]{R_{in}}\,a))\right] = \\ &= \frac{d}{dr}\left[A_{out}\ \mathrm{KelvinKei}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\,a) + B_{out}\ \mathrm{KelvinKer}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\,a))\right], \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dr^2}\left[A_{in}J_0(\sqrt[4]{R_{in}}\,a) + B_{in}I_0(\sqrt[4]{R_{in}}\,a)\right] = \\ &= \frac{d^2}{dr^2}\left[A_{out}\mathrm{KelvinKei}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\,a) + B_{out}\ \mathrm{KelvinKer}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\,a)\right], \end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{d^3}{dr^3}\left[A_{in}J_0(\sqrt[4]{R_{in}}a)+B_{in}I_0(\sqrt[4]{R_{in}}a)\right]=$$
$$=\frac{d^3}{dr^3}\left[A_{out}\mathrm{KelvinKei}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\mathrm{a})+B_{out}\ \mathrm{KelvinKer}_0(\sqrt[4]{R_{out}}\mathrm{a})\right]. \tag{12}$$

Четыре уравнения (9)-(12) для четырёх констант интегрирования $A_{in}, B_{in}, A_{out}, B_{out}$ представляют собой систему уравнений, которые являются однородными. Для нахождения нетривиального решения необходимо потребовать равенства нулю определителя $Ds(p)$ системы (9)-(12). Равенство нулю определителя системы достигается для какого-то значения параметра $p=\sqrt[4]{R_{in}}$ при заданном значении устойчивой стратификации во внешней зоне.

Зависимость температура от радиуса структуры определяется уравнением (2), которое в этом случае имеет вид:

$$D\left(T+\frac{\gamma a^2}{\chi}\varphi\right)=0. \tag{13}$$

Зависимость температуры от радиуса структуры в общем случае определяется следующим образом:

$$\theta(r)=-\frac{\gamma a^2}{\chi}\varphi(r)+B_1+B_2\ln r\ .$$

В случае использования в задаче только двух зон константа при логарифме интегрирования выпадает $B_2=0$. А константа интегрирования B_1 принимает значения, различные в различных зонах. Во внешней зоне она, очевидно, равна нулю, поскольку поправка к температуре на бесконечности по радиусу должна обращаться в нуль, так что остаётся определить только одну константу интегрирования B_1 в первой зоне. Она находится из условия непрерывности температуры на границе зон, и оказывается равной

$$B_1=\left[\frac{|\gamma_1|a^2}{\chi}+\frac{\gamma_2 a^2}{\chi}\right]\varphi(a)$$

Зависимость температуры от радиуса от оси структуры будет иметь излом. Это связано с тем, что на границе $a=1$ по условию имеет место разрыв (смена знаков) градиентов температуры, то есть, снаружи устойчивая стратификация, а внутри устойчивая стратификация.

Для скорости и температуры при достаточно больших значениях устойчивой стратификации во внешней зоне получаются такие решения:

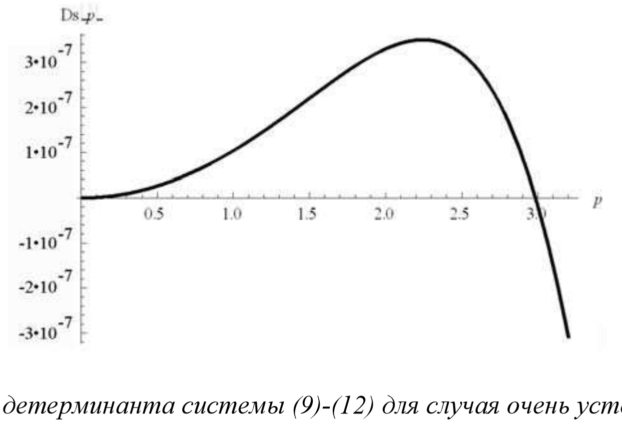

Рис. 1. Зависимость детерминанта системы (9)-(12) для случая очень устойчивой стратификации во внешней зоне $R_{out}=20$ от параметра $p=\sqrt[4]{R_{in}}$ для неустойчивой зоны. «Точное» значение (вычисленное на компьютере) корня зависимости от параметра равно $p=2.99$. Число Рэлея во внутренней зоне в этом случае получается равным $R_{in}=79.3$

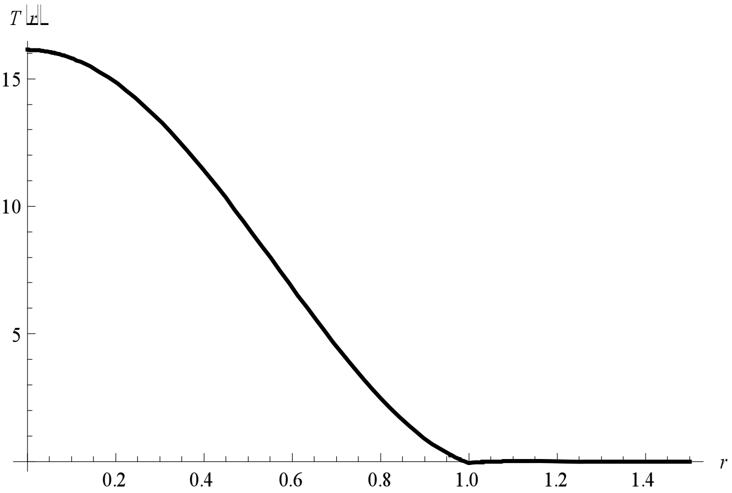

Рис. 2. Распределение температуры по радиусу при большом устойчивом числе Рэлея в устойчивой области $R_{out} = 20$

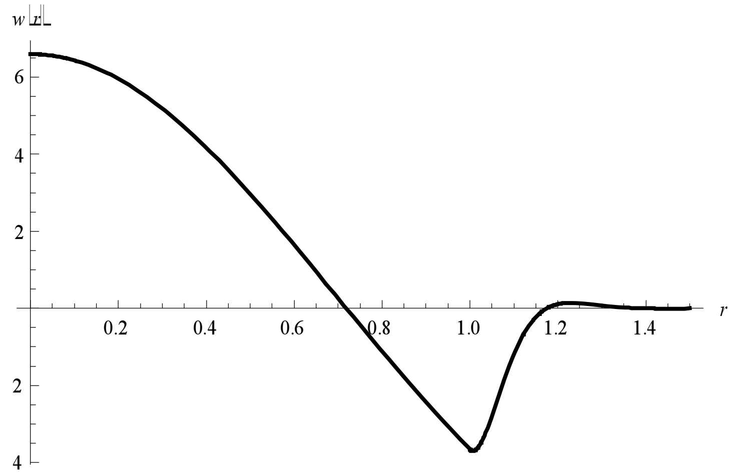

Рис. 3. Распределение вертикальной скорости по радиусу при большом устойчивом числе Рэлея в устойчивой области $R_{out} = 20$

Для слабой стратификации во внешней области получается несколько другая картина зависимости скорости и температуры.

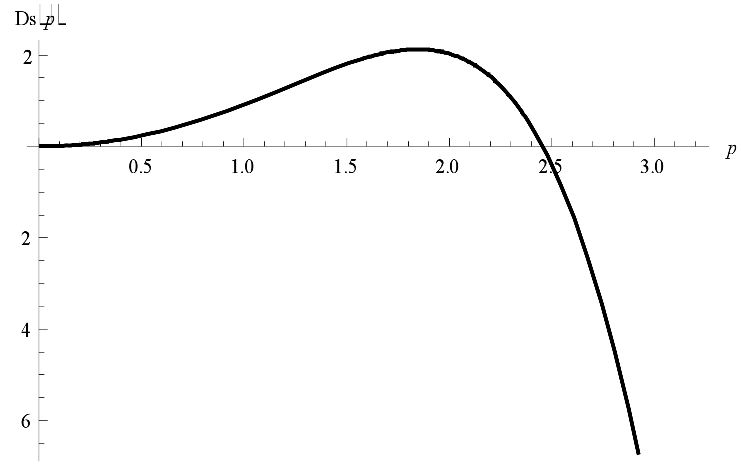

Рис. 4. Зависимость детерминанта системы (9)-(12) для случая слабой устойчивой стратификации во внешней зоне $R_{out} = 5$ *от параметра* $p = \sqrt[4]{R_{in}}$ *для неустойчивой зоны. «Точное» значение (вычисленное на компьютере) корня зависимости от параметра равно* $p = 2.456$. *Число Рэлея во внутренней зоне в этом случае получается равным* $R_{in} = 36.4$

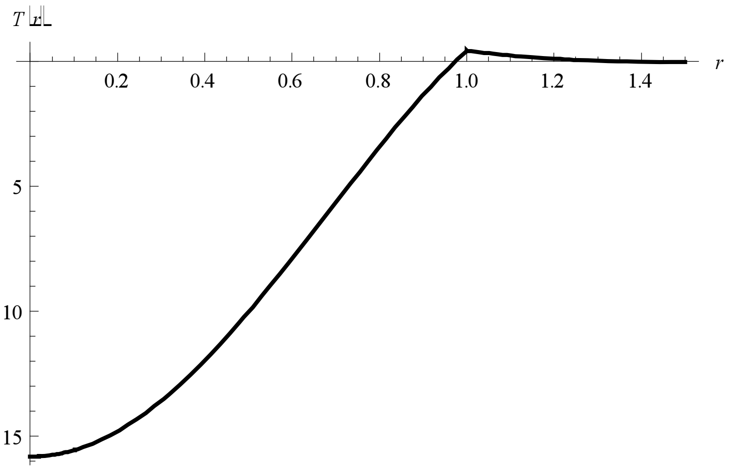

Рис. 5. Распределение температуры по радиусу при малом устойчивом числе Рэлея в устойчивой области $R_{out} = 5$

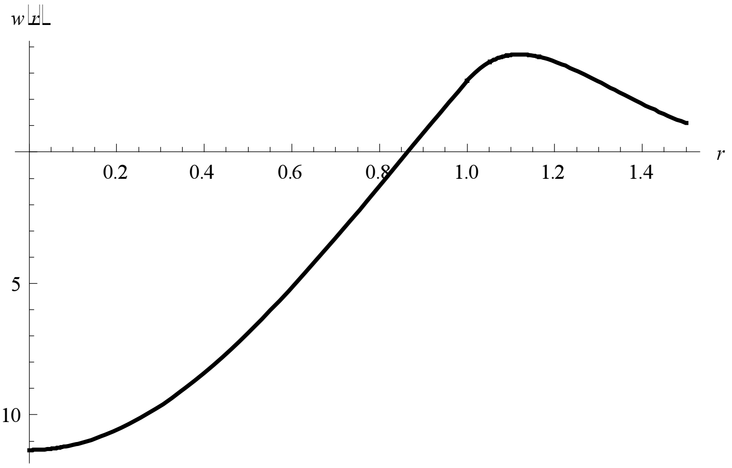

Рис. 6. Распределение вертикальной скорости по радиусу при малом устойчивом числе Рэлея в устойчивой области $R_{out} = 5$

Изменение распределения скорости и температуры при малых значениях устойчивой стратификации во внешней области (что всегда имеет место в тропиках) можно интерпретировать следующим образом. Почти нейтрально стратифицированный воздух легко увлекается вверх сильным вертикальным движением прогретого воздуха в стене глаза, а поскольку вертикальный поток воздуха должен быть равным нулю, неизбежно появляется нисходящий поток, который приходится на внутреннюю часть области – глаз тропического циклона. Нисходящий поток воздуха на оси структуры приводит к понижению температуры, что хорошо видно на рисунках.

Литература

1. *Willoughby H.E.* Tropical Cyclone Eye Thermodynamics. Monthly Weather Review, Volume 126, 1988, pp. 3053-3067.

2. *Остроумов Г.А.* Естественная конвективная теплопередача в замкнутых вертикальных трубах // Изв. ЕНИ при Пермск. ун-те, 1947. 12, №4, 113.

3. *Остроумов Г.А.* Математическая теория конвективного теплообмена в замкнутых вертикальных скважинах // Изв. ЕНИ при Пермск. ун-те, 1949. 12, №9, 385.

4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд., М.: Наука, 1986. 733 с.

5. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 320 с.