

Аналитическая модель верхней границы облачности

Г.С. Голицын¹, Б.П. Руткевич², П.Б. Руткевич²

¹ *Институт физики атмосферы РАН*

² *Институт космических исследований РАН*

117977, Москва, ул. Профсоюзная, 84/32

E-mail: peter_home@tarusa.ru

В работе рассмотрена задача о росте мощной облачности над испаряющей поверхностью. Наличие сконденсированной влаги внутри облака существенно изменяет термодинамику системы и, как результат, вертикальные профили всех параметров задачи. В работе найдены профили основных термодинамических величин внутри облака. Нагрев внутренней части облака в процессе его роста происходит за счет выделения скрытой теплоты конденсации пара. При этом поступающая из нижележащих слоев влага расходуется на насыщение воздуха паром и сопровождается образованием капель. В предположении наличия постоянного источника пара в виде испарения с подстилающей поверхности в работе формулируются временные характеристики процесса формирования облака. При неустойчивом профиле температуры воздуха в облаке получено также число Рэлея для конвекции с учётом термодинамики фазовых переходов влаги, зависящее от количества насыщенного пара. Рассмотрен также вопрос о конвекции в безграничном пространстве. Получено, что конвективные процессы в свободной атмосфере практически не зависят от такого важного параметра для лабораторной конвекции как толщина конвективного слоя. Определяющую роль в атмосферной конвекции играют такие естественные для атмосферы факторы как скорость звука, турбулентная вязкость и градиент температуры. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-05-64275-а).

Введение

Общепринято, что перенос влаги осуществляется из нижних более теплых, и потому с большей абсолютной влажностью, воздушных слоев. Влага в нижних слоях атмосферы обусловлена испарением, и потому естественно считать, что скорость испарения является внешним параметром в подобной задаче. Моделируя процесс образования облака, атмосферу можно разделить на три основные области, которые назовем соответственно: подоблачный слой, собственно облако и надоблачный воздух. В подоблачном слое абсолютная влажность воздуха достаточно высока, однако в силу высокой температуры воздуха пар остается ненасыщенным. Эта область ответственна за процесс переноса влаги от подстилающей поверхности (суша или океан) к облаку и в модели образования облаков является источником влаги.

Начиная с некоторой высоты парциальное давление пара достигает давления насыщенного пара (точка росы), и часть влаги превращается в капли, образуется облако. Внутренняя часть облака принципиально отличается от подоблачного слоя тем, что пар в нем находится в состоянии насыщения, поэтому описание облака требует применения термодинамики влажного воздуха [1-3]. Конвекция из нижних слоев переносит влагу вверх, и, если интенсивность испарения влаги остаётся постоянной достаточно долгое время, толщина облака увеличивается.

Такого рода модель образования облака была бы достаточно проста, но для её реализации необходимо знать распределение основных термодинамических параметров влажной атмосферы (то есть в облаке) с высотой. Распределение пара в подоблачном слое воздуха является не насыщенным, и существует ряд моделей, описывающих двухкомпонентную смесь в поле силы тяжести. В рамках нашей модели достаточно ограничиться вопросом о конечном (равновесном) распределении влаги по высоте, к которому стремится система. Плотности и температура двух составляющих подоблачной атмосферы (воздух и пар) спадают по высоте. Причем пар распределен в атмосфере согласно барометрической формуле, но с учетом температурного профиля основной массы воздуха. В этом случае нижняя граница облака определяется высотой, на которой давление пара

достигает насыщения при данной температуре, которая, в свою очередь, обусловлена основной массой сухого воздуха. Относительная влажность воздуха у поверхности земли оказывает существенное влияние на распределение облачности в атмосфере.

Для построения теории плотного облака необходимо учитывать фазовые превращения атмосферной влаги. Выделение и поглощение теплоты при фазовых переходах существенным образом влияют на гидродинамические характеристики.

1. Нижняя граница облачности

Положение нижней границы облачности соответствует уровню конденсации водяного пара в атмосфере. Для заданного профиля температуры $T(z)$ можно найти профиль давления насыщенного пара $E_s(z)$, используя формулу Клапейрона–Клаузиуса [3]:

$$E_s = E_{s0} e^{\frac{L}{R_w} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}, \quad (1)$$

здесь E_{s0} — давление насыщенного пара на уровне поверхности океана; L — скрытая теплота конденсации водяного пара; R_w — газовая константа водяного пара; T_0 — температура поверхности океана. Считаем водяной пар идеальным газом с уравнением состояния:

$$E = q\rho R_w T, \quad (2)$$

q — относительная влажность насыщенного водяного пара.

Поскольку атмосферное давление на высоте 10 м над уровнем океана находится в состоянии, близком к состоянию конвекции, можно считать, что в этом слое имеет место адиабатический профиль термодинамических параметров. Относительная влажность в подоблачном ненасыщенном воздухе, можно считать, не зависит от высоты $r(z) = \text{const}$. тогда распределение плотности водяного пара в подоблачном слое можно представить в виде

$$E(z) = r q_0 \rho_0 R_w T(z) = r q_0 \rho_0 R_w T_0 \left(1 - \frac{g}{c_p T_0} z \right)^{\frac{c_v}{R} + 1}. \quad (3)$$

Приравнявая выражения (1) и (3), получаем уравнение для определения высоты конденсации для данной величины приводного значения относительной влажности воздуха

$$r q_0 \rho_0 R_w T_0 \left(1 - \frac{g}{c_p T_0} z \right)^{\frac{c_v}{R} + 1} = E_{s0} e^{\frac{L}{R_w} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно упростить с помощью уравнения состояния водяного пара $E_0 = q_0 \rho_0 R_w T_0$ и ввести новую независимую переменную $t = 1 - \left(g z / c_p T_0 \right)$. Тогда уравнение (4) для определения параметра принимает вид

$$r t^{\frac{c_v}{R} + 1} = e^{\frac{L}{R_w T_0} \left(1 - \frac{1}{t} \right)}. \quad (5)$$

В пределах тропосферы параметр t близок к единице, поэтому удобно ввести новый параметр: $\varepsilon = 1 - t$. Уравнение (4) в терминах малого параметра $\varepsilon \ll 1$ переписывается в виде

$$\ln r^{-1} - \alpha \varepsilon + \frac{c_p}{R} \left(-\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{6} - \dots \right) = 0, \quad (6)$$

где $\alpha = \frac{L}{R_w T_0} - \ln r - \frac{c_p}{R} = 13,2$.

Решение этого уравнения в простейшем (линейном) случае принимает вид

$$\varepsilon = \frac{\ln r^{-1}}{\alpha}. \quad (7)$$

В квадратичном случае решение уравнения (6) может быть представлено как

$$\varepsilon = \frac{R}{c_p} \left(\sqrt{(\alpha)^2 - 2 \frac{c_p}{R} \ln r^{-1}} - \alpha \right) \quad (8)$$

Таким образом, высота точки росы (то есть высота конденсации атмосферной влаги) h_c определяется как

$$h_c = \frac{c_p T_0 \varepsilon}{g}. \quad (9)$$

Соответствующее значение температуры T^* , плотности насыщенного пара q^* и других термодинамических параметров может быть найдено из их адиабатических профилей, что хорошо соответствует данным наблюдений [4, 5].

2. Термодинамика насыщенного влажного воздуха в облаке

При построении модели стационарного облака достаточно ограничиться моделью смеси двух идеальных газов, однако необходимо учитывать, что процесс конденсации пара и сопутствующее выделение тепла внутри облака существенно влияют на термодинамические характеристики смеси воздух – пар.

Смесь сухого воздуха и водяного пара может быть описана пятью термодинамическими параметрами: P, ρ, T, q, E . Порция тепла dQ в объёме воздуха включает: увеличение внутренней энергии $dU = C_v dT$, работу над газом и увеличение количества пара Ldq (L — скрытая теплота конденсации). Таким образом, закон сохранения энергии можно записать следующим образом:

$$dQ = TdS = C_v dT + PdV + Ldq.$$

Уравнения для адиабатических градиентов температуры и влажности принимают вид

$$\Gamma_a = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = -\frac{g}{RT} \frac{\frac{R}{C_p} + \frac{Lq}{C_p T}}{1 + \frac{L^2 q}{C_p R_w T^2}}, \quad (10)$$

$$\Gamma_q = \frac{1}{q} \frac{dq}{dz} = -\frac{g}{RT} \frac{\frac{R}{R_w} \frac{L}{C_p T} - 1}{1 + \frac{L^2 q}{C_p R_w T^2}}. \quad (11)$$

Уравнения для остальных градиентов термодинамических параметров принимают вид

$$\Gamma_P = \frac{1}{P} \frac{dP}{dz} = -\frac{g}{RT}, \quad \Gamma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{g}{c^2}, \quad \Gamma_E = \frac{1}{E} \frac{dE}{dz} = \frac{L}{R_w T} \Gamma_a. \quad (12)$$

Легко видеть, что уравнения (10), (11) представляют собой систему уравнений, а остальные соотношения позволяют получить вертикальные распределения остальных термодинамических параметров, если распределения температуры и влажности определены.

Уравнения (10)–(12) являются стационарной частью уравнений Навье–Стокса. Учёт производных по времени позволяет рассмотреть конвекцию в облаке. Для исследования конвекции во влажном воздухе достаточно ограничиться линейным и свободным членами по инкременту неустойчивости Γ . Введём также параметр γ — превышение вертикального профиля температуры над адиабатическим. В случае небольшой толщины насыщенного водяным паром слоя атмосферы

h_{Ra} , когда можно пренебречь уменьшением давления с высотой $h_{\text{Ra}}\gamma \ll 1$, инкремент конвективной неустойчивости определится следующим образом:

$$\Gamma = \frac{|\gamma| g k_{\perp}^2 - \nu \chi K^6 / \left(1 + \frac{L^2 q}{C_p R_W T^2} \right)}{\left(\nu + \chi / \left(1 + \frac{L^2 q}{C_p R_W T^2} \right) \right) K^4},$$

где K — волновое число; k_{\perp} — горизонтальное волновое число.

Начало неустойчивости соответствует обращению инкремента в нуль и характеризуется для данных граничных условий решением соответствующей краевой задачи (волновые числа и координаты обезразмериваем в соответствии с толщиной слоя h_{Ra}):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_{\perp}^2 \right)^3 \varphi + a \frac{|\gamma| g h^4}{\nu \chi} k_{\perp}^2 \varphi = 0. \quad (13)$$

Краевая задача (13) вполне аналогична задаче о «сухой» конвекции и в случае, например, свободных граничных условий приводит к соотношению

$$\left(1 + \frac{L^2 q}{C_p R_W T^2} \right) \frac{|\gamma| g h^4}{\nu \chi} = \frac{27}{4} \pi^4. \quad (14)$$

Таким образом, критическое значение величины, обычно понимаемой как число Рэлея — $\text{Ra} = |\gamma| g h^4 / \nu \chi$, для «влажной» конвекции уменьшается в $1 + \frac{L^2 q}{C_p R_W T^2}$ раз по сравнению с «сухой» конвекцией

$$\text{Ra}_w = \frac{1}{1 + \frac{L^2 q}{C_p R_W T^2}} \frac{27}{4} \pi^4. \quad (15)$$

Очевидно, что при любых других граничных условиях число Рэлея для насыщенного влажного воздуха Ra_w также окажется пониженным на величину $1 + \frac{L^2 q}{C_p R_W T^2}$ по сравнению с соответствующим «эталонным» числом Рэлея — Ra_0 , определяемым краевой задачей (13):

$$\text{Ra}_w = \frac{1}{1 + \frac{L^2 q}{C_p R_W T^2}} \text{Ra}_0. \quad (16)$$

Понижение критического числа Рэлея для конвекции в слое воздуха, насыщенного водяным паром, по сравнению с конвекцией в слое сухого воздуха, очевидно, связано с наличием градиента влажности, необходимого для поддержания состояния насыщения в воздухе. Выделение скрытой теплоты конденсации приводит к понижению порогового значения градиента температуры $|\gamma|$, необходимого для возникновения неустойчивости.

3. Рост облака за счёт испарения над морем

Определим скорость роста толщины облака, используя уравнение переноса:

$$\partial q / \partial t + \partial j / \partial z = 0, \quad (17)$$

где поток пара $j = -D \partial q / \partial z$.

Если коэффициент D зависит от координат $D = D(z)$, то уравнение принимает вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} D(z) \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (18)$$

Выражение для потока можно тогда записать в виде

$$j(z) = k(z)(n(z) - q(z)), \quad n(z) < q(z), \quad k = D/\Delta z,$$

где $n(z)$ — распределение пара в сухом воздухе над облаком; $q(z)$ — распределение пара в насыщенном влажном воздухе в самом облаке, под его верхней границей.

Проинтегрируем уравнение переноса по вертикальной координате от нижней границы облака h_c до верхней:

$$\int_{h_c}^H \frac{dq}{dt} dz = - \int_{h_c}^H \frac{dj(z)}{dz} dz.$$

Уравнение переноса принимает вид

$$q(H) \frac{\partial H}{\partial t} = -k(H)(n(H) - q(H)). \quad (19)$$

Формула (19) представляет собой дифференциальное уравнение, в результате интегрирования которого получается соотношение для времени развития облачной структуры как функции её высоты:

$$t = \int_{h_c}^H \frac{q(H) dH}{k(H)(q(H) - n(H))}. \quad (20)$$

Различие температур на верхней границе облака выходит на стационар, и, таким образом, параметр k перестаёт зависеть от высоты, а количество плотности пара в надоблачном слое становится существенно меньше плотности пара в облаке.

На верхней границе облака происходит интенсивная конвекция, поскольку температура облака гораздо выше температуры над облаком, куда еще не дошло влияние пара. Используя упрощенное выражение для числа Рэлея $Ra = g\gamma h^4 / \nu_T^2$, где $\gamma = \beta \Delta T / h$, получим выражение для толщины слоя конвекции h :

$$h = \sqrt[3]{\frac{Ra \nu_T^2}{g\beta \Delta T}}. \quad (21)$$

$$\text{Здесь } \beta = 1/273 \text{ K}, \quad \Delta T(z) = T_n(z) - T_q(z).$$

Параметр $k(z)$, входящий в соотношение (13), выражается через коэффициент турбулентной вязкости как $k = \nu_T / h$. Таким образом, получаем формулу для параметра $k(z)$, выраженную через данные конвекции:

$$k(z) = \sqrt[3]{\frac{g\beta \Delta T(z) \nu_T}{Ra}}. \quad (22)$$

Заключение

В работе построена модель движения верхней границы облака над океаном. При построении модели стационарного облака сухой воздух и водяной пар учитывался в виде смеси двух идеальных газов, однако принимается во внимание, что конденсация пара и сопутствующее выделение тепла внутри облака существенно влияют на термодинамические характеристики смеси воздух – пар.

Уравнение переноса пара на границе с учетом конвекции на границе облака с надоблачным слоем может быть проинтегрировано, поскольку известно вертикальные распределения всех термодинамических параметров в облачном слое (которые изменяются в зависимости от того, до ка-

кой высоты передвинулась граница). В результате интегрирования уравнения переноса получается формула для времени развития облачной структуры как функции её высоты.

При определении структуры облака предполагается, что в толще облака термодинамические параметры имеют адиабатическое распределение, а если оно нарушается, то быстро исправляется конвекцией. Адиабатические распределения термодинамических параметров в поле силы тяжести могут быть вычислены на основе уравнения теплового баланса системы, термодинамических соотношений и уравнения статики. Таким образом, в облачном слое получаются вертикальные распределения всех термодинамических параметров насыщенного влажного воздуха. Задавая параметры, можно получить неустойчивый профиль температуры, при этом в задаче будет содержаться информация о конвективной неустойчивости в насыщенном влажном воздухе. При рассмотрении этого элемента задачи получено также число Рэлея для конвекции с учётом термодинамики фазовых переходов влаги, зависящее от количества насыщенного пара.

Литература

1. Голицын Г.С. Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями. Л.: Гидрометеоздат, 1980. С. 47.
2. Хаин А.П., Сутырин Г.Г. Тропические циклоны и их взаимодействие с океаном. Л.: Гидрометеоздат, 1983. С. 15.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
4. Атмосфера: справочник / Под ред. Ю.С. Седунова. Л.: Гидрометеоздат, 1991. С. 17.
5. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы. СПб.: Гидрометеоздат, 2000. С. 375.