

Формирование хобота смерча из материнского облака

М.В. Заволженский¹, Руткевич Б.П.²

¹ *Институт водных проблем РАН, Южный отдел
344098, Ростов-на-Дону, Стачки пр., 198*

² *Институт космических исследований РАН
117977, Москва, ул. Профсоюзная, 84/32
E-mail: peter_home@tarusa.ru*

Идея, что природа смерча конвективна, обсуждалась в 70–80-х гг. прошлого столетия. Термин «конвекция» часто фигурировал в обзорах и исследованиях торнадо, и в теории смерча родилась идея локальной ячейки Бенара, гидротермодинамические характеристики которой исчезают с удалением от оси. Дальнейшие исследования показали, что конвективные процессы приоритетны только в начальной стадии возникновения и развития торнадо.

При перемещении мощных облачных в атмосфере нижняя и верхняя граница слоя, как правило, находятся в разных температурных условиях. Нередко нижняя граница слоя оказывается теплее верхней. Сохранить устойчивость положения равновесия без возникновения конвективного течения жидкости такой слой может только при линейном изменении температуры по его толщине:

$T'_1 = -\frac{\vartheta' z'}{h}$ и только при малых значениях градиента температуры ($\vartheta' > 0$) [1, 2]. Здесь z' —

вертикальная координата цилиндрической системы (r', φ, z') с полюсом на невозмущённой нижней границе $z' = 0$ слоя и осью Oz , направленной против силы тяжести, h — толщина слоя в положении равновесия, ϑ' — перепад температуры между верхней и нижней его границами. Облака в атмосфере или массу воды в океане моделируем слоем $0 \leq z' \leq h, 0 \leq r' < \infty$ тяжёлой вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω' вокруг неподвижной оси Oz . При образовании смерчей угловая скорость ω' определяется возможной начальной закруткой материнского облака и горизонтальным градиентом скорости в сдвиговом или встречном воздушном течении.

Для простоты допустим, что взаимодействие слоя с окружающей средой происходит без трения. Тогда на подлежащих определению нижней (ζ'_1) и верхней (ζ'_2) границах слоя касательные напряжения отсутствуют, а нормальные постоянны и равны взятым с обратным знаком давлению на слой со стороны окружающей среды. В таком случае течение в слое описывается такой системой уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' + 2\omega' \times \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla (p' - p_1 + \rho g z') - \beta T' \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}', \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad \rho c \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla T' \right) = \lambda \nabla^2 T', \quad \mathbf{v}' = \{v_r, v_\varphi, v_z\},$$

$$p_{m1} = -p_{j1}, \quad p_{m2} = p_{ns} = 0, \quad T' = \vartheta'_j, \quad \frac{\partial \zeta'_j}{\partial t'} + \mathbf{v}' \cdot \nabla \zeta'_j = v_z, \quad (z' = \zeta'_j),$$

$$p_2 = p_1 + \rho g h \left(1 + \frac{1}{2} \beta \vartheta' \right), \quad \vartheta'_1 = 0, \quad \vartheta'_2 = \vartheta', \quad \mathbf{v}' = 0, \quad T' = T'_0, \quad (r' = \infty),$$

($j = 1, 2$) \mathbf{n}, \mathbf{s} и $\boldsymbol{\tau}$ — нормаль и два взаимно перпендикулярных касательных направления к границам ζ'_1 и ζ'_2 слоя. Исчезновение скорости и соответствующее поведение температуры на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) вытекает из предположения о локальном характере течения в слое. Кроме этого, искомые характеристики течения — периодические функции азимута φ с периодом 2π . Входя-

щие в условия задачи (1) коэффициенты: вязкость ν , плотность ρ , удельная теплоёмкость c , теплопроводность λ , коэффициент термического расширения β жидкости в слое, ускорение силы тяжести \mathbf{g} и давление у нижней границы слоя (p_1) постоянны.

Перейдём в системе (1) к безразмерным переменным:

$$\{v_r, v_\varphi, v_z\} = \frac{\nu \varepsilon}{h} \{u, v, w\}, \quad p' = p'_1 + \frac{\rho \nu^2 \varepsilon}{h^2} p, \quad \varepsilon = \frac{\nu^2}{gh^3}, \quad \gamma = \frac{\rho \nu c}{\lambda}, \quad (2)$$

$$T' = T'_1 + \frac{\varepsilon^2}{\beta} T, \quad \zeta'_1 = \varepsilon^2 h \zeta_1, \quad \zeta'_2 = h(1 + \varepsilon^2 \zeta_2), \quad r = \frac{r'}{h} s, \quad t = \frac{\nu t'}{h^2} \sigma,$$

$$p'_1 = p_1 - \rho g z' - \frac{\rho g \beta \vartheta'}{2h} z'^2, \quad T'_1 = -\frac{\vartheta'}{h} z', \quad \vartheta = \frac{\rho g \beta \vartheta' c}{\lambda \nu} h^3, \quad \omega = \frac{2\omega' h^2}{\nu}.$$

Величины p'_1 и T' определяют равновесное состояние слоя в отсутствие конвективных токов ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\zeta'_1 = 0$, $\zeta'_2 = h$). Безразмерный параметр s — аналог волнового числа пространственно-периодического течения.

Параметр σ и остальные характеристики рассматриваемого течения ищем в виде рядов по целым положительным степеням параметра ε . Ограничимся исследованием спектральной задачи нулевого приближения. Соответствующая система уравнений и граничных условий получается после подстановки (2) в условия задачи (1), разложения граничных условий в ряды по степеням ε ζ_j на верхней и нижней границы слоя ($j = 1, 2$) и отбрасывания величин порядка $O(\varepsilon)$:

$$\sigma \gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \vartheta w, \quad \sigma \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{k} T, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \{u, v, w\},$$

$$w = T = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \zeta_j = p - 2 \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (z = 0, 1; j = 1, 2), \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 0, \quad (r = \infty). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{k} = \{0, 0, 1\}$ — единичный орт оси Oz . Параметр s входит в коэффициенты оператора Гамильтона ∇ перед производными по r и φ .

Задача (3) решается методом разделения переменных. Полагаем

$$(u, v, w, p, T(r, \varphi, z, t), \zeta_j(r, \varphi, t)) = (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}, \tilde{P}, \tilde{\Theta}(r, z), Z_j(r)) e^{im\varphi + t}, \quad (4)$$

$$j = 1, 2; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

После подстановки (4) в уравнения и граничные условия (3) и сокращения на $\exp(im\varphi + t)$ умножим азимутальное уравнение на i и сложим и вычтем из радиального. Уравнение неразрывности преобразуем таким образом, чтобы к нему был применим аппарат теории цилиндрических функций. В результате для определения помеченных тильдой (\sim) величин получим такую краевую задачу:

$$(L_m - \sigma \gamma) \tilde{\Theta} + \vartheta \tilde{W} = 0, \quad (L_m - \sigma) \tilde{W} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + \tilde{\Theta} = 0, \quad (5)$$

$$[L_{m \pm 1} - (\sigma \pm i \omega)] (\tilde{U} \pm i \tilde{V}) = \ell_{\mp m} \tilde{P}, \quad L_k = s^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\ell_{1+m} (\tilde{U} + i \tilde{V}) + \ell_{1-m} (\tilde{U} - i \tilde{V}) + 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} = 0, \quad \ell_k = s \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k}{r} \right),$$

$$\tilde{W} = \tilde{\Theta} = \frac{\partial (\tilde{U} \pm i \tilde{V})}{\partial z} = 0, \quad \tilde{Z}_j = \tilde{P} - 2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z}, \quad (z = 0, 1; j = 1, 2),$$

$$\tilde{U} \pm i \tilde{V} = \tilde{W} = \tilde{\Theta} = \tilde{P} = \tilde{Z}_j = 0, \quad (r = \infty).$$

Из рекуррентных соотношений для функций Бесселя выводим дифференциальное соотношение, содержащее оператор ℓ_k :

$$\ell_{\mp m} J_m(r) = s J_{m\pm 1}(r).$$

Поэтому

$$\tilde{U} + i\tilde{V} = U(z) J_{m+1}(r), \quad \tilde{U} - i\tilde{V} = V(z) J_{m-1}(r), \quad (6)$$

$$(\tilde{\Theta}, \tilde{W}, \tilde{P}(z, t), \tilde{Z}_j(r)) = (\Theta, W, P(z), Z_j) J_m(r), \quad j = 1, 2.$$

Возмущения (4), (6) в дальнейшем называем вихревыми. Введём выражения (6) в уравнения (5). Тогда для коэффициентов перед цилиндрическими функциями в формулах (6) из уравнений (5) получим такие уравнения и граничные условия (штрихом обозначена производная по z):

$$(L - \gamma\sigma)\Theta + \vartheta W = 0, \quad (L - \sigma)W + \Theta = P', \quad L = \frac{d^2}{dz^2} - s^2, \quad (7)$$

$$(L - \sigma - i\omega)U = -sP, \quad (L - \sigma + i\omega)V = sP, \quad U - V = -\frac{2}{s}W',$$

$$W = \Theta = U' = V' = 0, \quad Z_j = P - 2W' \quad (z = 0, 1; \quad j = 1, 2).$$

Из уравнений (7) входящие в формулы (6) коэффициенты перед функциями Бесселя последовательно выражаются через W :

$$(L - \sigma)(U + V) = -\frac{2i\omega}{s}, \quad U - V = -\frac{2}{s}W', \quad (8)$$

$$P = \frac{1}{s^2}(L - \sigma)W' + \frac{i\omega}{2s}(U + V), \quad \Theta = P' - (L - \sigma)W,$$

а сама функция W является решением граничной задачи

$$\left[L(L - \sigma\gamma)(L - \sigma)^2 + \omega^2(L - \sigma\gamma)\frac{d^2}{dz^2} + s^2\vartheta(L - \sigma) \right] W = 0,$$

$$W = W'' = W^{IV} = W^{VI} = 0, \quad (z = 0, 1).$$

Решение последней задачи аналогично известному в теории эффекта Бенара [1, 2]:

$$W = A \sin k\pi z, \quad k = \pm 1, \pm 2. \quad (9)$$

Числа k связаны с параметрами ω , s , ϑ и σ уравнением

$$S\gamma\sigma^3 + S^2(2\gamma + 1)\sigma^2 + \left[S^3(\gamma + 1) + k^2\pi^2\omega^2(\gamma - 1) - \frac{\xi}{S} \right] \sigma = \xi, \quad (10)$$

$$\xi = S(s^2\vartheta - S^3 - k^2\pi^2\omega^2), \quad S = k^2\pi^2 + s^2.$$

Связь амплитуды A с поправками на параметр σ в его разложении по ε должна выясняться из условий разрешимости линейных неоднородных граничных задач следующих после спектрального приближения.

Подставим функцию (9) в уравнения (8) и найдём функции U , V , P и Θ . Их значения введём в формулы (6) и (4). Тогда искомые характеристики локального конвективного течения в слое жидкости совпадут с действительными и мнимыми частями выражений ($S = k^2\pi^2 + s^2$)

$$u = \frac{Ak\pi}{s} \left[J'_m(r) + \frac{im\omega}{r(S + \sigma)} J_m(r) \right] e^{\sigma\tau + im\varphi} \cos k\pi z, \quad w = AJ_m(r) e^{\sigma\tau + im\varphi} \sin k\pi z,$$

$$v = \frac{Ak\pi}{s} \left[\frac{im}{r} J_m(r) - \frac{\omega}{S + \sigma} J'_m(r) \right] e^{\sigma\tau + im\varphi} \cos k\pi z, \quad T = \frac{A\vartheta \sin k\pi z}{S + \sigma\gamma} J_m(r) e^{\sigma\tau + im\varphi},$$

$$p = -\frac{Ak\pi \cos k\pi z}{s^2(S+\sigma)} \left[(S+\sigma)^2 + \omega^2 \right] J_m(r) e^{\sigma\tau + im\varphi}, \quad \tau = \frac{vt'}{h^2}, \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (11)$$

$$\zeta_1 = -Ak\pi \left[2 + \frac{(S+\sigma)^2 + \omega^2}{s^2(S+\sigma)} \right] J_m(r) e^{\sigma\tau + im\varphi}, \quad \zeta_2 = (-1)^k \zeta_1, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Закрученность течения (11) описывается его нулевой модой

$$v_0 = \frac{Ak\pi\omega}{s(k^2\pi^2 + s^2 + \sigma)} J_1(r) e^{\sigma\tau} \cos k\pi z, \quad u_0 = -\frac{Ak\pi}{s} J_1(r) e^{\sigma\tau} \cos k\pi z \quad (12)$$

$$w_0 = AJ_0(r) e^{\sigma\tau} \sin k\pi z, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Проекции линий тока в нулевой моде на плоскость $z = \text{const}$ — спирали

$$r = C \exp\left(-\left(k^2\pi^2 + s^2\right)\frac{\varphi}{\omega}\right).$$

Известна фотография внутренней полости смерча (рис. 1, [3]), подтверждающая спиральный характер течения в вихре.

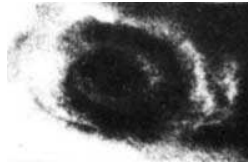


Рис. 1. Внутренняя полость смерча

Из формул (10) следует, что критическое число Рэлея ϑ , характеризующее границу монотонной неустойчивости равновесного состояния слоя равно минимуму следующей функции по параметру s :

$$\vartheta_1(s, \omega) = \frac{(k^2\pi^2 + s^2)^3 + \omega^2 k^2 \pi^2}{s^2}$$

При $\omega = 0$ минимум функции $\vartheta_1(s, \omega)$ известен из теории эффекта Бенара [1, 2]:

$$\min_s \vartheta_1(s, 0) = \vartheta^* = \frac{27\pi^4}{4} = 657,5 \text{ и достигается при } s^*(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2,2.$$

При $\omega > 0$ функции $\min_s \vartheta_1(s, \omega) > \vartheta^*$ и $s^*(\omega) > s^*(0)$ монотонно возрастают по ω . По-

этому вращение оказывает стабилизирующее влияние на течение жидкости: потеря устойчивости равновесного состояния во вращающемся слое в форме локального закрученного течения (11) происходит при больших числах Рэлея, чем в слое незакрученном. Этот факт является обобщением на случай вихревых возмущений вида (4), (6) результата о том, что вращение оказывает стабилизирующее влияние на жидкость по отношению к традиционным пространственно-периодическим возмущениям вида $\{v_x, v_y, v_z\} \sim \exp(imx + iny + t)$.

Гидротермо-характеристики течения (11), (12) исчезают с ростом расстояния от оси ($r \rightarrow \infty$). Нулевая мода $m = 0$ в формуле (12) носит вихревой характер винтового течения с осью Oz . Моды $m \neq 0$ определяют $2m$ вихревых возмущений нулевой моды с осями, параллельными Oz . По формуле (2) $r = r's/h$.

При $s \rightarrow \infty$ течение (11) (в которых номер моды m не возрастает) и (12) представляет собой вихрь, резко локализованный в окрестности своей оси. Нулевая мода функции ζ_1 при $Ak < 0$ деформирует нижнюю границу слоя, образуя столб по оси (осевая струя торнадо), соответствующий

максимальному значению функции $J_0(0)$, и окружающую столб хобот (воронку смерча) (рис. 2). Это — типичные признаки любого торнадо.

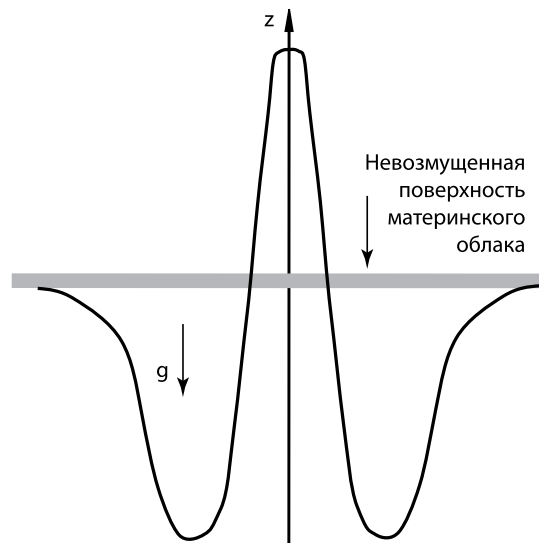


Рис. 2. Начальная стадия воронки торнадо

Если $Ak > 0$ при чётном k , то мода $m = 0$ функции ζ_2 в соотношениях (11) деформирует верхнюю границу слоя в виде конического углубления течения. Такие деформации стимулируют воронки конвективной природы на поверхности воды (рис. 3).



Рис. 3. Воронка конвективной природы

Дисперсионные уравнения (10) в случае вихревых и пространственно-периодических возмущений по форме фактически одинаковы. Для получения из уравнения (10) дисперсионного уравнения, соответствующего пространственно-периодическим возмущениям, достаточно в уравнении (10) заменить s на модуль волнового вектора $a = \sqrt{m^2 + n^2}$ нормальных возмущений. Поэтому свойства спектра частот вихревых возмущений (11) аналогичны свойствам спектра частот пространственно-периодических возмущений и могут быть получены заменой $m^2 + n^2 = s^2$. Так, критическое число Рэлея колебательной неустойчивости основной моды $k = 1$ вихревого течения (11) равно

$$\vartheta_2 = \frac{2(1+\gamma)}{s^2} \left[(\pi^2 + s^2)^3 + \frac{\pi^2 \gamma^2}{(1+\gamma)^2} \omega^2 \right].$$

Однотипность дисперсионных уравнений (10) в случае вихревых и пространственно-периодических возмущений означает, что реализация того или иного вида возмущений определяется не температурным режимом в слое и не физическими свойствами жидкости, а волновыми числами m , n и s возмущений.

Если параметр s вихревых возмущений совпадает с модулем волнового вектора a пространственно-периодических возмущений, то оба возмущения равновероятны. Если $s \neq a$, то возникновение вихревого или пространственно-периодического течения обусловлено большей величиной инкремента роста соответствующих возмущений. Сама величина инкремента зависит от положения па-

раметров s и a на шкале волновых чисел. Ограничимся, для простоты, случаем не вращающегося слоя ($\omega = 0$). Тогда инкремент основной и наиболее опасной моды $k = 1$ вихревых возмущений (11) равен

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^2 (\pi^2 + s^2)^2 + \frac{\vartheta s^2}{\gamma(\pi^2 + s^2)} - \frac{\gamma+1}{2\gamma}(\pi^2 + s^2)}. \quad (13)$$

Инкремент пространственно-периодических возмущений получим из формулы (13) заменой $s^2 = a^2 = m^2 + n^2$. Исследование ограничим большими значениями чисел Рэлея $\vartheta \gg 1$. Асимптотика значений параметра s , при котором инкремент (13) равен нулю, имеет вид:

$$s = s_1 = \frac{\pi^3}{\sqrt{\vartheta}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\right) \right], \quad s = s_2 = \sqrt[4]{\vartheta} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\right) \right].$$

Инкремент σ максимален при

$$s = s^* = \sqrt[8]{\frac{\pi^4 \gamma \vartheta}{(\gamma+1)^2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\vartheta}}\right) \right].$$

Если $s_1 < s < s^*$, то инкремент вихревых возмущений монотонно возрастает по s . Поэтому для того, чтобы при $s_1 < s < s^*$ вихревые течения преобладали над пространственно периодическими, достаточно, чтобы параметр s вихревых возмущений превосходил модуль a волнового вектора пространственно-периодических возмущений ($s > a$). При $s^* < s < s_2$ инкремент (13) монотонно убывает по s . В этом случае для возникновения локального вихревого течения достаточно, чтобы параметр s вихревых возмущений был меньше модуля a волнового вектора пространственно-периодических возмущений ($s < a$).

Тот факт, что вихревые возмущения типа торнадо при конвекции в лабораторных экспериментах встречаются реже, чем валиковая или гексагональная формы потери устойчивости, объясняется тем, что, как следует из только что приведённых рассуждений и оценок, в начальной стадии возникновения конвективного течения при $s_1 < s < s^*$, слой более чувствителен к пространственно-периодическим возмущениям, которые, к тому же, в лабораторных условиях типичнее вихревых. С увеличением s (при $s^* < s < s_2$) слой приобретает большую чувствительность к вихревым возмущениям. Вихри типа торнадо являются типичными образованиями, отличными от пространственно периодических, так как они исчезают с удалением от оси. Их порождают соответствующие возмущения в атмосфере: начальная закрутка материнского облака, сдвиговые течения воздуха, эффект Кориолиса, неустойчивость вертикального незакрученного течения и т. п. — возмущения, которые не обладают свойством пространственной периодичности. В таких условиях, несмотря на однотипность дисперсионных соотношений, вихревая форма потери устойчивости вероятнее пространственно-периодической, так как волновые вектора a пространственно-периодической структуры течения либо отсутствуют вовсе, либо «подавляются» большей чувствительностью слоя к более сильным вихревым возмущениям ($s < a$, $s^* < s < s_2$ — в этом случае, напомним, инкремент возмущений монотонно убывает по s , так что увеличение параметра $s < a$ понижает инкремент, а вместе с ним и величину возмущения).

Таким образом, уже модель начальной конвективной стадии развития торнадо описывает многие явления, как постоянные, свойственные большинству смерчей.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М: Гостехиздат, 1954. 795 с.
2. Гершуни Г.С., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Наливкин Д.В. Ураганы, бури, смерчи. Л.: Наука, 1969.