

Гидродинамическая неустойчивость, обусловленная вращением и вязкостью

П.Б. Руткевич, П.П. Руткевич

Институт космических исследований РАН

117977, Москва, ул. Профсоюзная, 84/32

E-mail: peter_home@tarusa.ru

В работе описывается некоторая неустойчивость в атмосфере типа тонкого (верёвочного) смерча, отличная от конвективной неустойчивости. Новая неустойчивость проявляется в атмосфере Земли при выполнении определенных условий, в частности при наличии вращения и сил вязкости. Неустойчивость имеет колебательный характер. Это означает, что рост возмущения на линейном этапе её развития сопровождается колебаниями с частотой, сравнимой с инкрементом неустойчивости. На нелинейном этапе колебания в рассмотренных в работе случаях подавляются. Существование таких устойчивых образований в атмосфере как торнадо и тайфун означает, что должна существовать некоторая неустойчивость, обуславливающая возникновение этих явлений. Однако хорошо известно, что на настоящий момент в гидродинамике (в изначально неподвижном воздухе) известна только одна неустойчивость — конвекция, но она не в силах объяснить наблюдаемые явления и, по нашему мнению, эта новая неустойчивость может быть ответственна за формирование этих структур. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 06-05-64275-а).

Хорошо известно, что в атмосфере Земли существуют такие вихревые явления как торнадо и тайфун. Эти явления наносят существенный ущерб народному хозяйству. На данный момент накоплен огромный экспериментальный материал по этим явлениям, однако теории пока не построено.

Существование в атмосфере таких устойчивых стабильных образований как торнадо и тайфун означает, что должна существовать некоторая неустойчивость, благодаря которой эти явления возникают. На настоящий момент в гидродинамике известна только одна неустойчивость — конвекция, но она не может объяснить наблюдаемые явления.

В настоящей работе мы описываем новую неустойчивость в атмосфере, и, как нам кажется, именно эта неустойчивость отвечает за возникновение смерча и тайфуна, а возможно, и чего-то ещё.

Смерч представляет собой вращающееся воронкообразное облако, которое протягивается к земле от основания грозового облака. Часто смерч может не достигать земли, или коснуться ее и вновь подняться. Смерчи могут возникать группами по два и более. Несмотря на сравнительно небольшие размеры, смерчи относятся к наиболее опасным атмосферным явлениям.

Вопросам теоретического моделирования смерча посвящено много работ (см., например: [1]). Отметим работу [2], в которой рассматривались вопросы выдавливания столба из тяжёлой жидкости под действием касательной трансверсальной нагрузки, близкой к сосредоточенному вихрю, а также потери устойчивости равновесного состояния вращающегося слоя вязкой жидкости, подверженного температурной инверсии.

По нашему мнению, явление колонны или хобота смерча представляет собой отклик устойчиво стратифицированного подоблачного слоя атмосферы на вертикальные движения воздуха в толще вращающегося грозового облака, которые регистрируются доплеровскими радаром. Считается, что такие вертикальные движения обусловлены струйным течением верхних слоев атмосферы. В работах [3, 4] была рассмотрена задача о стационарной вихревой структуре типа смерча в линейном приближении. Её развитие происходит в результате внутренних процессов в облаке и в рассматриваемой задаче считается внешним воздействием, приводящим к формированию соответствующих граничных условий на нижней границе облака. Таким образом, математически задача сводится к исследованию уравнений гидродинамики для устойчиво стратифицированного подоблачного слоя атмосферы с неоднородными граничными условиями на его верхней границе. Скорость вращения структуры оказывается обратно пропорциональной вязкости, поэтому торои-

дальняя компонента поля скорости в случае воздуха, характеризующегося малыми значениями вязкости, оказывается доминирующей.

Под неустойчивостью понимают взаимодействие двух полей, входящих в обратную связь [5], т. е., когда наличие одного поля в задаче приводит к нарастанию второго поля, а наличие второго поля приводит к усилению первого. Математически это описывается уравнениями

$$\begin{cases} y_1'(t) = a y_2(t), \\ y_2'(t) = b y_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

приводящими к одному уравнению второго порядка

$$y''(t) - ab y(t) = 0. \quad (2)$$

Решение этого уравнения, очевидно, имеет вид

$$y_{1,2}(t) = y_0 e^{\sqrt{ab}t} \quad (3)$$

и описывает неустойчивость с инкрементом \sqrt{ab} . В случае конвективной неустойчивости полями, вступающими в положительную обратную связь, оказываются температура и полоидальное поле скорости жидкости. Инкремент зависит от вертикального градиента профиля температуры, который может быть как положительным, так и отрицательным, обуславливая внутреннюю волну или конвективную неустойчивость.

В случае взаимодействия трех полей также может сложиться ситуация, когда наличие одного поля приводит к нарастанию второго поля, наличие второго поля приводит к усилению третьего, а наличие третьего поля приводит к усилению первого.

Неустойчивость тогда описывается тремя уравнениями, которые входят в более сложную обратную связь:

$$\begin{cases} y_1'(t) = a y_2(t), \\ y_2'(t) = b y_3(t), \\ y_3'(t) = c y_1(t). \end{cases} \quad (4)$$

Эту систему можно привести к одному уравнению третьего порядка:

$$y'''(t) - abc y(t) = 0, \quad (5)$$

которое в простейшем случае описывало бы неустойчивость с инкрементом $\sqrt[3]{abc}$.

Хорошо известно, что в случае атмосферной гидродинамики задача о неустойчивости с взаимодействием двух полей есть задача о конвекции, где роль взаимодействующих полей играют температура и полоидальное поле скорости движения воздуха. Хорошо известно также, что третье поле скорости, которое можно ввести в рассмотрение более сложной задачи и рассмотреть неустойчивость для трёх полей, есть тороидальное поле скорости (потенциальное поле скорости и второе термодинамическое поле выпадают из задачи в пределе несжимаемой жидкости). Таким образом, единственная возможность усложнить задачу о неустойчивости (обнаружить новую неустойчивость) — это учесть тороидальное поле. Однако параметры атмосферной гидродинамики таковы, что тороидальное поле скорости входит в задачу (на её линейном этапе) за счёт силы Кориолиса, и основное уравнение типа (5) имеет вид

$$y'''(t) + abc y(t) = 0. \quad (6)$$

Его решение имеет вид

$$y_1(t) = y_0 e^{-\sqrt[3]{abc}t}, \quad (7)$$

$$y_2(t) = y_{02} e^{\sqrt[3]{abc} \cos(\pi/3)t + i\sqrt[3]{abc} \sin(\pi/3)t}, \quad (8)$$

$$y_3(t) = y_{03} e^{\sqrt[3]{abc} \cos(\pi/3)t - i\sqrt[3]{abc} \sin(\pi/3)t}. \quad (9)$$

Естественно считать, что полная система гидродинамики пятого порядка также содержит та-

кого рода эффект. Рассмотрим линеаризованную систему гидродинамики:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nabla P_1}{\rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \rho_1 \vec{e}_z + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma \rho_0 v_z = \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 - c^2 \chi \Delta \rho_1. \quad (12)$$

Здесь P_1 , ρ_1 — поправки к давлению и плотности, остальные обозначения общепринятые.

Рассмотрим аксиально-симметричную задачу, в которой ось направлена вдоль направления силы тяжести. Введём представление поля скорости в виде суммы потенциальной, тороидальной и полоидальной частей:

$$\vec{v} = \nabla \Phi + \nabla \times (\vec{e} \psi) + \nabla \times (\nabla \times (\vec{e} \varphi)), \quad (13)$$

где \vec{e} — единичный вектор, направленный вертикально вверх; Φ, ψ, φ — потенциалы «потенциального», тороидального и полоидального полей скорости, которые являются скалярными функциями времени и координат.

В этих переменных уравнения (10)–(12) принимают вид:

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta \Phi + \frac{\Delta P_1}{\rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{g \rho_1}{\rho_0} \right] + 2\Omega \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Delta_{\perp} \psi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta_{\perp} \psi - 2\Omega \Delta_{\perp} \Phi - 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Delta \Delta_{\perp} \varphi}{\partial t} - \nu \Delta \Delta \Delta_{\perp} \varphi + \frac{g}{c^2} \frac{\Delta_{\perp} P_1}{\rho_0} - \frac{g}{\rho_0} \Delta_{\perp} \rho_1 + 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \Delta \Phi - \rho_0 \frac{g}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho_0 \frac{g}{c^2} \Delta_{\perp} \varphi = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Delta_{\perp} \varphi \right) - \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 + \chi c^2 \Delta \rho_1 = 0. \quad (18)$$

Считая решение аксиально-симметричным, выполним преобразование Фурье по горизонтальной координате и времени; дисперсионное соотношение, таким образом, будет зависеть от волнового числа k и инкремента x .

$$f_5(k)x^5 + f_4(k)x^4 + f_3(k)x^3 + f_2(k)x^2 + f_1(k)x + f_0(k) = 0. \quad (19)$$

Численный счёт позволяет получить графики этих дисперсионных кривых (рис. 1, 2) для различных значений профиля стратификации γ ($\gamma > 0$ — стратификация устойчивая, нет конвекции; $\gamma < 0$ — стратификация неустойчивая — конвекция). По оси абсцисс отложено волновое число k , а по оси ординат — инкремент x , численные значения всех параметров выбраны приближенными к условиям земной атмосферы.

На графиках показаны монотонные части всех пяти кривых дисперсионного уравнения (19). Видно, что при неустойчивой стратификации неустойчивой оказывается только одна ветвь (конвективная) — см. рис. 1а. При нейтральной стратификации неустойчивы две ветви — см. рис. 1б. При малой устойчивой стратификации неустойчивость существует, хотя и меняет свои параметры — см. рис. 2а. Дальнейшее увеличение устойчивости стратификации приводит к исчезновению неустойчивости, то есть все ветви дисперсионного уравнения становятся устойчивыми — см. рис. 2б.

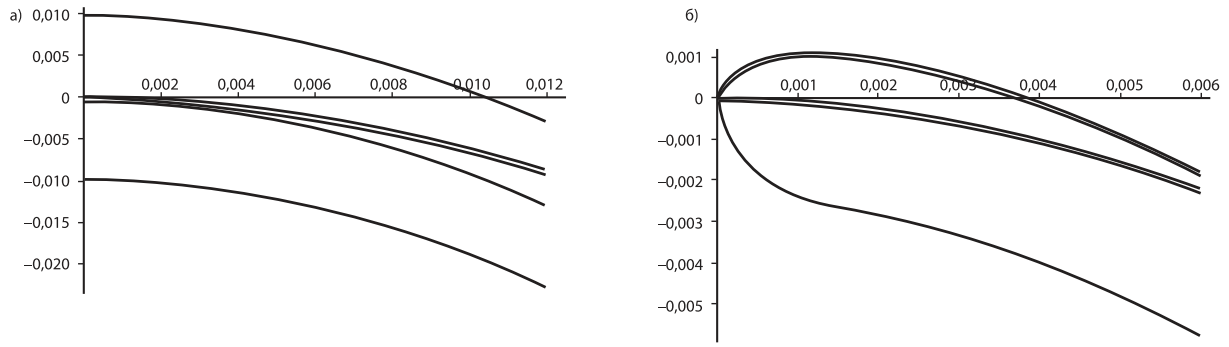


Рис. 1. Дисперсионные кривые для различных значений γ : а) $\gamma = -1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/m}$; б) $\gamma = 0$

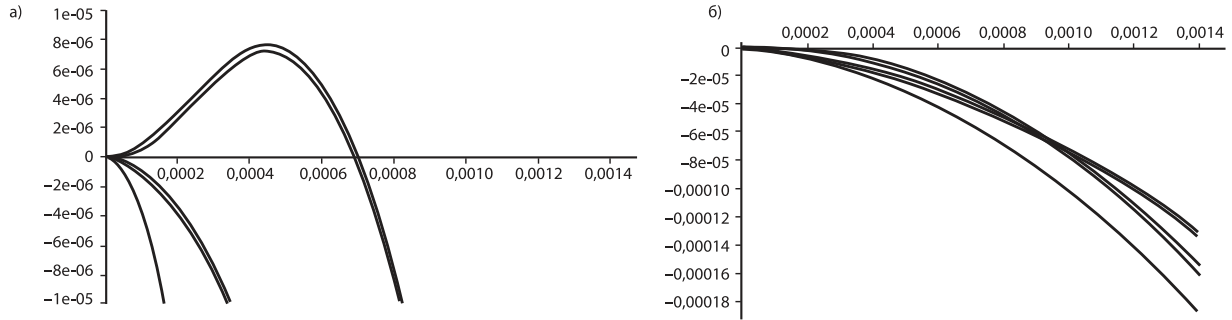


Рис. 2. Дисперсионные кривые для различных значений γ : а) $\gamma = 1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/m}$; б) $\gamma = 3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/m}$

Интересным является тот факт, что поведение дисперсионных кривых при малых волновых числах для случаев нейтральной и устойчивой стратификации отличается. Согласно рис. 1б и 2а эти дисперсионные кривые подходят к нулю по различным законам. Это обусловлено значениями корней дисперсионного уравнения (19).

При волновом числе, равном нулю, уравнение (19) существенно упрощается и принимает вид

$$c^2 x^5 + (g^2 + 4\Omega^2 c^2 + gc^2\gamma)x^3 + (g^3\gamma + 4\Omega^2 c^2 g\gamma)x = 0.$$

Его корни равны:

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{g\gamma},$$

$$x_{3,4} = \pm i\left(\frac{g^2}{c^2} + 4\Omega^2\right),$$

$$x_5 = 0.$$

Таким образом, понятно, что в случае нейтральной стратификации $\gamma = 0$ ещё два корня дисперсионного уравнения обращаются в нуль, и разложение инкремента по волновому числу следует проводить по дробным степеням. Оказывается, что это разложение нужно проводить по степеням $k^{1/3}$:

$$x_1 = \frac{\left((1-\kappa)g^2v\Omega^4\right)^{1/3}}{\left(g^2 + c^2\Omega^4\right)^{1/3}}k^{2/3} + \frac{-(2+\kappa)g^4v - (4+\kappa)c^2g^2v\Omega^4 - (1+\kappa)c^4v\Omega^4}{3\left(g^2 + c^2\Omega^4\right)^2}k^{6/3} + \dots$$

Это соотношение позволяет вычислить значение k_{\max} , соответствующее максимуму инкремента неустойчивости с точностью до двух членов разложения:

$$k_{\max} = \left[\frac{2 \left((2 + \kappa) g^4 + (4 + \kappa) c^2 g^2 \Omega^4 + (1 + \kappa) g^2 v \Omega^4 \right)}{\left(g^2 + c^2 \Omega^4 \right)^{5/3} \left((\kappa - 1) g^2 \Omega^4 \right)^{1/3}} \right]^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{v}}$$

и само значение максимума инкремента x_{\max} с той же точностью:

$$x_{\max} = \left[\frac{(\kappa - 1) g^2 v \Omega^4 \left(g^2 + c^2 \Omega^4 \right)}{18v \left((2 + \kappa) g^4 + (4 + \kappa) g^2 c^2 \Omega^4 + (1 + \kappa) c^4 \Omega^8 \right)} \right]^{1/2}$$

Развитие неустойчивости для полей давления и плотности во времени представлено на рис. 3 и 4. Отчётливо виден рост колебаний, продолжающийся до больших значений времени. Высокочастотные колебания на начальной стадии процесса соответствуют перестройке системы за счёт звуковых мод, которые через некоторое время затухают.

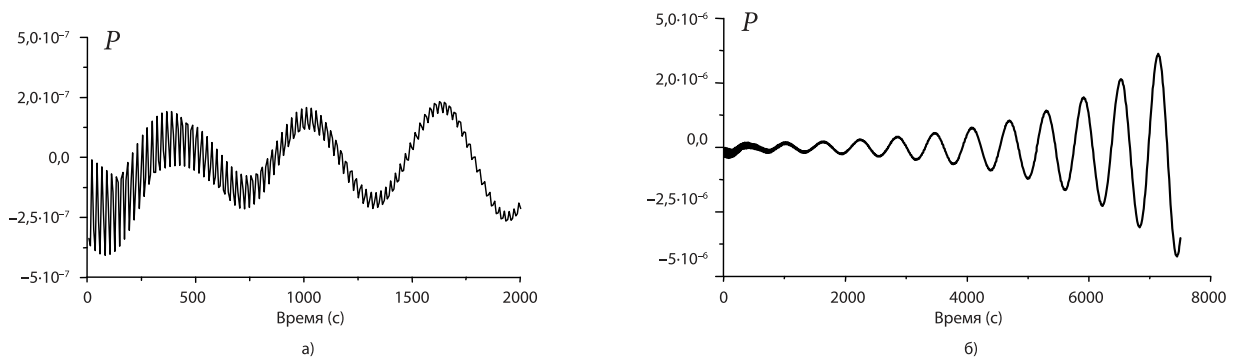


Рис. 3. Развитие поля давления во времени

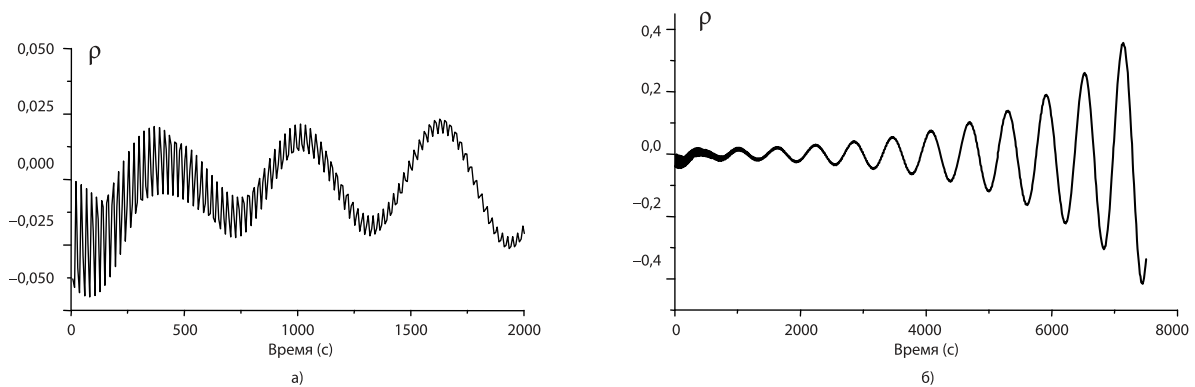


Рис. 4. Развитие поля плотности во времени

Поведенный выше линейный анализ дисперсионного уравнения показывает, что гидродинамическая система уравнений, описывающая атмосферу, имеет неустойчивость. Однако, очевидно, что линейный рост гидродинамических полей должен выходить на насыщение. Полное исследование системы, следовательно, подразумевает учёт нелинейных слагаемых. В самом деле, колебания с меньшими и большими значениями по отношению к некоторому волновому числу k будут распадаться, и таким образом взаимодействие различных мод должно ограничивать неустойчивость. В данной работе было проведено исследование взаимодействия 10 Бесселевых мод. Амплитуды старших мод обычно оказывались на порядок величины меньше, чем первой моды. Однако осцилляции продолжались, хотя несколько слабее, поскольку энергия перераспределялась между модами. Таким образом, вопрос об ограничении неустойчивости в атмосфере остаётся открытым.

Литература

1. Интенсивные атмосферные вихри: Пер с англ. / Под ред. Л. Бенигсена и Дж. Лайтхилла. М.: Мир, 1985. 368 с.
2. Заволженский М.В. Стационарная модель гидродинамической структуры смерча // Изв. РАН, ФАО. 2002. Т. 38. № 1. С. 56–63.
3. Rutkevich P.V., Rutkevich P.P. On horizontal modes interaction in tornado structure // Singapore Journal of Physics. 2002. V. 19. No. 1. P. 99–111.
4. Руткевич П.В., Руткевич П.П., Розуменко Л.С. О происхождении воронки смерча: Препринт. М.: ИКИ РАН, 2002. № Пр-2074. 14 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. С. 424.