

Промежуточная стадия смерча

М.В. Заволженский¹, П.Б. Руткевич²

¹ *Институт водных проблем РАН, Южный отдел
344098 Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 198
E-mail: zavolzhensky@rambler.ru*

² *Институт космических исследований РАН, Москва
E-mail: peter@d902.iki.rssi.ru*

Рассматривается установившееся осесимметричное течение тяжелой вязкой несжимаемой жидкости под действием азимутальной касательной нагрузки на поверхности разрыва её плотности. Считается, что вихревые токи развиваются в начальной стадии смерча. В таких условиях дальнейшую — промежуточную — стадию смерча можно рассматривать как течение, вызванное насильственным воздействием на поверхность разрыва плотности азимутальных касательных напряжений с учётом соответствующей деформации поверхности разрыва в пространстве. При этом воздействие на течение конвективных токов и их основную причину — подъёмную силу Архимеда — нужно учитывать и в промежуточной стадии развития торнадо. Течение в смерче считается осесимметричным и установившимся. Температура поверхности разрыва плотности считается заданной.

Ключевые слова: смерч, осесимметричное течение, установившееся течение, несжимаемая жидкость, поверхности разрыва плотности.

Визуальные и радарные наблюдения за смерчами [1] говорят о том, что при возникновении и развитии смерча в среде существует *поверхность разрыва плотности* (поверхность воды, облака, размытый скачок плотности в атмосфере при пожаре, извержении вулкана, когда смерч возникает вообще без материнского облака [1], и др.), у которой преобладают *вихревые токи*.

Течение в смерче считаем осесимметричным и установившимся. Пусть тяжелая вязкая несжимаемая жидкость занимает часть пространства $z' < \zeta'(r')$ в цилиндрических координатах (r', θ', z') с началом на плоскости $z' = 0$ и осью Oz' , направленной против силы тяжести. Жидкость движется под действием азимутальных осесимметричных касательных напряжений $\tau'(r')$, приложенных к поверхности разрыва плотности $z' = 0$. Задача об установившемся течении жидкости, вызванного такими факторами, состоит в определении скорости $\mathbf{v} = \{v_r(r', z'), v_\theta(r', z'), v_z(r', z')\}$, давления $p'(r', z')$ и формы поверхности $\zeta'(r')$ разрыва плотности жидкости из стационарной системы уравнений Навье–Стокса (теплообменом в смерче в настоящей работе пренебрегаем):

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{p' - p^*}{\rho} + gz' \right) = \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях на поверхности $z' = \zeta$

$$-(p' - p^*) + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial z'} + \frac{\partial v_z}{\partial r'} = 0, \quad \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z'} = -\tau'(r'), \quad v_z = v_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \quad (2)$$

и при исчезновении радиальной и азимутальной компонент скорости с удалением от поверхности разрыва плотности:

$$v_r = 0, v_\varphi = 0, v_\theta = 0, z' \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

Плотность ρ , кинематическую вязкость ν , $\mu = \rho\nu$ постоянными величинами.

Распишем уравнения и граничные условия (1)–(3) в выбранных цилиндрических координатах и перейдём в них к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \Omega &= \max_{r'} |\tau'(r')|, p' = p^* + \frac{\rho\mu^2 g^2}{\Omega^2} [p(r, z) - z - \zeta], \tau(r) = \frac{\tau(r')}{\Omega}, \zeta' = \frac{\rho^2 \mu^6 g^5}{\Omega^8} \zeta(r), \\ r &= \frac{r'\Omega^2}{g\mu^2}, v_r = \frac{\rho\mu^3 g^3}{\Omega^4} u(r, z), v_\theta = \frac{\mu g}{\Omega} v(r, z), v_z = \frac{\rho\mu^3 g^3}{\Omega^4} w(r, z), \\ z &= \frac{z'\Omega^2}{g\mu^2} - R\zeta = \frac{\Omega^2}{g\mu^2} (z' - \zeta'), R = \frac{\rho^2 \mu^4 g^4}{\Omega^6}, \end{aligned} \quad (4)$$

где p^* — давление на высоте скачка плотности; g — ускорение силы тяжести. Выбор безразмерных переменных основан на физическом представлении о том, что в течении, вызванном вращательным фактором $\tau'(r')$, преобладающая инерционная сила определяется азимутальной скоростью.

Перейдём в уравнениях (1) и в граничных условиях (2) к безразмерным переменным (4). Ограничимся решением задачи нулевого приближения по малому параметру R . В таком приближении азимутальная нелинейность содержится только в радиальном уравнении. Азимутальное уравнение линейно. Поэтому несложно построить общие интегральные представления решения задачи.

Чтобы выделить течение в смерче, предположим, что вихревые напряжения $\tau'(r')$ на поверхности разрыва плотности среды материнского облака действуют по азимуту только в тонком кольце заданного радиуса a' , т. е. $\tau'(r') = -\Omega\delta\left(\frac{r'-a'}{a'}\right)$. Выпишем асимптотические представления решения рассматриваемой задачи, справедливое при малых и при больших значениях безразмерного радиуса кольца $a = \frac{a'\Omega^2}{g\mu^2}$, по которому действует азимутальная касательная нагрузка. В случае выписанных напряжений τ' указанная асимптотика имеет вид:

$$\begin{aligned} v &= \frac{ra^3}{2(a^2 + r^2 + z^2)^{3/2}}, x = \frac{r'}{a'}, \xi = \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}}, \eta = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}, \\ \frac{40R}{a^2} \zeta &= \frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^3} - \frac{5}{2x^4(1+\sqrt{1+x^2})} \left[\frac{21\operatorname{arctg}\xi}{\xi} + 21\eta + 14\eta^2 - 40\eta^3 - 400\eta^4 + 640\eta^5 - 256\eta^6 \right] \\ , w &= \frac{\pi a^5 |z|}{128} \frac{2z^2 - r^2}{(z^2 + r^2)^{5/2}}, p - R\zeta = -\frac{\pi a^3}{64} \cdot \frac{2(a+|z|)^2 - r^2}{[(a+|z|)^2 + r^2]^{3/2}}, \\ u &= \frac{\pi a^5 r^2 + (a+|z|)^2 - 3|z|(a+|z|)}{128 \left[(a+|z|)^2 + r^2 \right]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

1. Величина $\frac{40R}{a^2} \zeta$ охарактеризована на рис. 1.

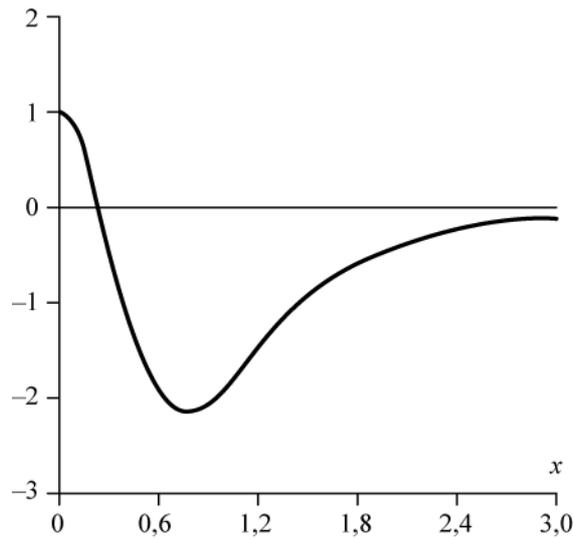


Рис. 1. Форма хобота смерча

Поверхность деформации материнского облака пересекает невозмущённое положение $z' = 0$ нижней границы облака по окружности $r' = 0.243a'$. Максимальная длина (глубина) хобота смерча (т. е. минимальное значение величины $\frac{40R}{a^2}\zeta$) равна 0.430 и достигается на расстоянии $r' = 0,751a'$ от его оси. Максимальная длина хобота в 2,150 раза превосходит высоту осевого столба. При увеличении расстояния r' от оси возмущение быстро – пропорционально $((a'/r')^4$ — затухает.

Максимальную высоту осевого столба и минимальную глубину воронки смерча получим из формул (5) в размерных переменных (4):

$$\zeta'_{\max} = \frac{a'^2 \Omega^2}{40 g \mu^2}, \quad \zeta'_{\min} = -2,150 \zeta'_{\max}. \quad (6)$$

В воздушном смерче при небольшой разности в вязкостях сред над и под поверхностью разрыва плотности можно положить $\Omega = 2\mu\omega$ [2], где ω – средняя угловая скорость вращения воздушных масс в хоботе торнадо. Тогда $\zeta'_{\max} = \frac{(a'\omega)^2}{g}$. Высота z'_{\max} не зависит ни от турбулентной вязкости среды материнского облака, из которой состоит хобот торнадо, ни от величины касательных напряжений. Поэтому её легко оценить по данным многочисленных наблюдений [1].

Даже для нижних пределов радиуса кольца a' у основания хобота, в районе которого сосредоточена основная энергетика смерча, и угловой скорости вращения поверхности хобота ($a' = 10$ м, $\omega = 10$ с⁻¹) глубина воронки (т. е. длина хобота смерча, считая вниз от материнского облака) достигает двухсот метров. Глубина растёт пропорционально квадрату линейной азимутальной скорости $a'\omega$ воздуха на поверхности хобота. На практике азимутальная скорость воздуха в торнадо оценивается по мягким сосновым щепкам, с помощью которых смерч протыкал значительно более твёрдые предметы. Такая скорость превышает скорость звука и достигает 460 м/с и выше [1]. По этим оценкам длина хобота торнадо, рассчитанная по формулам (6), составляет $|\zeta'_{\min}| \sim 40$ км. Поэтому при типичной в наблюдениях высоте материнского облака в 200 м поверхность земли даёт возможность развиваться воронки торнадо только на двухсотую часть требуемой глубины. Даже узкий смерч из высокого облака, которое поднято над землёй на один

километр, может развить только сороковую часть своей воронки. Воронке просто некуда деваться и, имея большую массу [1] при интенсивном вращении, воронка начинает терзать подстилающую поверхность, образуя *каскад* из пыли и обломков производимых ею разрушений [1]. По этой же причине воронка торнадо нередко *загибается* и вращающимся жгутом тащится по земле по направлению движения материнского облака [1]. При этом следует ещё учесть уплотнение среды в хоботе [1]. Загнутую вращающуюся воронку хобота торнадо, волочившуюся по городской земле вслед за столбом смерча, можно видеть в известной телевизионной передаче Американского Географического Общества. Скорость движения обломков в окрестности хобота смерча составляла $450 \text{ км/ч} = 125 \text{ м/с}$.

Осевой столб торнадо по формуле (6) всего в два раза короче по высоте максимальной глубины воронки смерча. Это составляет 20 км — в 2 раза больше требуемой высоты для пробоя тропосферы [1]. Этот теоретический результат объясняет возникновение облаков в тропосфере [1] над «макушкой» торнадо.

2. Осевая скорость в окрестности оси смерча направлена вверх, против тяжести. Это — общеизвестная осевая струя торнадо.

Вдали от оси смерча вертикальная скорость ориентирована вглубь жидкости. Радиальная скорость вдали от поверхности у оси хобота направлена к оси смерча, а при удалении от оси меняет направление на противоположное. Перечисленные факты прослеживаются по асимптотическим формулам (4), справедливым при малых и при больших значениях параметра a . Поэтому по оси смерча без теплообмена в промежуточной его стадии идут *восходящие*, а вдали от оси — *нисходящие* токи. Последний вывод соответствует наблюдениям [1].

На рис. 2 изображена относительная характеристика $\frac{32u(x, 0)}{a^3}$ радиальной скорости на поверхности хобота смерча, рассчитанная по формуле (4).

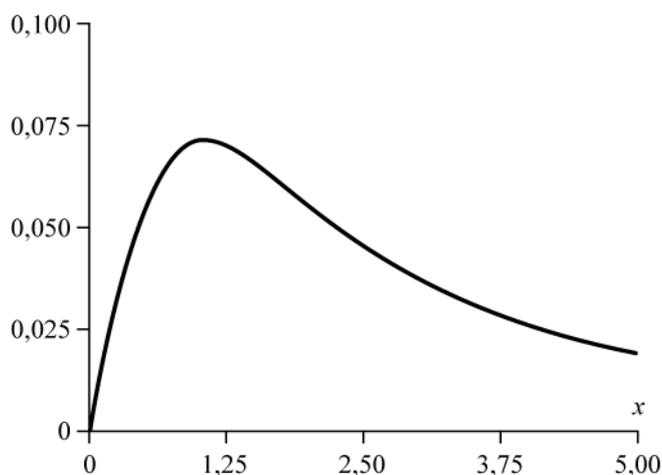


Рис. 2. Радиальная скорость на поверхности хобота смерча

На поверхности хобота радиальная скорость не обращается в ноль. Поэтому по поверхности хобота радиальные токи ориентированы в сторону от оси смерча. Максимальное значение функции $\frac{32u(x, 0)}{a^3}$ равно 0.0708. Максимум достигается при $x = 1.025$.

На оси смерча, при $r = 0$ значение функции $32a(p - R \zeta) = -0,533$. Поэтому в окрестности оси смерча давление понижено. Функция $32a(p - R \zeta) = -0,533$, характеризующая изменение

гидродинамического давления на поверхности хобота смерча обращается в ноль при $x = 2,528$ и достигает максимального значения $4,64 \cdot 10^{-3}$ при $x = 3,499$. Далее давление асимптотически выходит на значение ноль.

$$\text{Масштабы исследуемых характеристик } U = \frac{2\rho a^3 \Omega^2}{15\mu^3}, V = \frac{a'\Omega}{2\mu}, P = \frac{8\rho a'^2 \Omega^2}{15\mu^2}.$$

3. Рисунки 1 и 2 подтверждают *резко локализованный* в горизонтальном направлении характер течения в торнадо. На расстоянии около четырёх радиусов зоны возмущения от оси в горизонтальном направлении течения практически отсутствует. В вертикальном направлении такой локализации нет: об этом говорят проведённые выше оценки длины хобота торнадо. Масштабы и конфигурация поверхности материнского облака в виде осевой струи (столба) и воронки хобота торнадо подтверждаются практически всеми визуальными и радарными наблюдениями [1], которые фиксируют как осевой столб, уходящий за пределы тропосферы, так и хобот из материнского облака.

4. Формулы (5) подтверждает известную из наблюдений резко выраженную границу сильно пониженных давлений в окрестности оси смерча: известно, что при торнадо взрываются консервные банки, *наружу* вылетают оконные стёкла и стены домов и др. [1].

5. Если безразмерный радиус кольца a , по ободу которого действуют азимутальные (вихревые) касательные напряжения на поверхности разрыва плотности, достаточно мал или велик, то для качественного описания размерных характеристик вызванного такими напряжениями течения используем формулы (4). При использовании указанных формул и рис. 1 и 2 получим общую картину течения в смерче.

В криволинейных координатах (4) осевая скорость равна нулю на поверхности усечённого конуса $r = (a + |z|)\sqrt{2}$ верхнее основание которого — окружность $r = a\sqrt{2}$, $z = 0$ — лежит на поверхности разрыва плотности. Вне конуса осевая скорость направлена вглубь жидкости, внутри — вверх, против силы тяжести.

Радиальная скорость течения обращается в ноль на поверхности двуполостного гиперboloида вращения $r^2 + (a + |z|)^2 = 3|z|(a + |z|)$. Внутри нижней полости гиперboloида (верхняя полость не входит в область течения) радиальная скорость направлена к оси, вне полости гиперboloида — в сторону периферии течения от оси вихря.

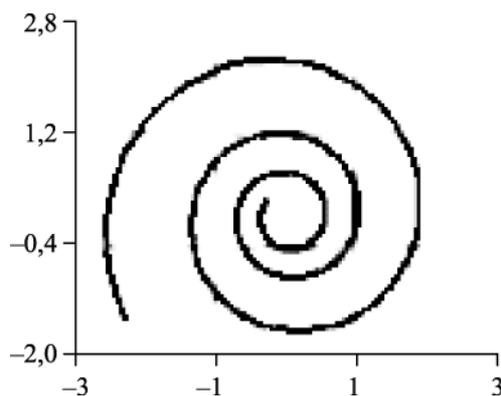


Рис. 3. Витт смерча

Дифференциальное уравнение $\frac{dr}{v_r} = \frac{r'd\theta}{v_\theta}$, $z' = \zeta'$ линий тока на поверхности разрыва плотности, или, по формулам (5), $\frac{dr'}{r'} = \frac{\pi\rho a'^2 \Omega^2}{64\mu^2} d\theta$, $z = 0$. Поэтому линии тока на поверхности

разрыва плотности представляют собой спирали $r' = C \exp\left(\frac{\pi r a'^2 \Omega^2}{64 \mu^2} \theta\right)$, $z' = \zeta'$, изображённые

на рисунке, вид снизу. Имеется фотография, подтверждающая спиралевидный характер течения по внутренней поверхности воронки торнадо [1].

На рис. 4 изображён примерный вид проекций линий тока в смерче на поверхность $\theta = \text{const}$ в размерных переменных r' , z' . Рисунок 3 построен на основе анализа рис. 1, 2 и формул (5). Пространственная конфигурация линий тока близка к винтовым линиям. Внутри полости смерча, при $z' < \zeta'$ вне конуса $r = (a + |z|)\sqrt{2}$ жидкость растекается, а у оси вихря, внутри нижней полости указанного выше гиперboloида $r^2 + (a + |z|)^2 = 3|z|(a + |z|)$, происходит восходящее течение к вершине смерча (осевая струя торнадо). Отток жидкости от вершины происходит между гиперboloидом и конусом.

На поверхности разрыва плотности нормальная к ней скорость $v_z = 0$, так как жидкость движется либо внутри хобота, либо по его поверхности. Этим объясняется резкая контрастность смерча в окружающей атмосфере.

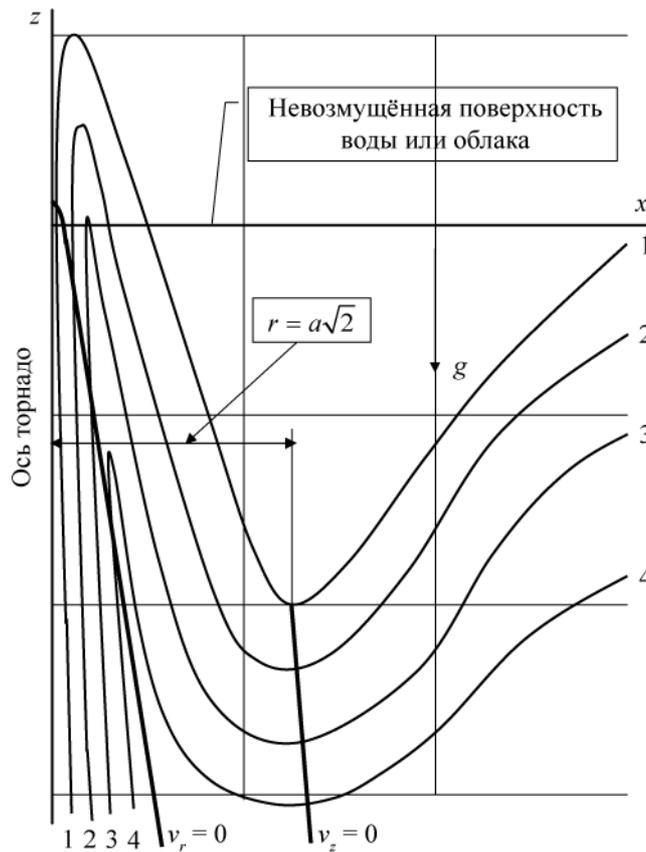


Рис. 4. Качественная картина проекция линий тока в смерче на плоскость $\theta = \text{const}$

6. Описанный только что интенсивный приток жидкости к вершине осевого столба торнадо возможен только при увеличении высоты столба. В этом смысле смерч является механизмом по увеличению собственной высоты.

В работе [3] на основании решения аналогичной рассматриваемой задаче, но в развитии течения во времени показано, что описываемое течение является предельным при $t \rightarrow \infty$, когда рост высоты осевого столба торнадо скомпенсирован силой тяжести и оттоком жидкости на периферии течения. Однако полученный выше масштаб высоты столба в двадцать километров в

два раза превышает высоту тропосферы. Поэтому в земных условиях такой масштаб нереален из-за того, что масштабы области однородности жидкости по плотности (10 км, толщина тропосферы) меньше масштаба высоты (20 км), на которую смерч поднимает жидкость из нижних слоёв тропосферы. Поэтому ограничимся примерным описанием завершения промежуточной стадии развития смерча на основании следующих простых соображений. Известно, что жидкость не выдерживает отрицательных (разрывных) давлений. Поэтому равенство нулю давления в жидкой среде с заданным нижним уровнем давления p^* является началом перехода жидкости в распылённое, а газа – в разреженное состояния. В таком случае чрезмерно большого роста высоты столба торнадо в земных условиях не происходит по следующей причине, содержащейся в полученной выше формуле (5) для гидродинамического давления в смерче. Давление с учётом формулы (5) на поверхности столба смерча $z' = \zeta'$ на оси $r' = 0$ имеет минимум:

$$\min p' = p^* - \frac{\rho a'^2 \Omega^2}{60\mu^2}. \text{ Для того, чтобы не происходило распыление жидкости в смерче, должно}$$

быть выполнено условие $\min p' < 0$. Отсюда вытекает, что движение в смерче без распыления жидкости, в том числе и увеличение высоты осевого столба торнадо, возможно только в тех случаях, когда масштаб Ω азимутальной касательной нагрузки на поверхность хобота ограничен

$$\text{сверху: } \Omega \leq \frac{2\mu}{a'} \sqrt{\frac{15p^*}{\rho}} = \Omega^*. \text{ При дальнейшем увеличении нагрузки морской смерч начнёт}$$

работать в качестве насоса, перекачивающего распылённую самим смерчем морскую воду в атмосферу. Известен случай, когда таким способом смерч отправил в атмосферу целое озеро [1]. По приблизительным подсчётам в августе 1985 года смерч в районе Сочи поднял в воздух, перенёс и сбросил на шоссе в горах около десяти миллионов кубометров воды.

7. Осевые столбы воздушных смерчей ещё более контрастны. Из формул (5) вытекает, что высота осевого столба ζ'_* и максимальная азимутальная скорость v_{θ}^* (по формуле (5)) при значении напряжений $\Omega = \Omega^*$, до которых не происходит распыление жидкости в смерче, выражаются по формулам

$$\zeta'_* = \frac{3p^*}{2\rho g}, \quad v_{\theta}^* = \sqrt{\frac{15p^*}{\rho}}$$

Высота осевого столба ζ'_* и максимальная азимутальная скорость v_{θ}^* любого торнадо *не зависят* ни от вязкости жидкости, ни от величины касательной нагрузки на поверхность разрыва плотности. На Земле для смерча из воды приведённые масштабы равны соответственно 15,5 м и 39 м/с. В качестве масштаба давления p^* в оценках принято атмосферное давление. Найденные масштабы высоты столба воды и её азимутальной скорости соответствуют наблюдениям за морскими смерчами [1]. В воздушном смерче плотность жидкости уменьшается почти в 1000 раз, так что предел ζ'_* высоты осевого столба торнадо превосходит высоту тропосферы, и в пределах самой тропосферы не приходится говорить (и наблюдать) заметного разрежения воздуха за счёт вихревых эффектов. Торнадо в промежуточной стадии развития просто пробивает тропосферу своим осевым столбом, поднимает плотный воздух нижних слоёв атмосферы в стратосферу и на фоне её разреженного воздуха столб смерча легко *фиксируется* радарными установками [1]. Распылением жидкости объясняются также расплывчатый характер очертаний вершины морского смерча [1] и наблюдающееся нередко образование облаков над макушкой воздушного торнадо.

Литература

1. *Наливкин Д.В.* Ураганы, бури, смерчи. Л.: Наука, 1969.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М: Гостехиздат, 1954. 795 с.
3. *Заволженский М.В., Терсков А.Х.* Вихрь у поверхности вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 127–132.

Intermediate stage of tornado

M.V. Zavolgenskiy¹, P.B. Rutkevich²

¹ *Water problems Institute of RAS, South Department*

Stachka Av., 198, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: zavolzhensky@rambler.ru

² *Space Research Institute of RAS, Moscow*

E-mail: pbrutkevich@gmail.com

A steady-state axisymmetric flow of heavy viscous incompressible fluid under action of tangent stresses on the discontinuity of its density surface is considered. The eddy currents are considered to develop at the initial stage of the tornado. So the intermediate stage can be considered as a flow induced by the forced influence on the density surface discontinuity of the tangent stresses with the account of surface deformations. The influence of convective currents on the flow and their main cause — the Archimedean force — should be taken into account in the tornado intermediate stage. The flow in the tornado is considered as steady and axisymmetric. The temperature on the density surface discontinuity is considered known.

Keywords: tornado, axisymmetric flow, steady-state flow, incompressible fluid, density surface discontinuity.