

# Нелинейная конвекция в аксиальном вертикальном канале

П.Б. Руткевич<sup>1</sup>, П.П. Руткевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт космических исследований РАН*

*E-mail: pbrutkevich@gmail.com*

<sup>2</sup> *Институт высокопроизводительных компьютерных вычислений, Сингапур*

*E-mail: pprutkevich@yahoo.ru*

В работе определяются стационарные решения нелинейной конвекции в аксиально-цилиндрическом вертикальном канале с учётом сжимаемости воздуха. Нелинейность считается обусловленной различием вертикальной стратификации в поднимающемся и опускающемся течениях. Считается, что стратификация неустойчива для восходящего течения, и устойчива для нисходящего течения. Такого рода ситуация характерна для смерчей и тропических циклонов, неустойчивость в которых обусловлена выделением скрытой теплотой фазовых переходов атмосферной влаги в восходящих потоках воздуха. Этим восходящим потокам неизбежно сопутствуют нисходящие потоки воздуха, которые осушается и стратификация в них становится отличной от восходящего потока воздуха. Поставленная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению шестого порядка с краевыми условиями на обеих границах. В результате получено, что сжимаемость воздуха оказывается одним из основных факторов, обуславливающих вращение воздуха в аксиальном вихре.

**Ключевые слова:** нелинейная конвекция, стратификация, смерч, тропический циклон, атмосферная влага, фазовые переходы.

Конвекция в атмосфере является одним из основных факторов возникновения воздушных масс в атмосфере [1, 2]. Наиболее крупные и наиболее продолжительные из атмосферных явлений называют мезоциклонными конвективными системами [3]. Эти мезоциклонные конвективные системы считаются ответственными за возникновение таких катастрофических явлений природы как смерчи и тайфуны. Эти явления интенсивно исследовались как теоретически, так и экспериментально. Наблюдательные исследования включают наблюдения с помощью доплеровского радара и дистанционное зондирование.

Общепринято, что смерчи и тайфуны являются нелинейными явлениями, однако какая именно нелинейность отвечает за возникновение и существование этих явлений остаётся до сих пор не ясным. Обычно авторы рассматривают инерционные члены уравнений Навье–Стокса (см., например, [4–6]). Однако модели такого рода, в конечном счете, наталкиваются на непреодолимые трудности и не приводят к успеху. В данной работе мы считаем, что это связано с тем, что инерционные члены уравнений Навье–Стокса не совершают работу и не могут непосредственно быть ответственными за генерацию атмосферных вихрей. Поэтому учитываем нелинейное слагаемое, отвечающее за энергетику процесса. Это слагаемое в реальных условиях атмосферы Земли обусловлено присутствием водяного пара. При достаточно большой влажности в атмосфере может сложиться ситуация, при которой возникает конвективная ячейка, и появляются потоки восходящего и нисходящего воздуха, которые оказываются в условиях различного адиабатического градиента вертикального распределения температуры. Таким образом, получается, что вертикальный градиент температуры зависит от вертикальной компоненты скорости движения воздуха. Точная формула этой зависимости получается при использовании соответствующих вертикальных распределений термодинамических параметров насыщенной влажной атмосферы [7–11]. В настоящей работе мы воспользуемся упрощённой аппроксимацией этого явления, принимая градиент вертикального распределения температуры линейной функцией от скорости в виде:

$$\gamma(v_z) = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{v_z}{v_T}, \quad (1)$$

где параметр  $v_T$  описывает численное значение изменения градиента вертикального распределения температуры при наличии вертикальной компоненты скорости воздуха.

Рассмотрим линеаризованную систему гидродинамики с учётом зависимости градиента вертикального распределения температуры линейной функцией от скорости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nabla P_1}{\rho_0(z)} + \frac{g}{\rho_0(z)} \rho_1 \vec{e}_z + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma(v_z) \rho_0 v_z = \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 - c^2 \chi \Delta \rho_1. \quad (4)$$

Здесь  $P_1, \rho_1$  — поправки к давлению и плотности, остальные обозначения общепринятые.

Рассмотрим аксиально-симметричную стационарную задачу, ось которой направим вдоль направления силы тяжести. Введём представление поля скорости в виде суммы потенциального, тороидального и полоидального частей:

$$\vec{v} = \nabla \Phi + \nabla \times (\vec{e} \psi) + \nabla \times (\nabla \times (\vec{e} \varphi)), \quad (5)$$

где  $\vec{e}$  — единичный вектор, направленный вертикально вверх,  $\Phi, \psi, \varphi$  — потенциалы «потенциального», тороидального и полоидального полей скорости, которые являются скалярными функциями времени и координат. В условиях аксиальной симметрии и вертикальной однородности задачи эти поля скорости описывают: «потенциальное» поле — радиальную компоненту скорости, тороидальное поле — азимутальную компоненту скорости и полоидальное поле — вертикальную компоненту скорости.

В этих переменных уравнения (2)–(4) принимают вид:

$$-\nu \Delta \Delta \Phi + \frac{\Delta P_1}{\rho_0} + \frac{g}{c^2} \frac{g \rho_1}{\rho_0} + 2\Omega \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (6)$$

$$-\nu \Delta \Delta_{\perp} \psi - 2\Omega \Delta_{\perp} \Phi = 0, \quad (7)$$

$$-\nu \Delta \Delta \Delta_{\perp} \varphi + \frac{g}{c^2} \frac{\Delta_{\perp} P_1}{\rho_0} - \frac{g}{\rho_0} \Delta_{\perp} \rho_1 = 0, \quad (8)$$

$$\rho_0 \Delta \Phi + \rho_0 \frac{g}{c^2} \Delta_{\perp} \varphi = 0, \quad (9)$$

$$-c^2 \gamma \rho_0 \Delta_{\perp} \varphi - \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 + \chi c^2 \Delta \rho_1 = 0. \quad (10)$$

Вначале рассмотрим простейший случай нелинейной конвекции в несжимаемом газе при отсутствии вращения  $c \rightarrow \infty$ ,  $\Omega = 0$ . Конвекция в осесимметричном случае описывается системой уравнений:

$$\Delta \Delta \varphi + \frac{g \gamma}{\nu \chi} \varphi = 0, \quad \Delta = \frac{d}{r dr} r \frac{d}{dr}, \quad (11)$$

которая, очевидно, легко получается из системы (6-10) при устремлении параметра Кориолиса к нулю и скорости звука в бесконечность. Подстановка градиента температуры в виде (1) приводит к нелинейному уравнению:

$$\Delta \Delta \varphi(r) + \frac{g \gamma_0}{\chi \nu} \left( \varphi(r) - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \frac{\varphi(r) \Delta \varphi(r)}{v_T} \right) = 0. \quad (12)$$

В безразмерных переменных  $r = \lambda\rho$ ,  $\varphi(r) = Cf(\rho)$  уравнение (12) переходит в уравнение:

$$\Delta\Delta f(\rho) + f(\rho) - f(\rho)\Delta f(\rho) = 0, \quad (13)$$

где обозначено:

$$\lambda = \left( \frac{\chi v}{g\gamma_0} \right)^{1/4}, \quad C = \lambda^2 \frac{\gamma_1}{\gamma_0} v_T \quad \text{и} \quad \Delta = \frac{d}{\rho d\rho} \rho \frac{d}{d\rho}.$$

Здесь безразмерный радиус  $\rho$  изменяется в интервале  $0 < \rho < \infty$ , и безразмерный потенциал  $f(\rho)$  полоидального поля есть регулярная функция при  $\rho \rightarrow 0$  и при  $\rho \rightarrow \infty$ . Определим численно приближённое решение краевой задачи (13). Важно отметить, что регулярное решение уравнения (13) при  $\rho \rightarrow 0$  может быть представлено в виде следующего разложения:

$$f(\rho, A, a_2) = A \left[ 1 + a_2 \rho^2 + \sum_{j=2}^{\infty} a_{2j} \rho^{2j} \right], \quad (14)$$

где коэффициенты  $a_4, a_6, \dots$  могут быть выражены рекуррентно через параметры  $A$  и  $a_2$  с помощью уравнения (13). Для произвольных значений параметров  $A$  и  $a_2$  решение  $f(\rho, A, a_2)$  будет быстро (экспоненциально быстро) расти с увеличением радиуса  $\rho$ . Обозначим  $\rho_m(A, a_2)$  такое значение безразмерного радиуса  $\rho > \rho_a$ , при котором  $f(\rho, A, a_2) > bA$  для  $\rho > \rho_m(A, a_2)$ , где  $\rho_a$  — есть достаточно большое значение радиуса, а  $b$  — достаточно малый коэффициент, обеспечивающий близость искомой функции к нулю при достаточно больших значениях радиуса.

Можно сказать, что для заданных значений  $A, a_2$  решение уравнения (13) начинает быстро расти, когда радиус  $\rho$  превосходит значение  $\rho_m(A, a_2)$ . Ясно, что  $\rho_m(A, a_2) = \infty$ , если  $f(\rho, A, a_2) \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ .

Для нахождения решения задачи параметры  $A, a_2$  изменялись и численно вычислялось решение  $f(\rho, A, a_2)$  уравнения (13) для которого определялся параметр  $\rho_m(A, a_2)$ . На рис. 1 показан график зависимости функции  $\rho_m(A, a_2)$ . Точке максимума на этом графике соответствует наилучшее приближение решения к точному. В условиях поставленной задачи этот максимум достигается при  $A = 3,364$  и  $a_2 = -0,2654$ . Максимальное значение безразмерного радиуса оказывается при этом равным  $\rho_m = 26,5$ . Соответствующее решение  $f(\rho)$  приведено на рис. 2.

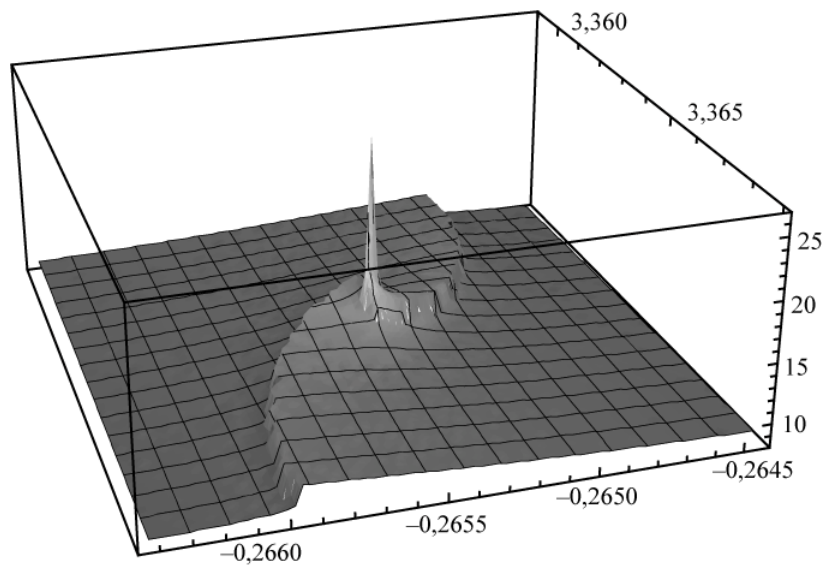


Рис. 1. График зависимости  $\rho_m(A, a_2)$ .

Максимум  $\rho_m = 26,5$  достигается в точке  $A = 3,364$  и  $a_2 = -0,2654$

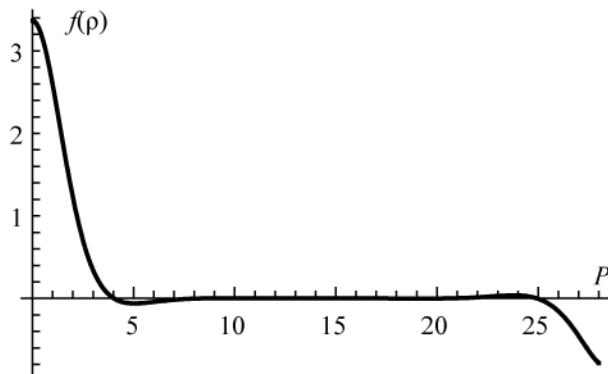


Рис. 2. Решение  $f(\rho)$  уравнения (13), которое при  $\rho \rightarrow 0$  имеет вид:

$$f(\rho, A, a_2) = 3,364 \left[ 1 - 0,2654\rho^2 + O(\rho^4) \right]$$

Учитывая сжимаемость газа и вращение можно получить более сложное уравнение для полоидального поля. Наиболее простой (безразмерный) вариант этого уравнения имеет вид:

$$\Delta[\Delta\Delta f(\rho) + f(\rho) - f(\rho)\Delta f(\rho)] - Q f(\rho) = 0, \quad (15)$$

где введен параметр, отвечающий за параметр Кориолиса:  $Q = \left( \frac{2\Omega g \lambda}{\nu c^2} \right)^2$ . Отметим, что этот параметр зависит от скорости звука и исчезает при рассмотрении несжимаемой жидкости.

Ограниченные в при  $\rho \rightarrow 0$  решения по-прежнему описывается разложением (14). Однако теперь они образуют не двух-, а трехпараметрическое семейство  $f(\rho; A, a_2, a_4)$ , что значительно затрудняет поиск ограниченных на бесконечности решений. Нетрудно показать, что последние образуют дискретные подмножество в этом семействе. Для поиска ограниченных решений уравнения (15) мы находим его приближенное численное решение  $f(\rho; A, a_2, a_4)$  при некоторых фиксированных значениях параметров  $A, a_2, a_4$ , которые затем подбираем таким образом, чтобы в возможно более широком интервале  $[\rho_a, \rho_m]$  решение оставалось малым. На рис. 3 показано наилучшее из найденных нами приближенных решений при  $Q = 1$ .

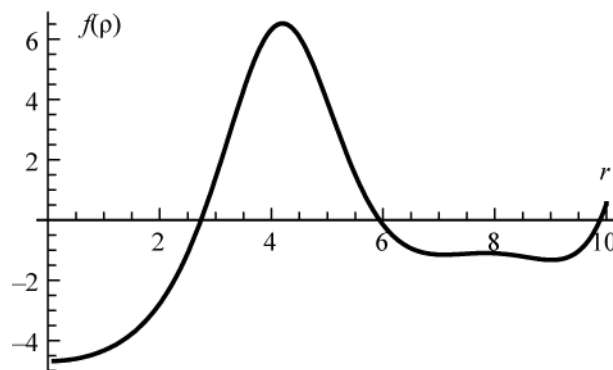


Рис. 3. Численное решение уравнения (14) для  $Q = 1$ , которое ведёт себя при  $\rho \rightarrow 0$  как

$$f(\rho, A, a_2) = -4,684 \left[ 1 - 0,068\rho^2 - 0,007499\rho^4 + O(\rho^6) \right]$$

Таким образом, в работе получены решения задачи о стационарной нелинейной конвекции в аксиально-цилиндрическом вертикальном канале с учётом сжимаемости воздуха. Задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению 6 порядка с граничными условиями на обоих концах диапазона изменения независимого переменного — радиуса искомой структуры. Приближённое

решение задачи получается методом задания на одной из границ (на оси структуры) естественных граничных условий, решения для них задачи Коши и определения условий при которых выполняются краевые условия на второй границе (равенство нулю решения и всех производных на бесконечности).

### Литература

1. Maddox R.A. Mesoscale convective complexes // Bull. Amer. Meteor. Soc. 1980. V. 61. No. 11. P. 1374–1387.
2. Fritsch J.M., Kane R.J., Chelius C.R. et al. The contribution of mesoscale convective weather to the warm-season precipitation in the United States // J. Appl. Meteor. 1986. No. 25. P. 1333–1345.
3. Zipser E.J. Use of a conceptual model of the life-cycle of mesoscale convective systems to improve very short-range forecasting. *Nowcasting* / Ed. K. Browning. Academic Press, 1982. P. 191–2004.
4. Арустов С.Н. Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 4. С. 477–480.
5. Renno N.O., Imgersoll A.P. Natural convection as a heat engine: A theory for CAPE. 1996.
6. Souza E.P., Renno N.O. Convective circulation induced by surface heterogeneities // Amer. Meteor. Soc. 2000. V. 57. P. 2915–2922.
7. Emanuel K. Atmospheric convection. New York, Oxford. Oxford University Press. 1994.
8. Rutkevich P.B. Convective and rotational instability in moist air // Physica A. 2002. V. 315/1-2. P. 215–221.
9. Руткевич П.Б. Вращательная неустойчивость в двухфазной двухкомпонентной системе: Препринт ИКИ РАН. Пр-2034. М.: ИКИ РАН. 2001. 11 с.
10. Руткевич П.Б. Вращательная неустойчивость во влажном воздухе // SCDS II Международная школа-семинар «Применение симметрии и косимметрии в теории бифуркаций и фазовых переходов». 18–23 сент. 2001. Сочи, Лазаревское, Россия: Сб. тр. С. 171–182.
11. Rutkevich P.B. Hydrodynamic motions of saturated air in terms of equilibrium thermodynamics // Electromagnetic phenomena. 1998. V. 1. No. 4. P. 538–544.

## Nonlinear convection in vertical axial channel

P.B. Rutkevich <sup>1</sup>, P.P. Rutkevich <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Space Research Institute of Russian Academy of Sciences  
E-mail: [pbrutkevich@gmail.com](mailto:pbrutkevich@gmail.com)

<sup>2</sup> Institute of high performance computing, Singapore  
E-mail: [pprutkevich@yahoo.com](mailto:pprutkevich@yahoo.com)

Stationary solution of nonlinear convection in axial vertical channel in compressible fluid was obtained. The nonlinearity is considered to be caused by difference of vertical stratification in ascending and descending air currants. It is considered that stratification is unstable for the ascending air currant and stable for the descending air currant. Such situation is typical for tornado and tropical cyclones where instability is determined by latent heat release of the atmosphere water phase transfer in the ascending air currant. These ascending air currants are inevitably accompanied by descending air currants which dry up and their stratification becomes different from that in the ascending currants. The problem is reduced to the ordinary differential equation of the sixth order with boundary conditions at the boundaries. It is obtained that compressibility of the air turn out to be one of the main factors conditioning rotation in the axial vortex.

**Keywords:** nonlinear convection, stratification, tornado, tropical cyclone, atmosphere moisture, phase transitions.