

**Численное решение задачи вариационного усвоения
оперативных данных о температуре поверхности
океана в акватории Мирового океана**

Пармузин Е.И., Агошков В.И., Лебедев С.А., Гусев А.В.

Институт вычислительной математики РАН

Введение

ИВМ РАН:

(Марчук Г.И., Агошков В.И., Залесный В.Б., Шутяев В.П., Дианский Н.А., Пармузин Е.И., Ботвиновский Е.А., Лебедев С.А., Захарова Н.Б., Ипатова В.М., Гусев А.В., Кочуров А.Г.)

- 2002-2003 - Разработка общей методики.
- 2004-2005 - Первые работы по ассимиляции температуры поверхности океана.
- 2005-2006 - Изучение проблем для полудискретных моделей.
- 2007 - Теоремы существования для «непрерывных уравнений».
- 2007 - Методы и технологии решения обратных гидротермодинамических задач вариационной ассимиляции температуры морской поверхности в океане .

Математическая модель

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g \cdot \text{grad} \xi + A_u \vec{u} + (A_k)^2 \vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} P_a - \frac{g}{\rho_0} \text{grad} \int_0^z \rho_1(T, S) dz',$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^H \Theta(z) u dz \right) - m \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^H \Theta(z) \frac{n}{m} v dz \right) = f_3,$$
$$\frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S,$$

Где $\vec{f} = g \cdot \text{grad} G, \Theta(z) \equiv \frac{r(z)}{R}, \quad r = R - z, \quad 0 < z < H.$

(В.И. Агошков, А.В. Гусев, Н.А. Дианский, 2007)

Граничные условия на поверхности

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left(\int_0^H \Theta \vec{u} dz \right) \vec{n} + \beta_0 m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega, \\
 U_n^{(-)} u - \nu \frac{\partial u}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k u = \tau_x^{(a)} \rho_0, \quad U_n^{(-)} v - \nu \frac{\partial v}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} A_k v = \tau_y^{(a)} \rho_0, \\
 A_k u = 0, \quad A_k v = 0, \\
 U_n^{(-)} T - \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T + U_n^{(-)} d_T, \\
 U_n^{(-)} S - \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S (S - S_a) = Q_S + U_n^{(-)} d_S.
 \end{array} \right.$$

Если функция $\phi = (u, v, \xi, T, S)$ известна, вычисляем:

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{r} \left(m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^H r u dz' \right) + m \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{n}{m} \int_z^H r v dz' \right) \right), (x, y, z, t) \in D \times (0, \bar{t}),$$

$$P(x, y, z, t) = P_a(x, y, t) + \rho_0 g(z - \xi) + \int_0^z g \rho_1(T, S) dz'.$$

Отметим, что для $U_n \equiv \underline{U} \cdot \underline{N}$ (здесь $U = (u, v, w)$) всегда выполнено

$$U_n = 0 \text{ на } \Gamma_{c,w} \cup \Gamma_H.$$

Задача I: Аппроксимация модели методом расщепления

Шаг 1. Рассмотрим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_t + (\bar{U}, \mathbf{Grad})T - \mathbf{Div}(\hat{a}_T \cdot \mathbf{Grad} T) = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ T = T_{j-1} \text{ для } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\ \bar{U}_n^{(-)}T - \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_T (T - T_a) = Q_T + \bar{U}_n^{(-)}d_T \text{ на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}_n^{(-)}T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = \bar{U}_n^{(-)}d_T + Q_T \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j), \\ T_j \equiv T \text{ на } D \times (t_{j-1}, t_j). \end{array} \right.$$

Задача I: Аппроксимация модели методом расщепления

Шаг 2.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S_t + (\bar{U}, \mathbf{Grad})S - \mathbf{Div}(\hat{a}_S \cdot \mathbf{Grad} S) = f_S \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\
 S = S_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\
 \bar{U}_n^{(-)}S - \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + \gamma_S(S - S_a) = Q_S + \bar{U}_n^{(-)}d_S \text{ на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\
 \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\
 \bar{U}_n^{(-)}S + \frac{\partial S}{\partial N_S} = \bar{U}_n^{(-)}d_S + Q_S \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\
 \frac{\partial S}{\partial N_S} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j), \\
 S_j \equiv S \text{ на } D \times (t_{j-1}, t_j).
 \end{array} \right.$$

Задача I: Аппроксимация модели методом расщепления

Шаг 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_t^{(1)} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \underline{u}^{(1)} - g \cdot \mathbf{grad} \xi = g \cdot \mathbf{grad} G - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} \left(P_a + g \int_0^z \rho_1(\bar{T}, \bar{S}) dz' \right) \\ \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \xi_t - \mathbf{div} \left(\int_0^H \Theta \underline{u}^{(1)} dz \right) = f_3 \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}^{(1)} = \underline{u}_{j-1}, \xi = \xi_{j-1} \text{ в } t = t_{j-1}, \\ \left(\int_0^H \Theta \underline{u}^{(1)} dz \right) \cdot n + \beta_0 m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}_j^{(1)} \equiv \underline{u}^{(1)}(t_j) \text{ в } D \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_t^{(2)} + \begin{bmatrix} 0 & -f_1(\bar{u}) \\ f_1(\bar{u}) & 0 \end{bmatrix} \underline{u}^{(2)} = 0 \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}^{(2)} = \underline{u}_j^{(1)} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\ \underline{u}_j^{(2)} \equiv \underline{u}^{(2)}(t_j) \text{ в } D. \end{array} \right.$$

Задача I: Аппроксимация модели методом расщепления

Шаг 3. (продолжение)

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_t^{(3)} + (\bar{U}, \mathbf{Grad}) \underline{u}^{(3)} - \mathbf{Div}(\hat{a}_u \cdot \mathbf{Grad}) \underline{u}^{(3)} + (A_k)^2 \underline{u}^{(3)} = 0 \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ \underline{u}^{(3)} = \underline{u}^{(2)} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \\ \bar{U}_n^{(-)} \underline{u}^{(3)} - v_u \frac{\partial \underline{u}^{(3)}}{\partial z} - k_{33} \frac{\partial}{\partial z} (A_k \underline{u}^{(3)}) = \frac{\underline{\tau}^{(a)}}{\rho_0}, A_k \underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_S \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(3)} = 0, \frac{\partial U^{(3)}}{\partial N_u} \cdot \underline{\tau}_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \underline{u}^{(3)} \right) \cdot \underline{\tau}_w = 0, A_k \underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}_n^{(-)} (\tilde{U}^{(3)} \cdot \underline{N}) + \frac{\partial \tilde{U}^{(3)}}{\partial N_u} \cdot \bar{N} + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \underline{u}^{(3)} \right) \cdot \bar{N} = \bar{U}_n^{(-)} d, A_k \underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}_n^{(-)} (\tilde{U}^{(3)} \cdot \bar{\tau}_w) + \frac{\partial \tilde{U}^{(3)}}{\partial N_u} \cdot \bar{\tau}_w + \left(\frac{\partial}{\partial N_k} A_k \underline{u}^{(3)} \right) \cdot \bar{\tau}_w = 0, A_k \underline{u}^{(3)} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ \frac{\partial \underline{u}^{(3)}}{\partial N_u} = \frac{\underline{\tau}^{(b)}}{\rho_0} \text{ на } \Gamma_H \times (t_{j-1}, t_j), \end{array} \right.$$

где $\underline{u}^{(3)} = (u^{(3)}, v^{(3)})$, $\underline{\tau}^{(a)} = (\tau_x^{(a)}, \tau_y^{(a)})$, $U^{(3)} = (u^{(3)}, w^{(3)}(u^{(3)}, v^{(3)}))$, $\tilde{U}^{(3)} = (u^{(3)}, 0)$, $\underline{\tau}^{(b)} = (\tau_x^{(b)}, \tau_y^{(b)})$.

Задача I: Аппроксимация модели методом расщепления

Методы расщепления (Г.И. Марчук) используются для
аппроксимации подзадач на Шагах 1-3

Шаг 1.

$$(T_1)_t + L_1 T_1 = F_1, \quad t \in (t_{j-1}, t_j),$$

$$T_1 = T_{j-1} \quad \text{при} \quad t = t_{j-1}$$

$$(T_2)_t + L_2 T_2 = F_2 + BQ_T, \quad t \in (t_{j-1}, t_j),$$

$$T_2(t_{j-1}) = T_1(t_j).$$

$$T_2(t_j) \equiv T_j \cong T \quad \text{при} \quad t = t_j.$$

Обратная задача и ассимиляция оперативных данных наблюдений поверхностной температуры

Допустим, что единственная функция, полученная с помощью обработки данных наблюдений – это функция T_{obs} на подобласти $\Omega_0^{(j)}$ области Ω при $t \in (t_{j-1}, t_j)$, $j=1, 2, \dots, J$. Пусть по физическому смыслу функция $T_{obs} = T_{obs}^{(j)}$ аппроксимирует данные СТТ на $\Omega_0^{(j)}$, т.е функцию $T|_{z=0}$. Пусть функция $T_{obs}^{(j)}$ известна только на части области $\Omega \times (0, \bar{t})$, т.е на $\Omega_0^{(j)}$ при $t \in (t_{j-1}, t_j)$ и мы определим характеристическую функцию $m_0^{(j)}$. Вне данной области считаем функцию $T_{obs}^{(j)}$ тривиальной.

Определим функция потока тепла с поверхности океана Q как ”дополнительную неизвестную” на $\{\Omega_0^{(j)}\}$ (предполагаем, что Q известна на $\{\Omega \setminus \Omega_0^{(j)}\}$) и сформулируем обратную задачу в виде: *найти решение ϕ Проблемы I и функцию Q , такие что, $m_0^{(j)}(T - T_{obs}^{(j)}) = 0$.*

Задача ассимиляции данных температуры поверхности океана

Рассмотрим функционал вида:

$$J_{\alpha} \equiv J_{\alpha}(Q, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega_0(t)} \alpha |Q - Q^{(0)}|^2 d\Omega dt + J_0(\phi) = \sum_{j=1}^J J_{\alpha, j}$$

$$J_0(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega_0(t)} \alpha |T - T_{obs}|^2 d\Omega dt$$

$$J_{\alpha, j} = \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega_0^{(j)}} \alpha |Q - Q^{(0)}|^2 d\Omega dt + \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega_0^{(j)}} m_0^{(j)} |T - T_{obs}^{(j)}|^2 d\Omega dt$$

Здесь $\alpha \equiv \alpha(\lambda, \theta, t)$ регуляризирующая функция (возможно, что $\alpha(\lambda, \theta, t) = \text{const} \geq 0$) и может быть размерной величиной; $Q^{(0)} \equiv Q^{(0)}(\lambda, \theta, t)$ заданная функция.

Задача ассимиляции данных наблюдений ставится следующим образом: *найти решение ϕ Задачи I и функцию Q , такие что, функционал J_{α} принимает минимальное значение.*

Необходимое условие оптимальности состоит в последовательном решении задачи ассимиляции данных на интервалах $t \in (t_{j-1}, t_j)$, $j=1, 2, \dots, J$ (Agoshkov V.I., 2006). Метод решения может быть описан следующим образом:

STEP 1. Решаем систему уравнений, возникающую из условия минимизации функционала J_α . Данная система состоит из уравнений для T_1 , T_2 , Q и системы сопряженных уравнений:

$$\begin{cases} (T_2^*)_t + L_2^* T_2^* = B^* m_0^{(1)} (T - T_{obs}^{(1)}) & \text{в } D \times (t_0, t_1), \\ T_2^* = 0 & \text{при } t = t_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T_1^*)_t + L_1^* T_1^* = 0 & \text{в } D \times (t_0, t_1), \\ T_1^* = T_2^*(t_0) & \text{при } t = t_1 \end{cases}$$

$$\alpha(Q - Q^{(0)}) + T_2^* = 0 \quad \text{на } \Omega_0^{(1)} \times (t_0, t_1).$$

Функции T_2 , $Q(t_1)$ являются аппроксимациями функций T, Q полного решения Задачи I при $t > t_1$, и $T_2(t_1) \cong T(t_1)$ принимается за функцию начального условия при решении задачи на интервале (t_1, t_2) .

STEP 2. Решаем задачу для S :

$$S_t + (\bar{U}, \mathbf{Grad})S - \mathbf{Div}(\hat{a}_S \cdot \mathbf{Grad} S) = f_S \quad \text{в } D \times (t_0, t_1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями. После этого функция S принимается как приближенное решение задачи, и $S(t_1)$ принимается за начальное условие задачи на интервале (t_1, t_2) .

STEP 3. Решается система уравнений блока расчета скоростей.

Итерационный процесс

При вычислении $Q^{(k)}$ решаются все подзадачи из Шага 1, сопряженная система уравнений для данного шага и определяется новое приближение $Q^{(k+1)}$

$$Q^{(k+1)} = Q^{(k)} - \gamma_k^{(j)} (\alpha(Q^{(k)} - Q^{(0)}) + T_2^*) \quad \text{on } \Omega_0^{(j)} \times (t_{j-1}, t_j).$$

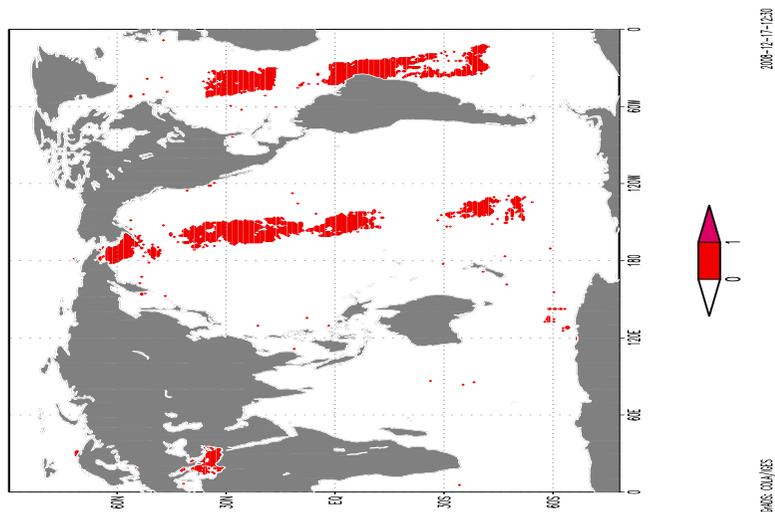
В силу установленного свойства плотной разрешимости в качестве параметров $\{\gamma_k\}$ могут быть выбраны параметры, вычисляемые по формуле при $\alpha \approx +0$:

$$\gamma_k^{(j)} = \frac{1}{2} \frac{\int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega_0^{(j)}} (T - T_{obs}^{(j)})^2 |_{\sigma=0} d\Omega dt}{\int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega_0^{(j)}} (T_2^*)^2 |_{\sigma=0} d\Omega dt}.$$

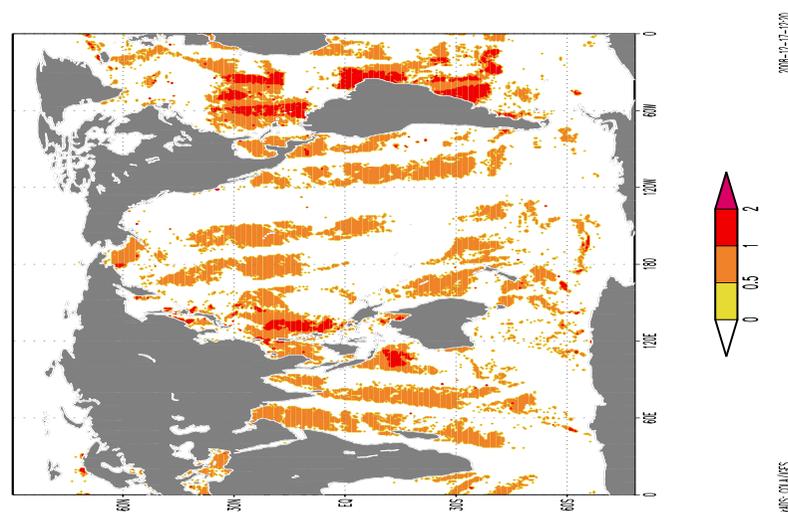
Численный эксперимент

- В качестве объекта моделирования рассматривается акватория Мирового Океана. Параметры рассматриваемой области и ее географические координаты могут быть описаны следующим образом: сетка $360 \times 337 \times 40$ точки (широта \times долгота \times глубина). Первая точка сетки – точка с координатами 22.5 (градусов восточной долготы) и 78.25 (градусов южной широты). Шаги сетки по x и y по постоянны и равны соответственно 1.0 и 0.5 градуса. Шаг по времени $\Delta t = 1$ час.
- В качестве T_{obs} использовались данные поверхностной температуры Мирового Океана, полученные в ГЦ РАН (Лебедев С.А.), за 2004 г. в каждый момент времени на рассматриваемой сетке (т.е. каждый час). В качестве $Q^{(0)}$ использовался среднеклиматический поток, полученный по данным реанализа NCEP (National Centers for Environmental Prediction).
- С помощью представленной модели гидротермодинамики океана, дополненной ``блоком ассимиляции" поверхностной температуры T_{obs} были проведены расчеты на акватории Мирового Океана, в которых работала процедура усвоения. Расчет включал в себя ассимиляцию T_{obs} сроком от 1 до 3 месяцев (начиная с января 2004 г.).

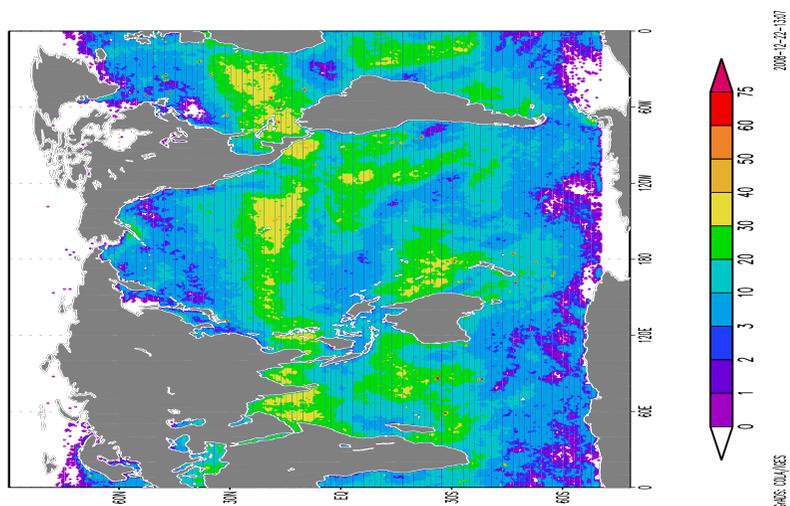
Количество данных наблюдений за определенный период времени



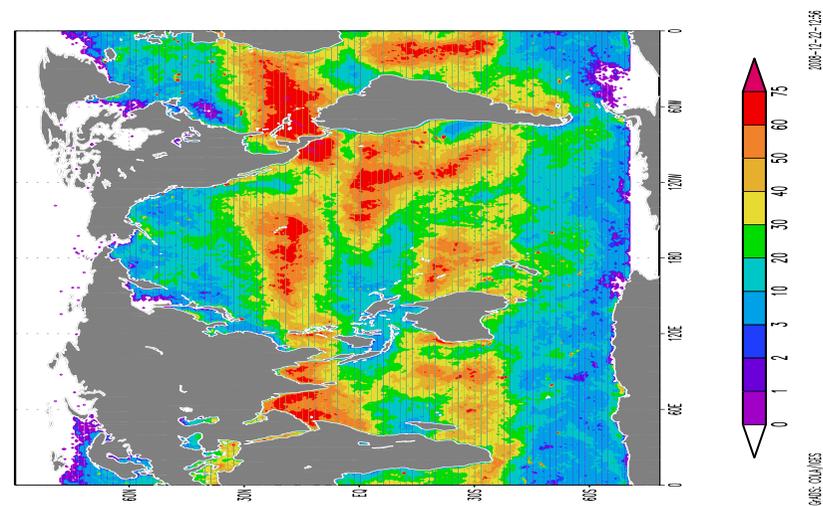
За 1 час



За 6 час

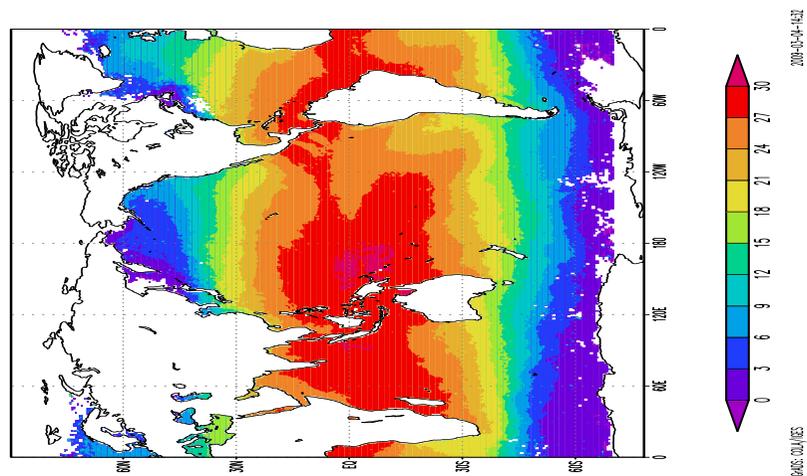


За 15 дней

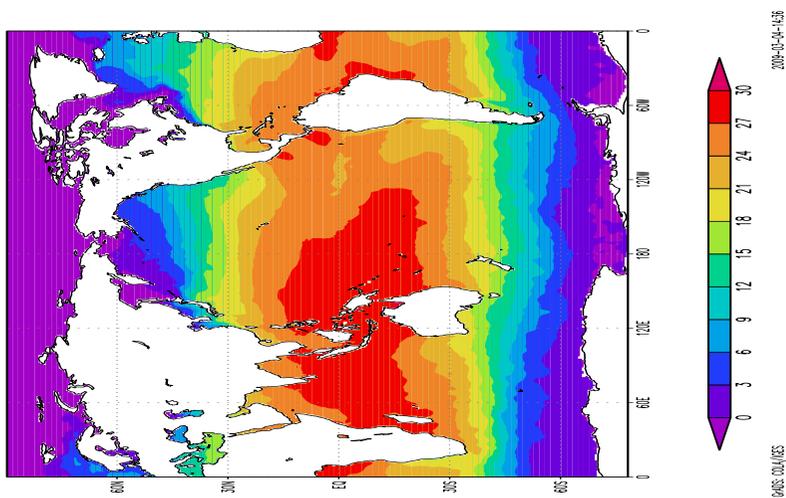


За месяц

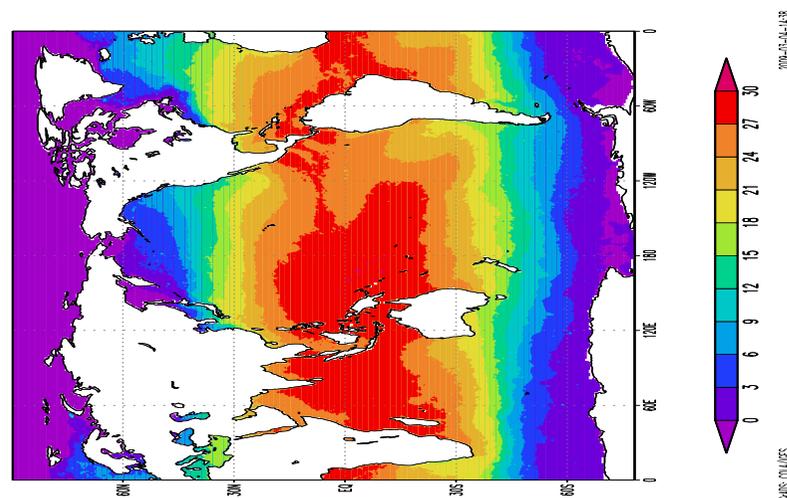
Эксперимент с расчетом на месяц (расчет с 1 января)



Данные наблюдений

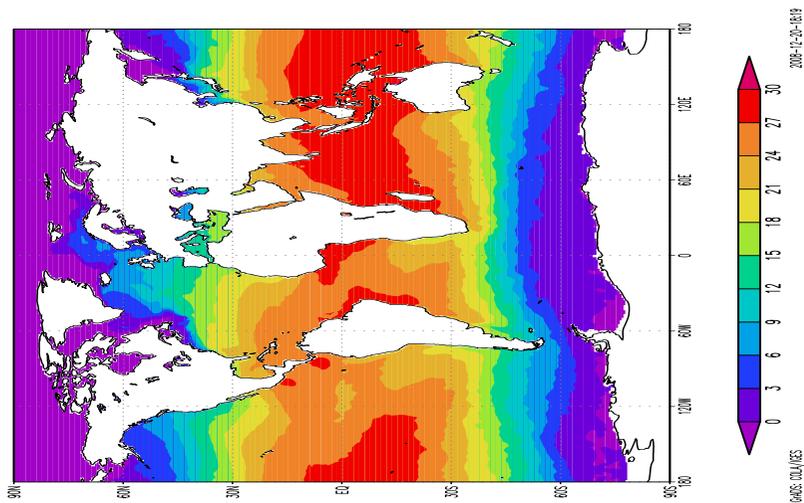


Расчет без усвоения

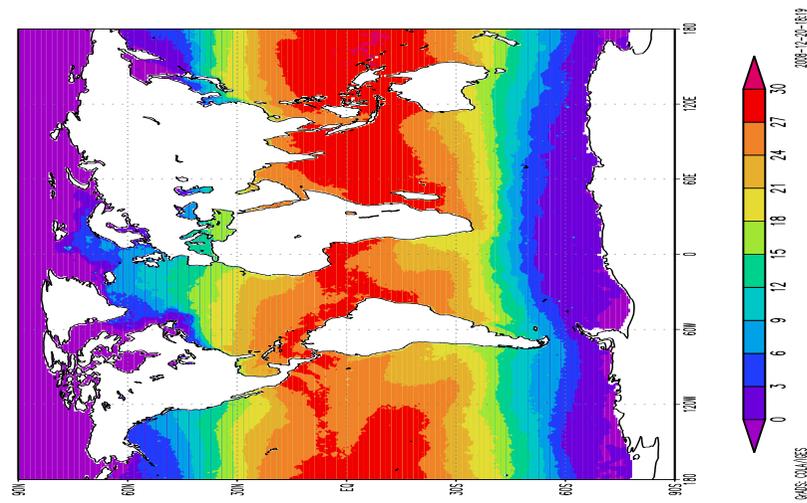


Расчет с блоком усвоения

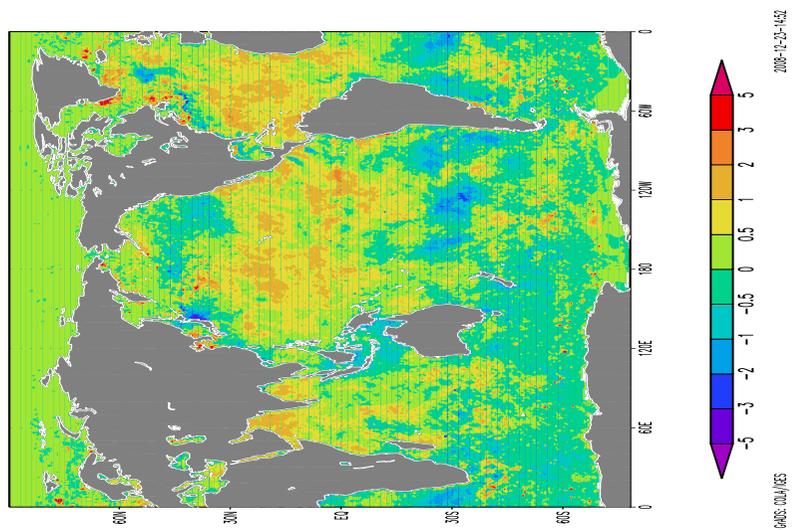
Эксперимент с расчетом на месяц (расчет с 1 января)



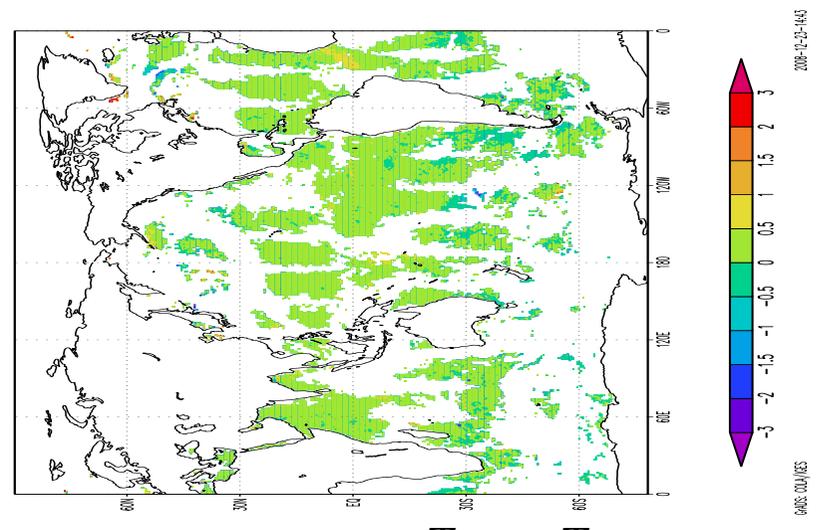
Расчет без усвоения



Расчет с усвоением

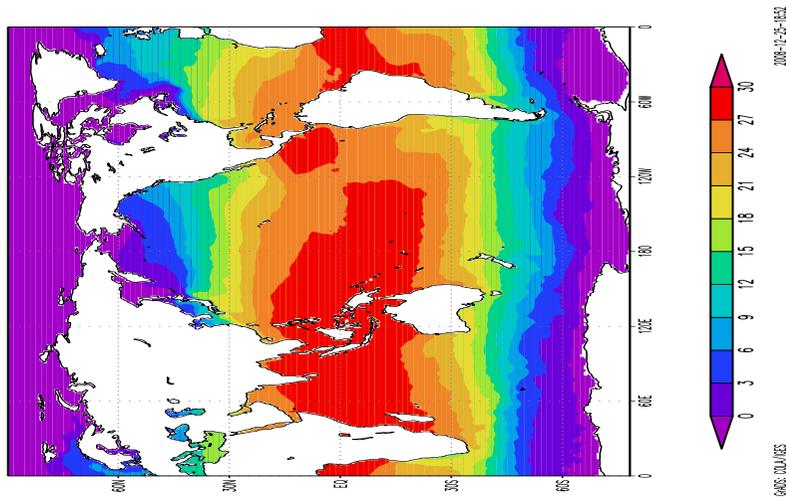


Разность $T_{\text{assim}} - T_{\text{model}}$

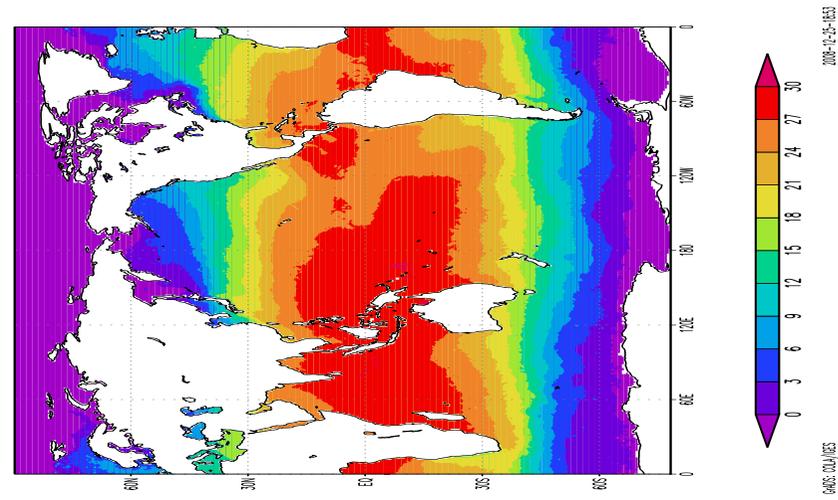


Разность $T_{\text{assim}} - T_{\text{obs}}$

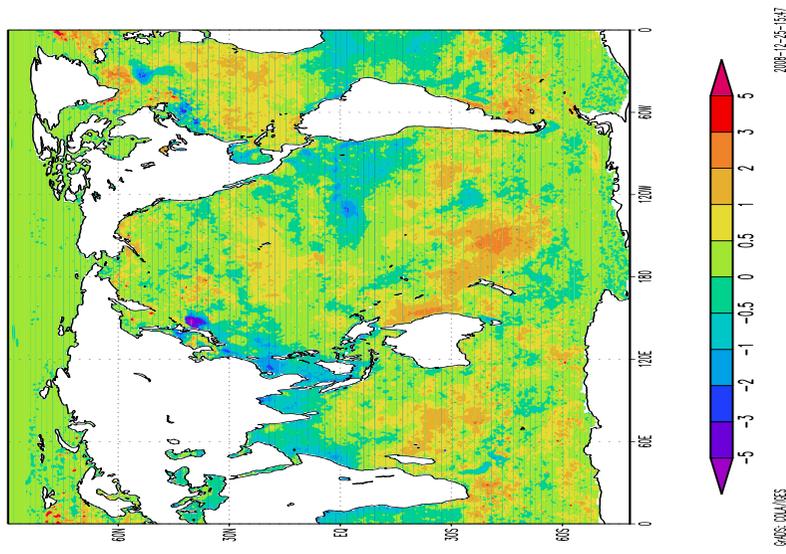
Эксперимент с расчетом на 3 месяца (расчет с 1 января)



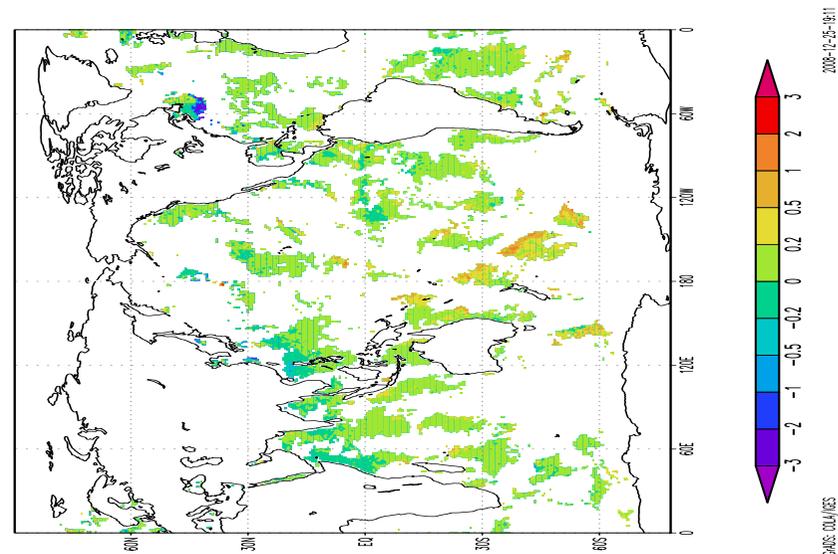
Расчет без усвоения



Расчет с усвоением



Разность $T_{\text{assim}} - T_{\text{model}}$



Разность $T_{\text{assim}} - T_{\text{obs}}$

Заключение

- Сформулирована и исследована задача вариационной ассимиляции данных (близких к оперативным) о поверхностной температуре океана с целью вычисления потоков тепла на поверхности с использованием разработанной в ИВМ РАН глобальной трехмерной модели гидротермодинамики океана.
- Разработаны и обоснованы алгоритмы численного решения задачи, которые практически могут быть реализованы совместно с решением прямой задачи. Создан блок ассимиляции данных, который был включен в глобальную трехмерную модель.
- Численные эксперименты подтверждают полученные теоретические выводы и продемонстрировали целесообразность работы модели с блоком усвоения.