

## Оптимизационная теория многопорогового декодирования для современных систем ДЗЗ

В.В. Золотарёв <sup>1</sup>, Р.Р. Назиров <sup>1</sup>, Г.В. Овечкин <sup>2</sup>, П.В. Овечкин <sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт космических исследований РАН,  
117997, Москва, Профсоюзная, 84/32  
E-mail: zolotasd@yandex.ru*

<sup>2</sup>*Рязанский государственный радиотехнический университет,  
390005, Рязань, Гагарина, 59/1  
E-mail: g\_ovechkin@mail.ru*

Рассмотрены основные методы коррекции ошибок, применяемые в современных системах передачи данных. Показано, что наилучшими по соотношению эффективности и сложности реализации являются многопороговые декодеры (МПД) самоортогональных кодов. Представлены характеристики данных методов в канале с АБГШ при использовании двоичной ФМ. Показано, что МПД и различные схемы на их основе обеспечивают эффективное декодирование используемых кодов даже при очень высоких уровнях шума в канале. Предложены не-двоичные МПД, позволяющие исправлять ошибки в данных на уровне символов. Показано, что эффективность таких алгоритмов оказывается на несколько порядков лучше эффективности декодеров кодов Рида-Соломона по обеспечиваемой вероятности ошибки при одновременно существенно меньшей сложности реализации.

**Ключевые слова:** помехоустойчивое кодирование, самоортогональные коды, каскадные коды, многопороговые декодеры, энергетический выигрыш кодирования, канал связи, кодирование для ДЗЗ.

### Введение

Одной из наиболее важных и сложных задач, которую приходится решать при разработке систем дистанционного зондирования земли (ДЗЗ), является задача обеспечения безошибочности передачи и хранения огромных объемов цифровых данных, получаемых спутниками ДЗЗ. Несомненно, ведущую роль в обеспечении высокого уровня надёжности и качества передачи дискретной информации играют современные методы помехоустойчивого кодирования (Золотарёв и др., 2010).

За более чем полувековую историю развития теории и техники помехоустойчивого кодирования основные методы и подходы к решению главной проблемы этой научной дисциплины – максимально простого и одновременно очень эффективного декодирования – неоднократно и весьма существенно менялись. Если сначала ведущими направлениями теории кодирования были интересные разработки алгоритмов исправления ошибок на базе алгебры конечных полей, то затем после некоторого периода увлечения специалистов очень простыми и понятными мажоритарными методами наступила эра алгоритма Витерби (АВ). Этот алгоритм был с теоретической точки зрения максимально сложным, переборным, но настолько эффективным, что значительный период времени все развитие теории кодирования и создание конкретных устройств исправления ошибок для спутниковой связи было сконцентрировано именно на этом методе. Правда, использовать длинные коды для декодера Витерби было невозможно из-за проблемы экспоненциально растущей с увеличением длины кода сложностью декодирования.

Только появление в 1993 году турбо кодов показало специалистам, что практически полное использование ёмкости цифровых каналов связи оказывается уже вполне реальной

технической задачей. Множества турбо подобных и некоторых других кодов доказали, что уже действительно появились способы гораздо более эффективного использования пропускной способности очень дорогих космических, спутниковых и многих других цифровых каналов связи, чем это было возможно до сих пор.

Однако в настоящее время уже ясно, что турбо подобные и низкоплотностные (LDPC) коды всё же не решают проблему сложности декодирования. Более того, сегодня даже продолжающееся весьма быстрое развитие микроэлектронных технологий не позволяет утверждать, что в достаточно высокоскоростных каналах можно рекомендовать применение кодов этих типов. Во многих случаях декодеры для таких кодов будут гораздо более медленными, чем это требуется, или чрезмерно дорогими.

Вместе с тем, в нашей стране уже в течение 40 лет успешно развиваются одни из лучших по соотношению эффективности и сложности реализации многопороговые алгоритмы декодирования (МПД) (Золотарёв, 1981, 2006) блочных и свёрточных кодов. Они характеризуются значительными уровнями энергетического выигрыша и очень высоким быстродействием, требуемым в системах ДЗЗ. Данные методы при декодировании требуют в 10...100 раз меньшего числа операций по сравнению с другими сопоставимыми по эффективности методами (Золотарёв и др., 2004), причем эти операции могут быть полностью распараллелены при аппаратной реализации (Золотарёв, 2009). В результате разработанные на ПЛИС МПД этого типа могут обеспечивать декодирование со скоростью до нескольких Гбит/с, что уже сейчас полностью решает проблему эффективного кодирования в высокоскоростных каналах с большим уровнем шума.

### Двоичные многопороговые декодеры

Для иллюстрации основных принципов работы МПД, используемого для декодирования блочных или свёрточных самоортогональных кодов (СОК) (Золотарёв, 2006), рассмотрим схемы, реализующие операции кодирования и декодирования. Кодер для подобных кодов является простейшим устройством, состоящим только из регистров сдвига и сумматоров по модулю 2. Пример кодера для блочного СОК с кодовой скоростью  $R=1/2$  показан на рис. 1. Достаточно простым является и сам МПД, пример схемы реализации которого для такого же кода показан на рис. 2. Отметим, что данный декодер состоит только из информационного, синдромного и разностного регистров, сумматоров по модулю 2 и пороговых элементов, которые суммируют свои входы и сравнивают полученную сумму с порогом.

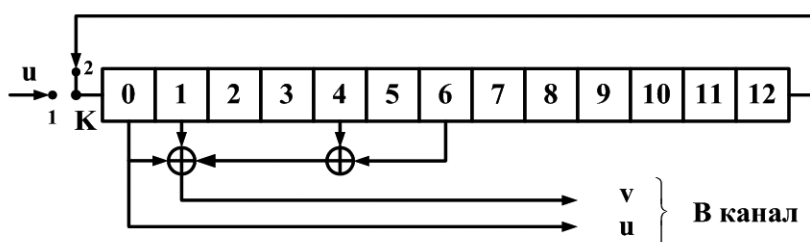


Рис. 1. Схема кодера блочного СОК

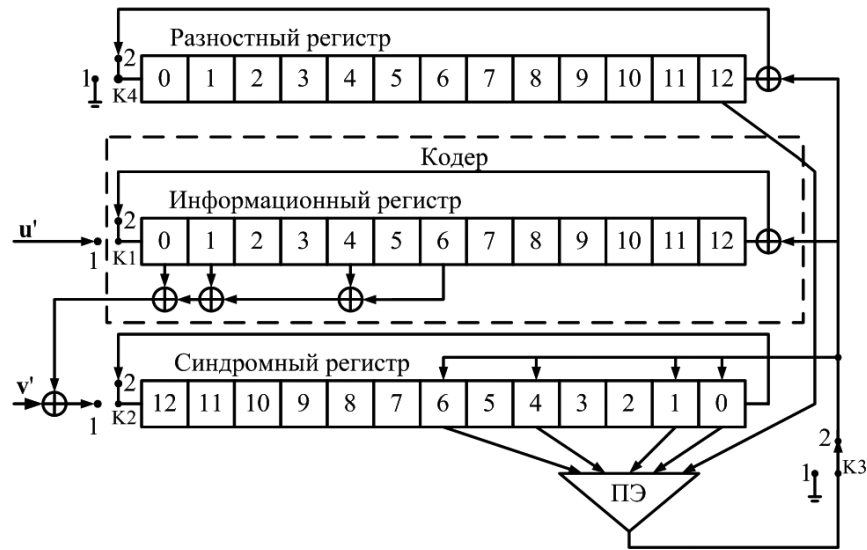


Рис. 2. Схема декодера МПД блочного кода с двумя итерациями

Отметим, что алгоритмы МПД представляют собой принципиально новое направление в теории и технике помехоустойчивого кодирования, названное авторами оптимизационным. Оно характеризуется тем, что и сами алгоритмы, и все шаги их проектирования, включающие методы поиска наилучших кодов, а также назначение тысяч весовых коэффициентов и некоторых других параметров декодера при его адаптации к выбранным кодам, являются процедурами поиска оптимального (экстремального) в каком-либо смысле значения функционала от очень большого числа переменных. Такой перенос сложности алгоритма с самой процедуры коррекции ошибок на все основные этапы его проектирования позволил обеспечить не только сохранение исходной минимальной сложности МПД декодера, но и значительное, на несколько десятичных порядков дополнительное снижение вероятности ошибки декодирования. В совокупности с другими методами и усовершенствованиями это и позволило добиться высокой производительности МПД декодеров, реализующих принципы оптимизации в процессе коррекции ошибок.

Перечислим кратко основные свойства и возможности МПД алгоритмов в каналах гауссовского типа, наиболее сложных для эффективного декодирования, соответствующих, в основном спутниковым и космическим системам связи, и являющихся хорошим полем для сравнения алгоритмов коррекции ошибок.

Всю идеологическую базу оптимизационной теории кодирования заложила основная теорема многопорогового декодирования (МПД) (Золотарёв, 1981, 2006), которая утверждает, что при очень простой модификации известного порогового декодера (ПД) Мессе (Месси, 1966), которая и названа декодером МПД, при всех изменениях декодируемых символов происходит переход ко всё более правдоподобным решениям. В том случае, если найдено самое правдоподобное кодовое слово, оно и будет оптимальным решением. Достижение его обычно требует экспоненциально растущих с длиной кода вычислений, в то время как сложность МПД такая же, как и у исходного ПД Мессе, т.е. линейная. Философско-идеологическое значение этой теоремы с простейшей формулировкой и элементарным доказательством исключительно велико. Наличие алгоритма, который лучшее переборное решение может найти с линейной сложностью – это очень серьёзный результат. При этом

у разработчиков МПД изначально было чёткое понимание, что этот декодер всё же не является оптимальным. Иначе говоря, алгоритмы типа МПД могут прекратить изменение декодируемых символов раньше того момента, когда они достигнут решения оптимального декодера (ОД).

Поскольку МПД не является ОД, то второй по значимости успешно решённой задачей в теории оптимизационного декодирования оказывается проблема минимизации размножения ошибок (РО) при мажоритарном декодировании. При использовании этих методов обычно ошибки появляются пакетами, что и препятствовало всегда любым попыткам повторной коррекции ошибок (Золотарёв, 2006). Но оказалось, что можно прогнозировать степень группирования (пакетирования) ошибок при мажоритарном декодировании, оценивать его и в итоге управлять уровнем РО (Самойленко и др., 1981, 2006). Итогом решения этой сложнейшей задачи явилась возможность строить коды с минимальной подверженностью эффекту РО. Это в свою очередь позволило создавать уже такие МПД, которые улучшали решения в течение многих десятков итераций декодирования даже при весьма большом уровне шума. Эти МПД способны обеспечивать энергетический выигрыш кодирования (ЭВК), соответствующий оптимальному декодированию выбранных кодов, достигая при этом скорости декодирования в спутниковых каналах до 1 Гбит/с и выше даже на простых серийных ПЛИС (Золотарёв и др., 2009).

Дополнительно для МПД созданы схемы последовательного каскадного декодирования, аналогичные (Форни, 1970), в которых, как и в обычных схемах МПД, при всех изменениях информационных символов происходит переход ко всё более правдоподобным решениям, но уже для всего каскадного кода в целом (Золотарёв и др., 2011). Кроме того, уже очень давно разработаны параллельные каскадные схемы (Золотарёв, 1986), которые лишь много лет спустя были предложены при разработке турбо кодов.

На рис. 3 представлены возможности различных методов класса МПД, а также турбо кодов и кодов LDPC. Вертикальная линия  $C=1/2$  соответствует пропускной способности гауссовского канала с двоичной фазовой манипуляцией ФМ2 при использовании мягкого модема с 16 уровнями квантования принимаемых символов. По горизонтальной оси отложены отношения  $E_b/N_0$  в канале, а по вертикальной – вероятности ошибки декодирования на бит  $P_b(e)$ . Здесь кривой АВ представлены характеристики стандартного алгоритма Витерби (АВ) с  $K=7$ , кривая МПД-Х отражает возможности МПД, реализованного на ПЛИС Xilinx, а МПДmd2 – характеристики МПД, в простейшей каскадной схеме с кодами контроля по чётности. Кривая МПД-L показывает характеристики МПД при использовании длинного кода. Эффективность классической схемы каскадирования АВ с кодами Рида-Соломона (РС) представлена кривой АВ+РС, а возможности каскадных схем с МПД для длинных кодов отражены кривыми МПД-КК2 и МПД-КК3. Очень показательны кривые Турбо и Turbo-R. Первая относится к наилучшим возможностям турбо кодов, при декодировании которых все операции выполняются в соответствии с идеальным исходным алгоритмом. А вторая кривая показывает характеристики метода декодирования этих кодов, в котором применены упрощения, полезные при аппаратной реализации, например, на ПЛИС (характеристики декодера iCoding при 3,5 итерациях декодирования для турбо кода длиной 16384 бита и кодовой скорости 1/2, способного работать на скорости в 40 Мбит/с на ПЛИС XC2V2000-5). Из представленных данных видно, что реальные возможности декодеров для турбо кодов при таких упрощениях значительно ухудшаются. Далее LDPC – кривая для низкоплотностных кодов длиной 106 битов, которая показывает, что эти коды также можно декодировать до-

статочны успешно. Но соответствующие декодеры, учитывающие реальности создаваемой аппаратуры, работают далеко от предельных возможностей кодирования, определяемых пропускной способности канала, которая равна 0,5 при  $E_b/N_0 = 0,2$  дБ. Это демонстрируется кривой LDPC-R, показывающей эффективность декодера DVB-S2 LDPC кода длиной 64800 битов, реализованного в НИИР на ПЛИС Xilinx семейства Virtex 5 и способного работать на скорости до 45 Мсим/с. И, наконец, M\_NewK – оценка характеристик нового МПД для длинного каскадного кода. Он также может быть реализован как быстродействующая схема. Сравнение всех кривых показывает, что МПД является наиболее простой и самой быстрой схемой декодирования двоичных кодов, одновременно обеспечивающей высокий энергетический выигрыш кодирования.

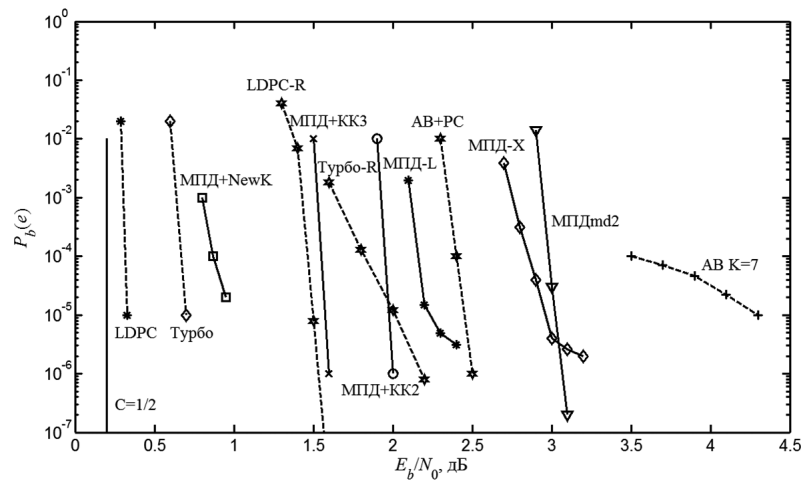


Рис. 3. Характеристики методов коррекции ошибок для кодов с  $R=1/2$

### Недвоичные многопороговые декодеры

Другим важнейшим результатом оптимизационной теории кодирования является создание авторами символьных (недвоичных) кодов и специальных символьных МПД декодеров для этих кодов, обозначаемых далее как QМПД (Золотарёв, 2006-2008). Отметим, что эти коды и QМПД алгоритмы – важнейшие последние результаты теории помехоустойчивого кодирования вообще и оптимизационной теории кодирования в частности. Как известно, для недвоичных кодов, наиболее часто применяемые среди которых, конечно, коды Рида-Соломона (РС), фактически нельзя построить оптимальные декодеры (ОД). В то же время QМПД совершенно естественно, как и его двоичный прототип, во многих случаях при весьма высоком уровне шума достигает на основе простых итеративных процедур решения ОД на довольно длинных символьных кодах (Золотарёв, 2006). Отметим, что для QМПД алгоритмов уже очень давно известны все основные характеристики по сложности и эффективности (Золотарёв и др., 2006 – 2008). Эти алгоритмы обладают линейной от длины кода сложностью и гораздо эффективнее кодов РС, которые только и применяются сейчас в цифровой технике. За рубежом символьные коды и декодеры вообще неизвестны.

Рассмотрим возможности декодеров для длинных недвоичных кодов. Полезно подчеркнуть, что объём моделирования в нижних точках графиков для QМПД составлял от

$5 \cdot 10^{10}$  до  $2 \cdot 10^{12}$  битов, что свидетельствует о крайней простоте метода. Очень небольшие затраты на декодирование в QМПД ещё более повышают привлекательность их применения для различных систем. Например, обычные ПК позволяют без применения специальных мер набрать примерно за час статистику декодированных данных для программных QМПД объёмом  $\sim 10^{10}$  битов.

На рис. 4 представлены зависимости вероятности ошибки на символ  $P_s(e)$  от вероятности символьной ошибки  $P_0$  в qСК для кодов Рида-Соломона, которые обозначены как РС $n$ , где  $n$  – длина кода, выраженная в числе символов. Отметим, что реально в технических системах сейчас используются только коды РС длины 255 или менее. Коды длины 4095 символов и, тем более, длины  $n=65535$  (каждый символ – размером 16 битов), в обозримом будущем, скорее всего не смогут быть реализованы.

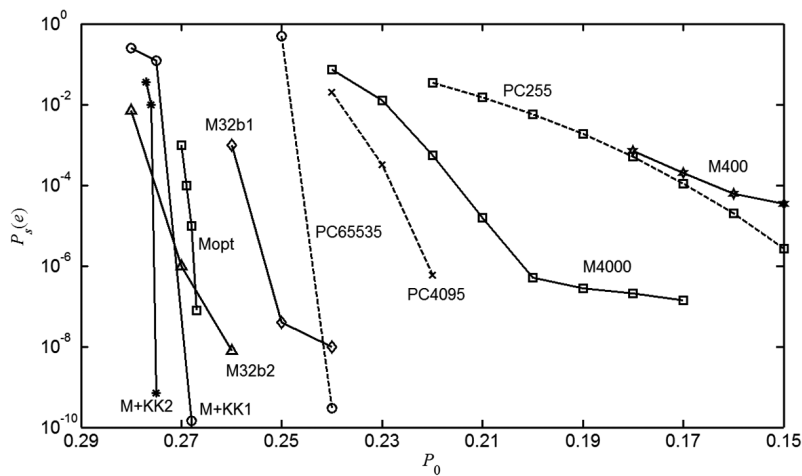


Рис. 4. Характеристики блочных символьных QМПД и кодов РС с  $R=1/2$

Здесь же пунктирными линиями показаны возможности кодов с мажоритарным декодированием при  $R=1/2$  для случая  $q=256$  (символ – один байт) для разных длин кодов, поскольку при любом  $q>2$ , как и в двоичном случае, для QМПД можно строить сколь угодно длинные коды с различными значениями кодового расстояния  $d$  и кодовой скорости  $R$ . Эти коды отмечены как M400 и M4000 с числами, обозначающими длины кодов, выраженные числом символов. Далее, обозначение M32b1 соответствует QМПД для кода длины 32000 символов. Как видно из рис. 4, возможности QМПД во всех случаях сопоставимы или лучше, чем у весьма сложных декодеров кодов РС. Более того, очень простой для реализации последний декодер для кода длины 32000 оказывается способным обеспечить простейшими мажоритарными методами помехоустойчивость, принципиально недостижимую даже для кода РС длины 65535 двухбайтовых символов, декодер для которого не будет создан никогда. А если перейти к двухбайтовым символьным кодам с мажоритарным декодированием, то его характеристики для длины кода 32000 символов будут соответствовать графику M32b2, ещё более показательному по уровню помехоустойчивости в области, где коды РС уже совершенно не работают. При этом QМПД для двухбайтовых символов практически ни в чём не сложнее однобайтового и даже будет немного быстрее однобайтового. Ещё более быстрым будет QМПД для четырёхбайтовых символов и т. д..

Для QМПД дополнительно предложен ряд подходов к повышению его эффективности. В частности, в (Овечкин и др., 2009) предложен алгоритм оптимизации структуры кода,

позволяющий найти коды, для которых QМПД обеспечивает лучшую корректирующую способность при большом уровне шума в канале связи. Это, как и во многих других случаях построения новых кодов для МПД, было достигнуто за счёт дальнейшего снижения уровня РО в создаваемых кодах. Зависимость вероятности ошибки декодирования на символ для одного из таких найденных кодов длиной 32000 однобайтовых символов отражена на рис. 4 кривой Mort. Отметим, что только за счет выбора лучшей структуры кода удалось повысить долю исправляемых байтовых ошибок до 26,5% без усложнения декодера. Характеристики каскадных схем коррекции ошибок, предложенных в (Овечкин и др., 2009), в которых совместно с QМПД используется новый недвоичный код Хэмминга, иллюстрируются кривой М+КК1. Заметим, что при использовании данного способа каскадирования можно обеспечить вероятность ошибки декодирования менее  $10^{-9}$  почти при 27% ошибок в канале для однобайтовых символов. Еще лучшую эффективность показывает схема каскадирования, в которой совместно с QМПД используется недвоичный однобайтовый СОК (кривая М+КК2).

### Заключение

Характеристики двоичных и символьных МПД в каналах с большим уровнем шума показывают большие возможности оптимизационной теории помехоустойчивого кодирования. МПД позволяют достигать высоких характеристик энергетической эффективности при весьма малой сложности реализации и очень высоком быстродействии. Получаемый с помощью алгоритмов МПД разных типов уровень помехоустойчивости позволяет решать задачи обеспечения высокой надежности хранения данных без какой-либо дополнительной доработки этих алгоритмов или всего лишь при незначительной их адаптации к возможным дополнительным требованиям, возникающим при передаче и хранении огромных объемов данных в системах ДЗЗ.

Демопрограммы многих рассмотренных в статье декодеров вместе с детальными инструкциями по их использованию представлены на специализированных веб-сайтах [www.mtdbest.ru](http://www.mtdbest.ru) и [www.mtdbest.iki.rssi.ru](http://www.mtdbest.iki.rssi.ru).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №08-07-00078), ИКИ РАН, РГРТУ и МНИТИ.

### Литература

1. Золотарёв В.В. Параллельное кодирование в каналах СПД // Вопросы кибернетики, 1986, Вып. 120.
2. Золотарёв В.В. Способ декодирования помехоустойчивого кода // Патент на изобретение №2377722, БИ № 36, 2009.
3. Золотарёв В.В. Теория и алгоритмы многопорогового декодирования // Под редакцией члена-корреспондента РАН Ю.Б. Зубарева. М.: «Радио и связь», «Горячая линия – Телеком», 2006, 276 с.
4. Золотарёв В.В., Зубарев Ю.Б., Овечкин Г.В. Развитие теории каскадных алгоритмов многопорогового декодирования // Пленарный доклад. В сб.: 13-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и её применение». М., 2011. С.18–21.
5. Золотарёв В.В., Зубарев Ю.Б., Овечкин Г.В. Обзор методов помехоустойчивого кодирования с использованием многопороговых алгоритмов // Цифровая обработка сигналов, 2008, №1., с. 2–11.
6. Золотарев В.В., Назиров Р.Р., Овечкин Г.В., Овечкин П.В., Чулков И.В. Эффективное недвоичное многопороговое декодирование помехоустойчивых кодов для систем дистанционного зондиро-

- вания земли // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. Сборник статей, ИКИ РАН, 2010. Том. 7. №2. С. 269–274.
7. Золотарёв В.В., Назиров Р.Р., Чулков И.В., Овечкин Г.В. Алгоритмы МПД // Российский космос, 2009. №1. С. 60–63.
  8. Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Сложность реализации эффективных методов декодирования помехоустойчивых кодов // 6-я межд. конф. и выставка. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». М., 2004. Том 1. С.220–221
  9. Месси Дж. Пороговое декодирование. М.: Мир, 1966. 207 с.
  10. Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Использование недвоичного многопорогового декодера в каскадных схемах коррекции ошибок // Вестник РГРТУ. Рязань, 2009. №4, Вып. 30, с.7–12.
  11. Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Оптимизация структуры недвоичных самоортогональных кодов для схем параллельного кодирования // Труды НИИР, 2009. №2.
  12. Самойленко С.И., Давыдов А.А., Золотарёв В.В., Третьякова Е.И. Вычислительные сети. М.: «Наука», 1981. 276 с.
  13. Форни Д. Каскадные коды. Пер. с англ. под ред. Самойленко С.И.- М.: Мир, 1970, 208 с.
  14. Кузнецов Н.А., Золотарёв В.В., Овечкин Г.В., Овечкин П.В. Недвоичные многопороговые декодеры и другие методы коррекции ошибок в символьной информации // Радиотехника, 2010. №6. Вып. 141. С. 4–9.
  15. Zolotarev V.V., Nazirov R.R., Chulkov I.V. The Quick Almost Optimal Multithreshold Decoders for Noisy Gaussian Channels // RCSGSO International Conference ESA, Moscow, Russia, June, 2007.
  16. Золотарёв В.В., Назиров Р.Р., Чулков И.В. Оптимальное декодирование в Цифровых спутниковых каналах при дистанционном зондировании Земли // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2007. Выпуск 4. Том 1. С. 229-235.
  17. Золотарёв В.В., Назиров Р.Р. Сверхнадёжное исправление ошибок на основе МПД алгоритмов для баз данных систем ДЗЗ // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2008. Вып. 5. Том 1. С.267-272.

## Optimization multithreshold decoding theory for modern remote earth sensing systems

V.V. Zolotarev <sup>1</sup>, R.R. Nazirov <sup>1</sup>, G.V. Ovechkin <sup>2</sup>, P.V. Ovechkin <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Space Research Institute of RAS,  
117997, Moscow, 84/32, Profsoyuznaya Str.  
E-mail: zolotasd@yandex.ru

<sup>2</sup>The Ryazan State Radioengineering University,  
390005, Ryazan, 59/1, Gagarina str.  
E-mail: g\_ovechkin@mail.ru

The article deals with the most effective error-correction methods which are used in modern communication systems. It is shown that multithreshold decoders (MTD) for self-orthogonal codes are one of the best methods by effectiveness-complexity ratio criteria. The bit-error rate performance for MTDs over AWGN channel with BPSK modulation is presented. It is shown that MTDs and different schemes based on them provide effective decoding for used codes at very high noise ratio. Non-binary MTDs are discussed also. They allow correcting of symbolical errors in digital data. It is shown that the symbol-error rate performance of non-binary MTD is at some decimal exponents better than the performance of the best Reed-Solomon codes decoders at simultaneously lower implementation complexity.

**Keywords:** error-correction coding, self-orthogonal codes, concatenated codes, multithreshold decoders, coding gain, communication channel, coding for RES.