

Аксиально-симметричная модель неустойчивости типа торнадо

П.Б. Руткевич, П.П. Руткевич

*Институт космических исследований РАН
117997, Москва, Профсоюзная, 84/32
E-mail: pbrutkevich@gmail.com*

Построена аналитическая модель неустойчивости типа торнадо в аксиально-симметричной геометрии. Задача поставлена на основе всех пяти уравнений гидродинамики. Получено, что при наличии вращения такая система имеет две неустойчивости, одна – конвективная, другая – вращательная. При определённых значениях параметров эти две неустойчивости могут характеризоваться близкими волновыми числами. Этот случай описывает ситуацию, учитывающую совместное действие вращательной и конвективной неустойчивостей. Построено стационарное уравнение, описывающее соответствующий горизонтальный размер структуры, а также нестационарное уравнение, описывающее процесс её развития. Инкремент и волновое число этой объединённой конвективной и вращательной неустойчивости оказываются очень близкими к соответствующим значениям тонких смерчей.

Ключевые слова: вращательная неустойчивость, конвективная неустойчивость, торнадо, совместное действие неустойчивостей, стационарное уравнение, тонкий смерч.

Катастрофические атмосферные явления, такие как торнадо и тропические циклоны, интенсивно изучаются, однако на сегодняшний день теоретические основы их понимания далеки от завершения. Существует большое количество данных об этих явлениях, из которых ясно, что торнадо появляются из вращающихся воронкообразных облаков. Смерч может либо достигать поверхности земли, которая останавливает дальнейшее распространение, либо оставаться ограниченным в воздухе, не достигая поверхности земли (funnel cloud). Несмотря на умеренные размеры, торнадо считаются наиболее опасными атмосферными явлениями.

Как известно из наблюдений, торнадо появляется в изначально неподвижном воздухе. Конвекция – единственная известная неустойчивость в изначально неподвижном воздухе, однако сама по себе она не может описать возникновение торнадо. При учёте вращения и сжимаемости атмосферы существует ещё одна, так называемая вращательная, неустойчивость [1–3].

Рассмотрим полную систему гидродинамических уравнений [4] в сжимаемой атмосфере.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla P + g \rho \mathbf{e}_z + \rho 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) s = \kappa \Delta T. \quad (3)$$

Рассмотрим аксиально-симметричную задачу, ось которой направим вдоль направления силы тяжести. Введём представление поля скорости в виде суммы потенциального, тороидального и полоидального частей:

$$\mathbf{v} = \nabla \cdot \Phi + \nabla \times (\mathbf{e} \psi) + \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{e} \varphi)), \quad (4)$$

где \mathbf{e} – единичный вектор, направленный вертикально вверх, Φ , ψ , φ – потенциалы «потенциального», тороидального и полоидального полей скорости, которые являются скалярными

функциями времени и координат. В условиях аксиальной симметрии и вертикальной однородности задачи эти поля скорости описывают: «потенциальное» поле – радиальную компоненту скорости, тороидальное поле – азимутальную компоненту скорости и полоидальное поле – вертикальную компоненту скорости. В этих переменных уравнения (1)–(3) принимают вид:

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} - v \Delta \Delta \Phi + \frac{\Delta P_1}{\rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{g \rho_1}{\rho_0} \right] + 2\Omega \Delta_{\perp} \Psi = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Delta_{\perp} \Psi}{\partial t} - v \Delta \Delta_{\perp} \Psi - 2\Omega \Delta_{\perp} \Phi - 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Delta \Delta_{\perp} \Phi}{\partial t} - v \Delta \Delta \Delta_{\perp} \Phi + \frac{g}{c^2} \frac{\Delta_{\perp} P_1}{\rho_0} - \frac{g}{\rho_0} \Delta_{\perp} \rho_1 + 2\Omega \Delta_{\perp} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \Delta \Phi - \rho_0 \frac{g}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho_0 \frac{g}{c^2} \Delta_{\perp} \Phi = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \gamma \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \Delta_{\perp} \Phi \right) - \chi \frac{c_p}{c_v} \Delta P_1 + \chi c^2 \Delta \rho_1 = 0. \quad (9)$$

Считая решение аксиально-симметричным, выполним преобразование Фурье по горизонтальной координате и времени, дисперсионное соотношение, таким образом, будет зависеть от волнового числа k и инкремента x .

Считая решение аксиально-симметричным, выполним преобразование Фурье по горизонтальной координате и времени, дисперсионное соотношение, таким образом, будет зависеть от волнового числа k и инкремента x .

$$f_5(k)x^5 + f_4(k)x^4 + f_3(k)x^3 + f_2(k)x^2 + f_1(k)x + f_0(k) = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты дисперсионного соотношения $f_0(k) \dots f_5(k)$ как функции волнового числа k и параметров задачи имеют вид:

$$f_5(k) = k^4,$$

$$f_4(k) = vk^6 [3 + \kappa],$$

$$f_3(k) = k^4 \left[g\gamma + c^2 k^2 + 3k^4 v^2 + 3k^4 v^2 \kappa + (2\Omega)^2 \right],$$

$$f_2(k) = k^6 \left[2g\gamma v + 3c^2 k^2 v + k^4 v^3 + 3k^4 v^3 \kappa + k^2 v (2\Omega)^2 + k^2 v \kappa (2\Omega)^2 \right],$$

$$f_1(k) = k^4 \left[c^2 g\gamma k^2 + g\gamma k^4 v^2 + 3c^2 k^6 v^2 + k^8 \kappa v^2 (2\Omega)^2 \right],$$

$$f_0(k) = k^6 \left[\frac{g^2}{c^2} (\kappa - 1) v (2\Omega)^2 + k^2 c^2 g\gamma v + k^6 c^2 v^3 \right],$$

где $\kappa = c_p/c_v$, и $v = \chi$, $c = \sqrt{\kappa RT}$ – скорость звука.

Численный счёт показывает, что уравнение (10) имеет пять корней (зависимостей инкремента неустойчивости от волнового числа), при $\gamma < 0$ два из которых имеют положительные действительные части – это конвективная и вращательная неустойчивости. Остальные три решения – это еще один конвективный корень, однако он всегда отрицателен, и два звуковых корня, которые тоже всегда отрицательны.

Система уравнений (5)–(9) слишком громоздка, чтобы её исследовать аналитически. Дисперсионное уравнение (10) также слишком громоздко, таким образом, ограничимся исследованием неустойчивых корней системы (дисперсионного уравнения (10)), что существенно упростит задачу. Для этого необходимо считать неустойчивость слабой, чтобы пренебречь влиянием на решение остальных корней. Отметим, что дисперсионное уравнение содержит волновое число в квадрате, поэтому можно искать корни уравнения или его частей относительно квадрата волнового числа. В предположении малых корней дисперсионного уравнения его можно записать в виде.

$$f_1(k^2)x + f_0(k^2) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим вначале стационарное уравнение (11).

$$f_0(k^2) = (k^2)^3 \left[\frac{g^2}{c^2} (\kappa - 1) v (2\Omega)^2 + k^2 c^2 g \gamma v + (k^2)^3 c^2 v^3 \right] = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) описывает критические значения корней неустойчивостей. Этим корням должно быть два – один конвективный корень, второй корень вращательной неустойчивости. Найдём эти корни.

$$\frac{g^2}{c^2} (\kappa - 1) v (2\Omega)^2 + k^2 c^2 g \gamma v + (k^2)^3 c^2 v^3 = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) – это уравнение третьего порядка относительно k^2 , определим малый корень (корень вращательной неустойчивости). Для этого пренебрежём в уравнении (13) слагаемым со старшими степенями волнового числа и получим уравнение:

$$\frac{g^2}{c^2} (\kappa - 1) v (2\Omega)^2 + k^2 c^2 g \gamma v = 0. \quad (14)$$

Его решение имеет вид:

$$k^2 = \frac{g^2 (\kappa - 1) (2\Omega)^2}{c^2 g (-\gamma)}. \quad (15)$$

Этот корень описывает вращательная неустойчивость при условии, что находится вдали от конвективного корня.

Рассматривая несжимаемую жидкость. Из уравнения (13) получим

$$(k^2)^2 = \frac{g(-\gamma)}{v^2}. \quad (16)$$

Это, очевидно, конвективный корень в аксиально-симметричном случае.

Рассмотрим случай, когда оба эти неустойчивые корни находятся достаточно близко друг относительно друга. Для этого нужно решать уравнение (13) без вышеуказанных предположений. Однако следует иметь в виду, что корни сближаются только при специальном

выборе параметров задачи. Эти параметры нужно найти. Будем считать все параметры заданными кроме турбулентной вязкости воздуха. Тогда понятно, что уравнение (13) вблизи близких корней будет иметь вид параболы. Продифференцируем уравнение (13) по волновому числу в квадрате:

$$c^2 g \gamma v + 3(k^2)^2 c^2 v^3 = 0. \quad (17)$$

Положительный корень этого уравнения легко находится (подкоренное выражение положительно, поскольку $\gamma < 0$):

$$(k^2) = \sqrt{\frac{g(-\gamma)}{3v^2}}. \quad (18)$$

Подставляем корень (18) в уравнение (13) и ищем значение турбулентной вязкости воздуха, при которой корни сливаются в точку (т. е., рассматриваем случай кратных корней).

$$\frac{g^2}{c^2} (\kappa - 1) (2\Omega)^2 - \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{g(-\gamma)}{3}} \frac{g(-\gamma)c^2}{m} = 0. \quad (19)$$

Из этого соотношения получается критическое значение турбулентной вязкости воздуха, при которой начинается неустойчивость:

$$v_m = \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{g(-\gamma)}{3}} \frac{g(-\gamma)c^2}{\frac{g^2}{c^2} (\kappa - 1) (2\Omega)^2}. \quad (20)$$

Критическое значение квадрата волнового числа при этом получается равным:

$$(k_m^2) = \frac{3}{2} \frac{g}{c^4} \frac{(\kappa - 1) (2\Omega)^2}{(-\gamma)}. \quad (21)$$

При этом значении квадрата волнового числа кривая свободного члена (12) касается оси абсцисс, а при несколько меньшем значении вязкости парабола зависимости свободного члена от квадрата волнового числа (12) (вблизи оси абсцисс) немного опускается по ось абсцисс и уравнение (13) приобретает два корня, лежащих вблизи критического. Найдём эти корни. Разложим вязкость и волновое число вблизи их критических значений:

$$v = v_m - \delta_v, \quad (22)$$

$$k^2 = k_m^2 \pm \delta_K. \quad (23)$$

Получаем два уравнения. Складываем эти уравнения, и получаем связь между поправками δ_K и δ_v :

$$\frac{3v_m}{2k_m^2} \delta_K^2 = \delta_v. \quad (24)$$

Или с учётом выражений для v_m (20) и k_m^2 (21)

$$\sqrt{\frac{|\gamma|}{3g}} \frac{|\gamma|^3 c^{12}}{g^2 (\kappa - 1)^3 (2\Omega)^6} \delta_m^2 = \delta_v, \quad (25)$$

Радиус стационарной структуры, вызванной такой неустойчивостью, имеет вид:

$$r_m^2 = \sqrt{\frac{|\gamma|}{3g}} \frac{|\gamma|^3 c^{12}}{g^2 (\kappa - 1)^3 (2\Omega)^6 \delta_v}, \text{ или } r_m = \sqrt[4]{\frac{1}{3g|\gamma|}} \frac{|\gamma|^2 c^6}{g(\kappa - 1)^{3/2} (2\Omega)^3 \sqrt{\delta_v}}. \quad (26)$$

Из формулы (26) видно, что радиус вертикально однородной аксиально-симметричной структуры уменьшается прямо пропорционально кубу параметра вращения Кориолиса. Вычисления для случая близких корней дисперсионного уравнения выполнялись при следующих значениях параметров задачи.

Примем значения параметров атмосферы (все величины в системе СИ): скорость звука $c = 300$ м/с, сила Кориолиса $\Omega = 1/4$ 1/с, турбулентная вязкость $\nu = 50$ м²/с. При этих значениях параметров радиус торнадо получается 3976 м, что, конечно, слишком большой радиус. Однако следует иметь ввиду, что пока рассматривается линейная теория. Если увеличить вращение в системе вдвое (т. е., принять силу Кориолиса $\Omega = 1/2$ 1/с), то формула (26) даст радиус смерча 130 м. Что для линейной теории – уже весьма подходящий ответ.

Рассмотрим нестационарную задачу (11). Поскольку неустойчивость слабая, и мы рассматриваем решение вблизи критических значений параметров, можно подставлять в коэффициент при производной по времени сами критические значения этих параметров, пренебрегая поправками.

$$\frac{f_1(k_m^2)}{(k_m^2)^2} = \frac{g \left[27g(\kappa - 1)(2\Omega)^2 + c^2 \gamma_{ins} (3 + \kappa) (g \gamma_{ins} + 3(2\Omega)^2) \right]}{9c^2} = \text{const}$$

Уравнение (11) принимает вид:

$$\frac{f_1(k_m^2)}{(k_m^2)^2} x + \sqrt{\frac{\gamma_{ins}}{3g}} \frac{\gamma_{ins}^3 c^{12}}{g^2 (\kappa - 1)^3 (2\Omega)^6} \delta_m^2 = \delta_v. \quad (27)$$

Инкремент неустойчивости равен

$$\Gamma = \frac{(k_m^2)^2}{f_1(k_m^2)} \left(\delta_v - \sqrt{\frac{\gamma_{ins}}{3g}} \frac{\gamma_{ins}^3 c^{12}}{g^2 (\kappa - 1)^3 (2\Omega)^6} \delta_m^2 \right). \quad (28)$$

Для выбранных численных значений параметров атмосферы формула (28) даёт для инкремента неустойчивости $\Gamma \approx 0,00083$ с⁻¹. Что соответствует времени развития неустойчивости 17 мин. Сделаем обратное преобразование Фурье в уравнении (27), учитывая, что волновое число разложено (23), и получим уравнение, описывающее временную зависимость неустойчивости

$$\frac{f_1(k_m^2)}{(k_m^2)^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sqrt{\frac{\gamma_{ins}}{3g}} \frac{\gamma_{ins}^3 c^{12}}{g^2 (\kappa - 1)^3 (2\Omega)^6} \Delta_K^2 \varphi = \delta_v \varphi. \quad (29)$$

На основе рассмотренной задачи получается следующий сценарий развития смерча. Вначале было вращающееся облако (мезоциклон) с параметром Кориолиса. При больших значениях турбулентной вязкости воздуха неустойчивости нет. Если по какой-либо причине

параметры в облаке изменяются, например, увеличивается вертикальный конвективный градиент температуры, граничное значение вязкости ν , формула (20), при котором могут одновременно существовать конвективная и вращательная неустойчивости увеличивается и достигает значения, которое было в облаке изначально. Тогда фактически развиваются сразу две неустойчивости, при этом значении вязкости они имеют близкие критические волновые числа неустойчивостей, то есть горизонтальный размер конвективной ячейки и смерча практически совпадают. На рис. 1 представлены численные кривые коэффициентов уравнения (11) – зависимость свободного члена $f_0(k^2)$ как функция квадрата волнового числа вблизи оси абсцисс (сплошная кривая) и зависимость коэффициента при первой производной по времени $f_1(k^2)$ как функция квадрата волнового числа (пунктирная кривая). Отметим, что кривая зависимости коэффициента при первой производной по времени всегда пересекает ось абсцисс между (близкими) корнями стационарной дисперсионной кривой $f_0(k^2)$.

Инкремент и волновое число объединённой конвективной и вращательной неустойчивостей очень близки к соответствующим значениям тонких смерчей. Получено критическое значение вязкости, при которой атмосфера в этом случае теряет устойчивость. Это значение вязкости определяется величиной градиента температуры и параметра Кориолиса. Такие значения параметров для атмосферы встречаются не очень часто, отсюда можно заключить, что явление торнадо должно быть достаточно редким явлением.

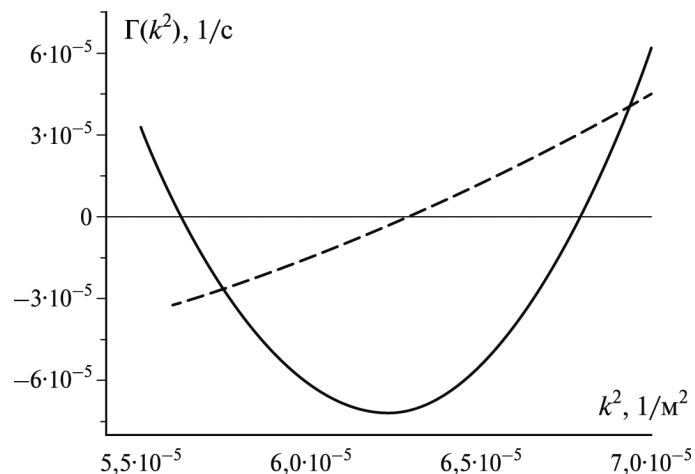


Рис. 1. Дисперсионная кривая вблизи оси абсцисс для случая близких корней дисперсионного уравнения (сплошная кривая). Зависимость коэффициента при первой производной по времени как функция волнового числа (пунктирная кривая)

Литература

1. Rutkevich P.B., Rutkevych P.P. Tornado-type stationary vortex with nonlinear term due to moisture transport // Advances in Science and Research. 2010. V. 4. P. 77–82.
2. Руткевич П.Б., Руткевич П.П. Нелинейное вихревое течение в вертикальном канале, обусловленное асимметрией вертикального переноса влажности // Современ. проблемы дистанц. зондирования Земли из космоса. 2010. Т. 7. № 1. С. 149–156.
3. Rutkevich P.B., Rutkevych P.P. Oscillatory instability in vertically-homogeneous atmosphere // Advanced Geosciences (ADGEO). 2009. V. 15. P. 57–63.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1986. 733 с.

Axially symmetric model of tornado type instability

P.B. Rutkevich, P.P. Rutkevych

*Space Research Institute of RAS
117997, Moscow, Profsoyuznaya, 84/32
E-mail: pbrutkevich@gmail.com*

An analytical model of tornado type instability in axisymmetric geometry is formulated. The problem set on the basis of the five equations of hydrodynamics. It was obtained that in the presence of rotation, such a system has two instabilities, one of instability – convective, and another – the rotational. It was found that under certain parameters, these two instabilities can be characterized by close wave numbers. This case describes a situation that takes into account the combined effect of rotational and convective instabilities. A steady-state equation describing the appropriate size of the horizontal structure and time-dependent equation describing the process of its development were obtained. Growth rate and wave number of the combined convective and rotational instability turn to be very close to the corresponding values of thin tornadoes.

Keywords: rotational instability, convective instability, tornado, combined effect of instabilities, steady-state equation, thin tornado.