Агошков В.И.

Задачи ассимиляции «образов», полученных дистанционным зондированием, и методы их решения

Институт вычислительной математики РАН

Таруса 2010

Введение

- Теория и приложения обратных задач (А.Н.Тихонов, В.К.Иванов, М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, В.В.Васин, А.М.Денисов, С.И. Кабанихин, А.Хасанов, А.В.Гончарский, В.Г.Яхно и др.)
- Вариационная ассимиляция данных наблюдений – специальная процедура замыкания в обратных задачах, базирующаяся на классической теории обратных задач, методах и подходах теории сопряженных уравнений и оптимального управления, современных методах дистанционного зондирования (Г.И.Марчук, В.В.Пененко, В.И.Агошков, В.Б.Залесный, В.П.Шутяев, Е.И.Пармузин, Ф.-Л. Димэ, О.Талагран и др.)
- Задачи «вариационной ассимиляции образов» - новое направление в теории обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений в математических моделях геофизической гидродинамики.
- «Образ» - геоизображения: изображения облаков, тайфунов, рингов, термических фронтов и др.

1. Операторная постановка задач об ассимиляции «образов» для линейных математических моделей

Найти ϕ, u **т.ч.:**

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu & (1) \\ C\phi = \varphi_{obs} & (2) \end{cases}$$

где L^{-1} **– существует и ограничен, оператор** $CL^{-1}B$ **ограничен,**

$$\varphi_{obs} = K\varphi_I + G$$

***L*, *B*, *C*, *K* – линейные операторы, действующие в подходящих системах функциональных пространств и определенные на соответствующих областях определения (гарантирующие существование сопряженных операторов),**

φ_I, G, f **- заданные элементы, при этом** φ_I **- «образ» (геоизображение).**

2. Методология исследования и решения задач (Агошков В.И. 2003г.)

- **Основная идея: использование взаимосвязи задач (1), (2) и уравнепия** $Au = g$

$$L\phi = f + Bu,\ C\phi = \varphi_{obs} \Leftrightarrow Au = g,$$

где

$$A = CL^{-1}B, g = \varphi_{obs} - CL^{-1}f = (K\varphi_I + G) - CL^{-1}f.$$

$$Au = g \Rightarrow A^*Au = A^*g \Rightarrow \alpha\Lambda_C(u - u^c) + A^*Au = A^*g.$$

(A**,** L^{-1} **заданы в неявном виде!)**

Теорема. ***Задача*** **(1), (2)** ***корректно поставлена тогда и только тогда, когда корректно поставлена задача*** $Au = g$.

- Привлекая общую теорию обратно и некорректно поставленных задач, осуществляются следующие процедуры:

$$Au = g \Rightarrow A^* Au = A^* g \Rightarrow \alpha \Lambda_C (u - u^c) + A^* Au = A^* g,$$

т.е. осуществляется переход к регуляризированному уравнению А.Н. Тихонова, являющимся уравнением Эйлера задачи вида

$$\inf_u = \frac{1}{2} \| u - u^c \|^2_{X_C} + \frac{1}{2} \| Au - g \|^2_{H_{ob}}$$

(- экстремальной задачи для функционала А.Н. Тихонова)

- **Минимизация функционала А.Н. Тихонова порождает семейство регуляризированных задач, которые в эквивалентной форме имеют вид:**

найти $\phi = \phi(\alpha), u = u(\alpha)$ **т.ч.**

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu \\ \inf\limits_{v \in D(B)} J_\alpha(v) = J_\alpha(u) \end{cases} \qquad (3)$$

где

$$J_\alpha(v) = \frac{\alpha}{2}\left\| v - u^c \right\|_{X_c}^2 + \frac{1}{2}\left\| C\phi(v) - \varphi_{obs} \right\|_{H_{ob}}^2 ,$$

$$\phi(v) : L\phi(v) = f + Bv.$$

3. Система вариационных уравнений

Система оптимальности (уравнение Эйлера) для функционала А.Н. Тихонова может быть записана в виде следующей системы вариационных уравнений:

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu \\ L^{*}q = C^{*}(C\phi - \varphi_{obs}) \\ \alpha\Lambda_{C}(u - u^{c}) + B^{*}q = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

4. Итерационный алгоритм решения задач (Агошков В.И. 2003г.)

Применяя подходящие итерационные процедуры для решения уравнения

$\alpha\Lambda_C(u-u^c)+A^*Au=A^*g,$ получаем соответствующие

итерационные алгоритмы решения исходных задач, в т.ч.:

если u^k задано, то u^{k+1} находится путем последовательного решения задач

$$
\begin{aligned}
&L\phi^k = f + Bu^k \\
&L^*q^k = C^*(C\phi^k - \varphi_{obs}) \qquad\qquad (5) \\
&u^{k+1} = u^k - \tau_k(\alpha(u^k - u^c) + \Lambda_c^{-1}B^*q^k),
\end{aligned}
$$

где

$$(\Lambda_c u, v)_{H_c} \equiv (u,v)_{X_c}, 0 < \tau_k < \infty.$$

5. Существование решения задачи

Принципиальные проблемы, которые необходимо исследовать при решении (1), (2):

- **Построение уравнения замыкания (2) (эмпирические зависимости, специальные модели и т.д.)**
- **Исследование проблемы** $"Ker(A) = Ker(CL^{-1}B) = \{0\}?"$
- **Исследование проблемы** $"Ker(A^*) = Ker(B^* L^{*-1} C^*) = \{0\}?"$

Опр. Задача (1), (2) плотно разрешима, если для $\forall \varepsilon > 0 \exists u \in D(B)$ **т.ч.**

$$L\phi = f + Bu$$

$$\left\| C\phi - (K\varphi_I + G) \right\|_{H_{ob}} < \varepsilon$$

для любого фиксированного

$$(K\varphi_I + G) \in H_{ob}.$$

<u>Теорема</u>. Пусть $f \in Y^*$ и $(K\varphi_I + G) \in H_{ob}$. Тогда
(1) Если система

$$L\phi = Bu,\ C\phi = 0$$

имеет только тривиальные решения, то $Ker(CL^{-1}B) = \{0\}$ и задача (1),(2) однозначно разрешима.
(2) Если система

$$L^* q = C^* w,\ B^* q = 0$$

Имеет только тривиальные решения, то $Ker(B^* L^{*-1} C^*) = \{0\}$ и задача (1),(2) плотно разрешима.
(3) Система вариационных уравнений однозначно разрешима при $\forall \alpha > 0$ и последовательность решений $\{\phi(\alpha)\}, \{u(\alpha)\}$ сходится к решению задачи (1),(2) при условии $Ker(CL^{-1}B) = \{0\}$ и $((K\varphi_I + G) - CL^{-1} f) \in R(CL^{-1}B)$.
Если же $Ker(B^* L^{*-1} C^*) = \{0\}$ и $((K\varphi_I + G) - CL^{-1} f) \in H_{ob}$, то $\|C\phi(\alpha) - \varphi_{obs}\|_{H_{ob}} \to 0, \alpha \to +0$.
(4) Итерационный процесс (5) сходится при $\tau_k \equiv \tau\ \forall k$ - достаточно малое положительное число.

<u>Следствие.</u> Если выполнены условия теоремы, то при достаточно малом α и большом *k* (номере итерации) можно принять $\phi \cong \phi^k(\alpha), u \cong u^k(\alpha)$.

6. Примеры задач о движении жидкости в океане

- Движение жидкости в «однородном океане постоянной глубины» описывается уравнением переноса завихренности (для функции полных потоков ϕ): найти ϕ т.ч.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\phi)+\frac{1}{H}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial(\nabla^2\phi)}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial(\nabla^2\phi)}{\partial x}\right]+\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}-K\nabla^2(\nabla^2\phi)=\frac{1}{\rho_0}rot\tau \qquad (6)$$

$\beta=2\Omega\cos\varphi/R$ - скорость изменения параметра Кориолиса,

H – глубина океана,

τ - Напряжение трения ветра,

$$rot\tau=\frac{\partial\tau_y}{\partial x}-\frac{\partial\tau_x}{\partial y}$$

Приближение уравнения переноса завихренности (уравнение Стоммела)

- Изучение стационарной интегральной циркуляции вод в океане и учет горизонтального турбулентного обмена приводит к уравнению Стоммела:

$$\nu\nabla^2\phi+\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{\rho_0}rot\tau \qquad (7)$$

Приближение уравнения переноса завихренности (уравнение Манка)

- Если учитывать горизонтальный турбулентный обмен в обычной форме, то получим уравнение Манка:

$$K\nabla^2\left(\nabla^2\phi\right)-\beta\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{1}{\rho_0}rot\tau \qquad (8)$$

Приближение уравнения переноса завихренности (уравнение Штокмана)

- Рассматривая интегральную циркуляцию в глубоком море, где можно пренебречь бета-эффектом и нелинейными эффектами, получаем уравнение Штокмана:

$$K\nabla^2\left(\nabla^2\phi\right)=-\frac{1}{\rho_0}rot\tau \qquad (9)$$

- Обратная задача для уравнения Стоммела : найти ϕ, τ т.ч.

$$\begin{cases} \nu\Delta\phi + \beta\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} rot\tau \\ \phi\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ C\phi = \varphi_{obs} \end{cases}$$

$$C\phi = \left[-\frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial x} \right]^T$$

где $\varphi_{obs} = (\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2})$ - «наблюдаемый вектор скорости».

- Соответствующая задача ассимиляции «образа» вектора скорости для уравнения Стоммела : найти ϕ, τ т.ч.

$$
\begin{cases}
\nu\Delta\phi + \beta\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{1}{\rho_0} rot\tau \\
\phi\big|_{\partial\Omega} = 0 \\
\inf\limits_{\tau} = \dfrac{1}{2}\|\tau - \tau^{(0)}\|^2_{(L_2(\Omega))^2} + \dfrac{1}{2}\|C\phi - \varphi_{obs}\|^2_{(L_2(\Omega))^2}
\end{cases}
$$

где

$\varphi_{obs} = (\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2})$ - «наблюдаемый вектор скорости», $C\phi = \left[-\dfrac{\partial\phi}{\partial y}, \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right]^T$.

Обратные задачи геофизической гидродинамики и задачи ассимиляции «образов»

- Обратная задача для уравнения Манка: найти ϕ, τ т.ч.

$$\begin{cases} -K\Delta^2\phi + \beta\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{1}{\rho_0} rot\tau \\ \phi\big|_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ C\phi = \varphi_{obs} \end{cases}$$

$$C\phi = \Delta\phi$$

где $\varphi_{obs} = (\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2})$ - «наблюдаемый вихрь».

- Задача вариационной ассимиляции «образа» завихренности жидкости для уравнения Манка: найти ϕ, τ т.ч.

$$\begin{cases} -K\Delta^2\phi + \beta\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = \dfrac{1}{\rho_0} rot\tau \\ \phi\big|_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ \inf\limits_{\tau} = \dfrac{1}{2}\|\tau - \tau^{(0)}\|^2_{(L_2(\Omega))^2} + \dfrac{1}{2}\|C\phi - \varphi_{obs}\|^2_{(L_2(\Omega))^2} \end{cases}$$

где $\varphi_{obs} = (\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2})$ - «наблюдаемый вихрь», $C\phi = \Delta\phi$

Обратные задачи геофизической гидродинамики и задачи ассимиляции образов

- Обратная задача для уравнения Штокмана:

$$\begin{cases} k\Delta^2\phi = -\dfrac{1}{\rho_0} rot\tau \\ \phi\big|_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ C\phi = \varphi_{obs} \end{cases}$$

где φ_{obs} - «наблюдаемый вихрь», $C\phi = \Delta\phi$

- Задача вариационной ассимиляции «образа» вихря жидкости для уравнения Штокмана:

$$
\begin{cases}
k\Delta^2\phi = -\dfrac{1}{\rho_0} rot\tau \\
\phi\big|_{\partial\Omega} = \dfrac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\
\inf\limits_{\tau} = \dfrac{1}{2}\|\tau - \tau^{(0)}\|^2_{(L_2(\Omega))^2} + \dfrac{1}{2}\|C\phi - \varphi_{obs}\|^2_{(L_2(\Omega))^2}
\end{cases}
$$

где φ_{obs} - «наблюдаемый вихрь», $C\phi = \Delta\phi$

Обратные задачи геофизической гидродинамики и задачи ассимиляции образов

Исследование и численное решение сформулированных обратных задач и соответствующих задач ассимиляции «образов» может быть осуществлено изложенными выше методами и подходами.

Заключение

Рассмотренные выше методы и подходы могут быть распространены на другие классы обратных задач и задачи ассимиляции «образов», полученных дистанционным зондированием с целью практического мониторинга Мирового океана и морей России (задачи спутниковой метеорологии, задачи экологической безопасности, моделирование и оценка рисков в мореплавании и др.)

Спасибо за внимание!