

**Ассовский М.В., Семенов А.Ю.**

**Исследование и решение обратных задач для  
уравнений Штокмана, Манка,  
Стоммела с вариационной ассимиляцией  
спутниковых наблюдений**

**Московский физико-технический институт**

Таруса 2010

- **Задачи «вариационной ассимиляции образов» - новое направление в теории обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений в математических моделях геофизической гидродинамики. («Образ» - геоизображения: изображения облаков, тайфунов, рингов, термических фронтов и др.)**
- **Методология исследования и численного решения задач вариационной ассимиляции спутниковых наблюдений «образов» на основе методов и подходов теории обратных задач, сопряженных уравнений и оптимального управления (Агошков В.И., 2003, 2010)**

- Движение жидкости в «однородном океане постоянной глубины» описывается уравнением переноса завихренности (для функции полных потоков  $\phi$ ): найти  $\phi$  т.ч.  $\phi$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \phi) + \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2 \phi)}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial(\nabla^2 \phi)}{\partial x} \right] + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} - K \nabla^2(\nabla^2 \phi) = \frac{1}{\rho_0} \text{rot} \tau \quad (6)$$

$\beta = 2\Omega \cos \varphi / R$  - скорость изменения параметра Кориолиса,

$H$  – глубина океана,

$\tau$  - Напряжение трения ветра,

$$\text{rot} \tau = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}$$

- Изучение стационарной интегральной циркуляции вод в океане и учет горизонтального турбулентного обмена приводит к уравнению Стоммела:

$$\nu \nabla^2 \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \text{rot} \tau \quad (7)$$

- Если учитывать горизонтальный турбулентный обмен в обычной форме, то получим уравнение Манка:

$$K \nabla^2 (\nabla^2 \phi) - \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_0} \text{rot} \tau \quad (8)$$

- Рассматривая интегральную циркуляцию в глубоком море, где можно пренебречь бета-эффектом и нелинейными эффектами, получаем уравнение Штокмана:

$$K \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} \tau \quad (9)$$

- Обратная задача для уравнения Стоммела : найти  $\phi, \tau$  т.ч.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \Delta \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} \tau \\ \phi|_{\partial \Omega} = 0 \\ C\phi = \varphi_{obs} \end{array} \right. \quad C\phi = \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^T$$

где  $\varphi_{obs} = (\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2})$  - «наблюдаемый вектор скорости».

- Соответствующая задача ассимиляции «образа» вектора скорости для уравнения Стоммела : найти  $\phi, \tau$  т.ч.

$$\begin{cases} \nu \Delta \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} \tau \\ \phi|_{\partial \Omega} = 0 \\ \inf_{\tau} = \frac{1}{2} \|\tau - \tau^{(0)}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 + \frac{1}{2} \|C\phi - \varphi_{obs}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 \end{cases}$$

где

$$\varphi_{obs} = (\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2}) - \text{«наблюдаемый вектор скорости»}, \quad C\phi = \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^T.$$



- Обратная задача для уравнения Манка: найти  $\phi, \tau$  т.ч.

$$\left\{ \begin{array}{l} -K\Delta^2\phi + \beta \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot}\tau \\ \phi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ C\phi = \varphi_{obs} \end{array} \right. \quad C\phi = \Delta\phi$$

где  $\varphi_{obs} = (\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2})$  - «наблюдаемый вихрь».

- Задача вариационной ассимиляции «образа» завихренности жидкости для уравнения Манка: найти  $\phi, \tau$  т.ч.

$$\begin{cases} -K\Delta^2\phi + \beta \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot}\tau \\ \phi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\phi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \\ \inf_{\tau} = \frac{1}{2} \|\tau - \tau^{(0)}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 + \frac{1}{2} \|C\phi - \varphi_{obs}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 \end{cases}$$

где  $\varphi_{obs} = (\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2})$  - «наблюдаемый вихрь»,  $C\phi = \Delta\phi$

- Обратная задача для уравнения Штокмана:

$$\left\{ \begin{array}{l} k\Delta^2\phi = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot}\tau \\ \phi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ C\phi = \varphi_{obs} \end{array} \right.$$

где  $\varphi_{obs}$  - «наблюдаемый вихрь»,  $C\phi = \Delta\phi$

- Задача вариационной ассимиляции «образа» вихря жидкости для уравнения Штокмана:

$$\left\{ \begin{array}{l} k\Delta^2\phi = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot}\tau \\ \phi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ \inf_{\tau} = \frac{1}{2} \|\tau - \tau^{(0)}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 + \frac{1}{2} \|C\phi - \varphi_{obs}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 \end{array} \right.$$

где  $\varphi_{obs}$  - «наблюдаемый вихрь»,  $C\phi = \Delta\phi$

Исследование и численное решение сформулированных обратных задач и соответствующих задач ассимиляции «образов» может быть осуществлено согласно общей методологии (Агошков В.И., 2003,2010) с применением известных численных алгоритмов (разностных, проекционно-сеточных и др.) решения подзадач в прямых и сопряженных уравнениях и уравнении Эйлера.

$$\begin{cases} \nu \Delta \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} u & \text{в } \Omega \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0 & \text{на } \partial\Omega \\ C\phi = \varphi_{obs} & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (10)$$

$\Omega$  - односвязная область с кусочно-гладкой границей (например:  
 $\Omega = [0, a] \times [0, b]$  ).

Задача: найти  $\phi, u$  , т.ч. выполнено (10).

Параметры:  $\nu, \beta, \rho_0 = \text{const}$  .

Управление:  $u = [u_1, u_2]^T \equiv \tau$  .

Функция наблюдений:  $\varphi_{obs} = [\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2}]^T$  .

$$C = \left[ -\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right]^T$$

- Операторная постановка задачи.

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ C\phi = \varphi_{obs} \end{cases}$$

Определение операторов:

$$L = \nu \Delta + \beta \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L : W \rightarrow Y^*$$

$$D(L) = W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega),$$

$$Bu = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$$

$$B : H_c \rightarrow Y^*$$

$$D(B) = \left( W_2^1(\Omega) \right)^2,$$

$$C = \left[ -\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right]^T$$

$$C : W \rightarrow H_{ob}$$

$$D(C) = W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega),$$

$$W = Y = L_2(\Omega), \quad H_{ob} = H_c = \left( L_2(\Omega) \right)^2, \quad K = I, \quad G \equiv 0, \quad \varphi_{obs} \equiv \varphi_I.$$

- Обобщенная постановка задачи в смысле «наименьших квадратов»:

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ \inf = \frac{1}{2} \|C\phi - \varphi_{obs}\|_{H_{ob}}^2 \end{cases}$$

или в исходных обозначениях:

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ \inf = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \varphi_{obs1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \varphi_{obs2} \right)^2 \right] d\Omega. \end{cases}$$



- Обобщенная постановка задачи с регуляризацией:

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ \inf = \frac{1}{2} \|C\phi - \varphi_{obs}\|_{H_{ob}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u - u^c\|_{H_c}^2 \end{cases}.$$

Для простоты полагаем  $u^c \equiv 0$  и получаем:

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ \inf = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \varphi_{obs1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \varphi_{obs2} \right)^2 \right] d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \left[ (u_1)^2 + (u_2)^2 \right] d\Omega \end{cases}.$$

- Система вариационных уравнений:

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ L^*q = C^*(C\phi - \varphi_{obs}). \\ \alpha u + B^*q = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Сопряженные операторы:

$$L^* = \nu\Delta - \beta \frac{\partial}{\partial x} \quad D(L^*) = D(L)$$

$$B^* = -\frac{1}{\rho_0}C \quad D(B^*) = D(C)$$

$$C^* = -\rho_0 B \quad D(C^*) = D(B)$$

Тогда (11) есть:

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ L^*q = -\frac{1}{\rho_0}B(C\phi - \varphi_{obs}). \\ \alpha u - \rho_0 Cq = 0 \end{cases}$$

- Легко заметить, что в общем случае однозначная разрешимость обратной задачи отсутствует.

Пусть  $u$  принадлежит классу вектор-функций, т.ч.

$$u = \left[ -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}, \frac{1}{\rho l} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} \right]^T$$

- геострофическое приближение.

Тогда  $\operatorname{div} u = 0$  и для разности двух «различных» решений получаем:

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \operatorname{rot} u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow u = 0$$

В данном случае есть однозначная разрешимость задачи.

- Пусть  $u$  вычисляется на основе модели Акерблома:

$$u = \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\kappa}{l}} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right), \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\kappa}{l}} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right]^T$$

В этом случае :

$$\operatorname{div} u = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\kappa}{l}} \Delta P$$

$$\operatorname{rot} u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\kappa}{l}} \Delta P$$

Видим, что если  $\operatorname{rot} u = 0$ , то автоматически и  $\operatorname{div} u = 0$ . Тогда дополнив систему граничными условиями (функция на границе фиксирована) заключаем, что разность решений равна нулю.

Следовательно, в этом случае есть свойство однозначной разрешимости.

- Легко заметить также, что в этой задаче в общем случае также нет свойства плотной разрешимости.

Для того чтобы была плотная разрешимость, надо для разности решений потребовать чтобы  $\operatorname{rot} w = 0$ . Теперь поставим дополнительное условие на функцию  $w$ . Например, введем ограничение вида  $\operatorname{div} w = 0$ , т.е.  $w$  принадлежит подпространству бездивергентных вектор-функций. Тогда, дополнив эти два уравнения нулевым граничным условием, получим единственное решение  $w = 0$ , т.е. в данном случае имеет место плотная разрешимость задачи.

- Итерационный процесс:

$$\begin{cases} L\phi^k = Bu^k \\ L^*q^k = -\frac{1}{\rho_0} B(C\phi^k - \varphi_{obs}) \\ u^{k+1} = u^k - \tau(\alpha u^k - \rho_0 Cq^k). \end{cases}$$

- Разностная схема для численного решения задачи:

$$v \left( \frac{\phi_{i-1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i+1,j}^k}{h_x^2} + \frac{\phi_{i,j-1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j+1}^k}{h_y^2} \right) + \beta \frac{\phi_{i+1,j}^k - \phi_{i-1,j}^k}{2h_x} = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{u_{2i+1,j}^k - u_{2i-1,j}^k}{2h_x} - \frac{u_{1i,j+1}^k - u_{1i,j-1}^k}{2h_y} \right)$$

$$v \left( \frac{q_{i-1,j}^k - 2q_{i,j}^k + q_{i+1,j}^k}{h_x^2} + \frac{q_{i,j-1}^k - 2q_{i,j}^k + q_{i,j+1}^k}{h_y^2} \right) - \beta \frac{q_{i+1,j}^k - q_{i-1,j}^k}{2h_x} =$$

$$= - \left( \frac{\phi_{i-1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i+1,j}^k}{h_x^2} + \frac{\phi_{i,j-1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j+1}^k}{h_y^2} \right) - \frac{\varphi_{obs1i,j+1}^k - \varphi_{obs1i,j-1}^k}{2h_y} + \frac{\varphi_{obs2i+1,j}^k - \varphi_{obs2i-1,j}^k}{2h_x}$$

$$u_{1i,j}^{k+1} = u_{1i,j}^k - \tau \left( \alpha u_{1i,j}^k + \frac{1}{\rho_0} \frac{q_{i,j+1}^k - q_{i,j-1}^k}{2h_y} \right)$$

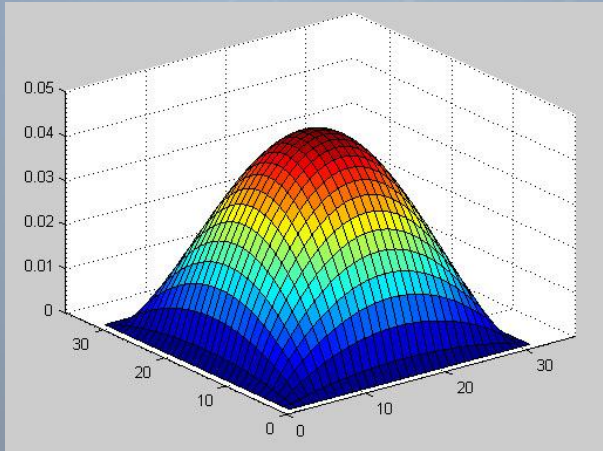
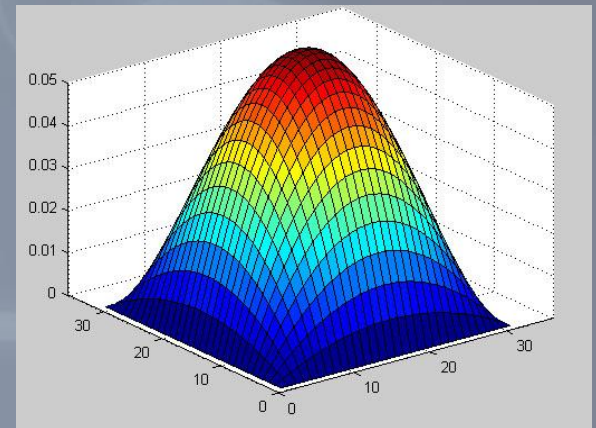
$$k = 0..N, i = 0..I, j = 0..J$$

$$u_{2i,j}^{k+1} = u_{2i,j}^k - \tau \left( \alpha u_{2i,j}^k - \frac{1}{\rho_0} \frac{q_{i+1,j}^k - q_{i-1,j}^k}{2h_x} \right)$$

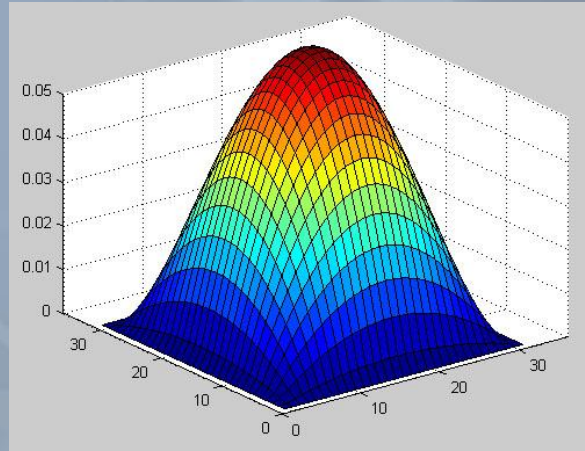


- Случай «хорошей» функции  $\phi = xy(a-x)(b-y)$ ,

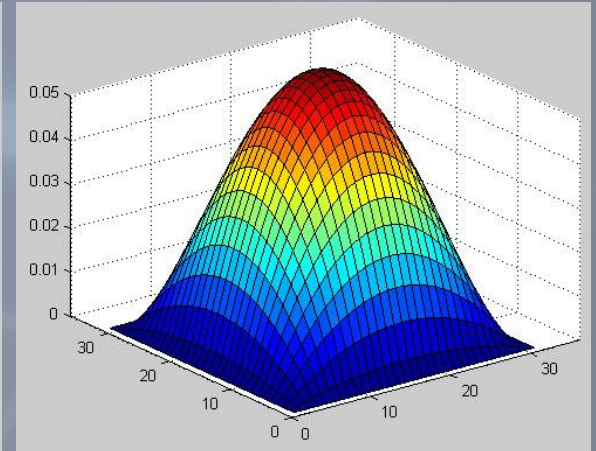
$$\varphi_{obs} = \begin{bmatrix} -x(a-x)(b-2y) \\ y(b-y)(a-2x) \end{bmatrix}$$



2 итерации



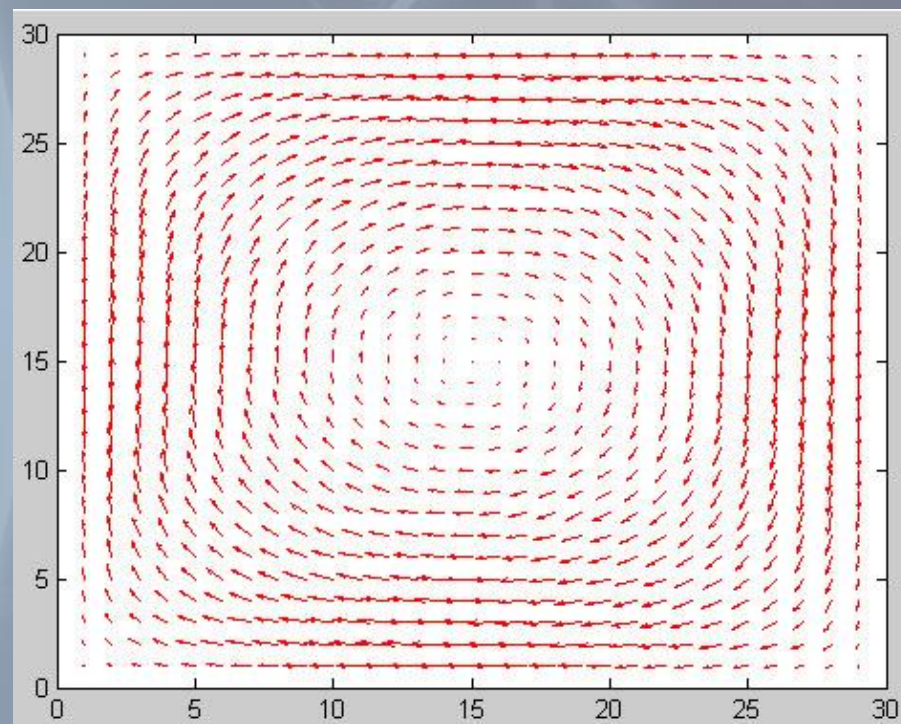
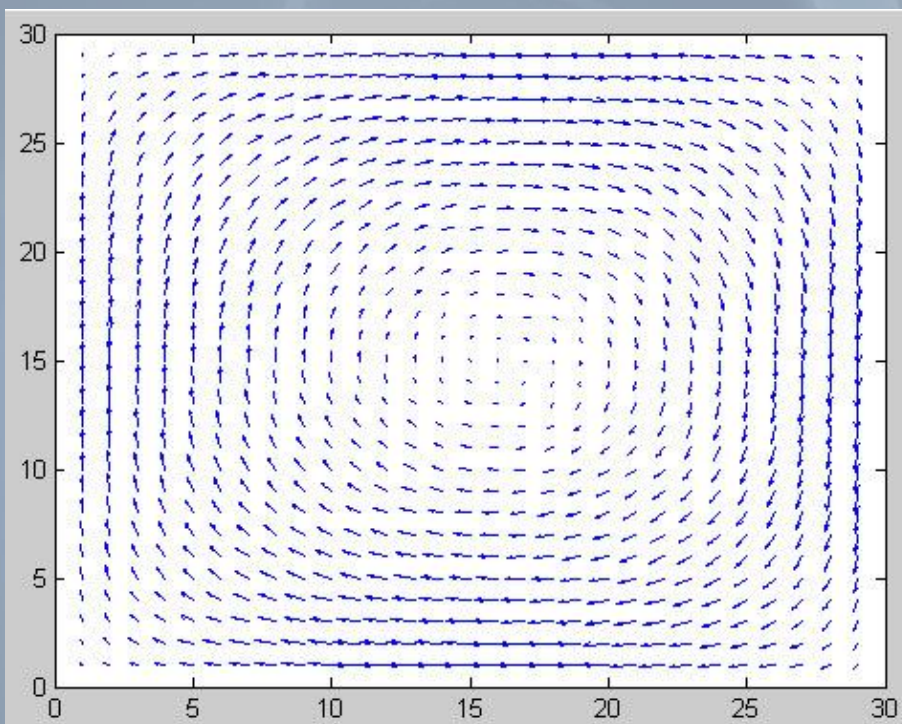
3 итерации



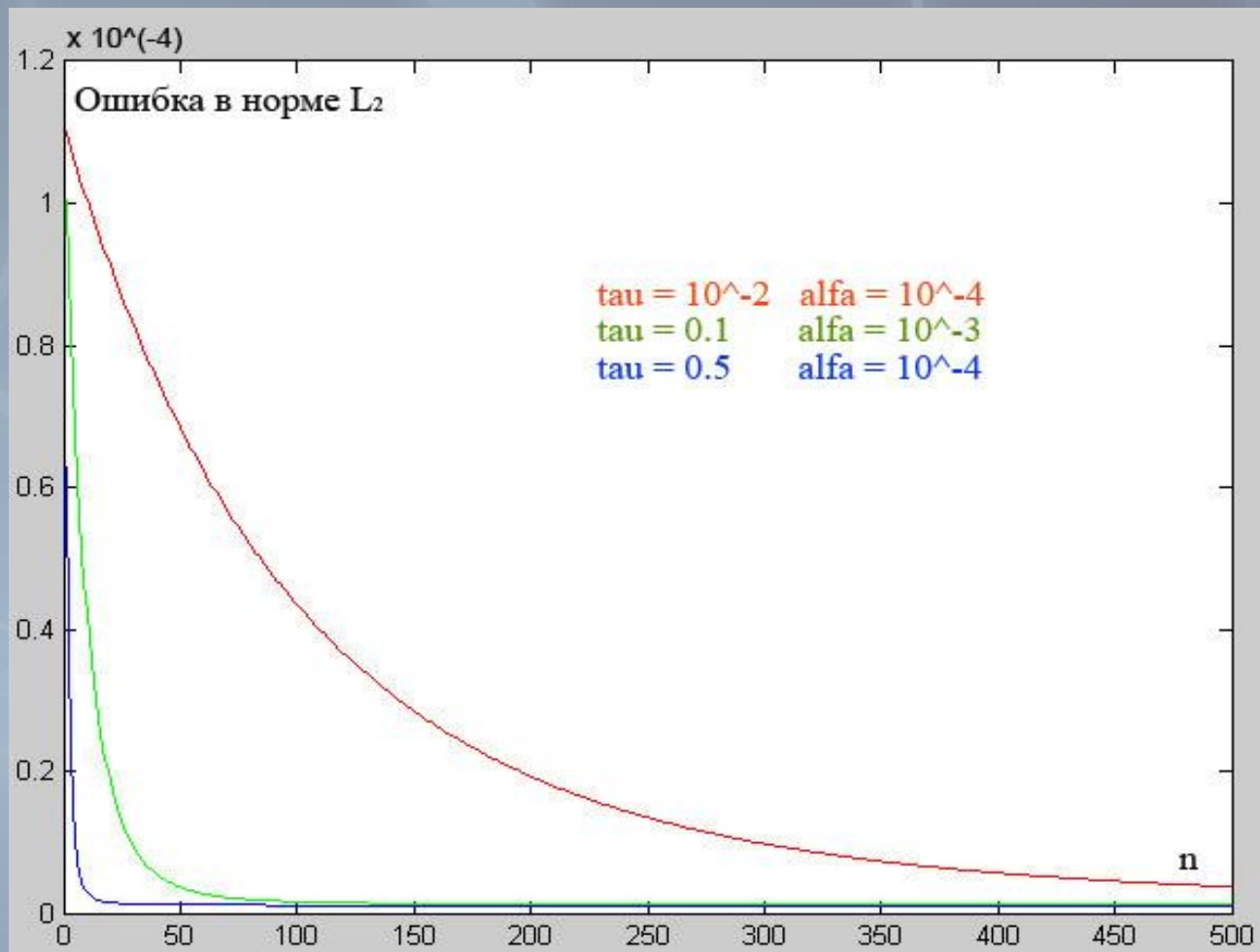
5 итераций



Поля  $\vec{u}$  и  $\vec{v} = \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^T$  :

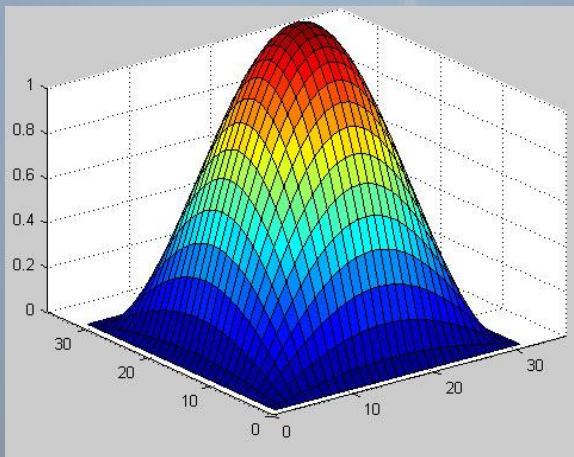
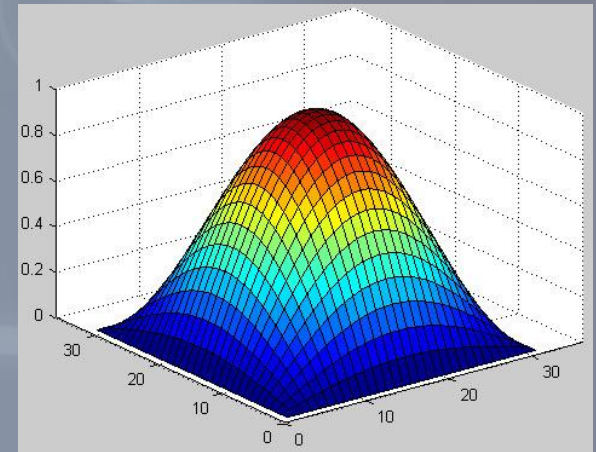


## Результаты численных экспериментов

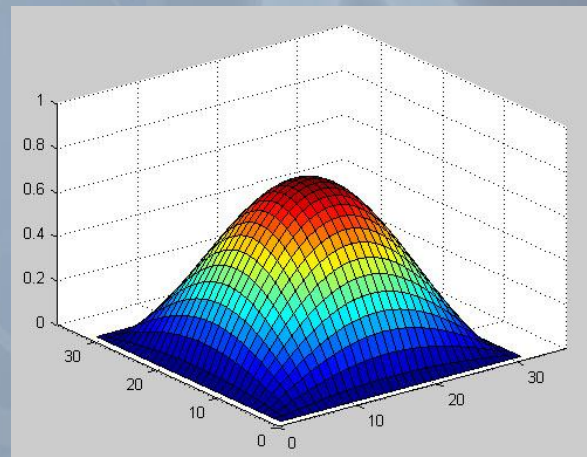


- Случай «хорошей» функции  $\phi = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$  ,

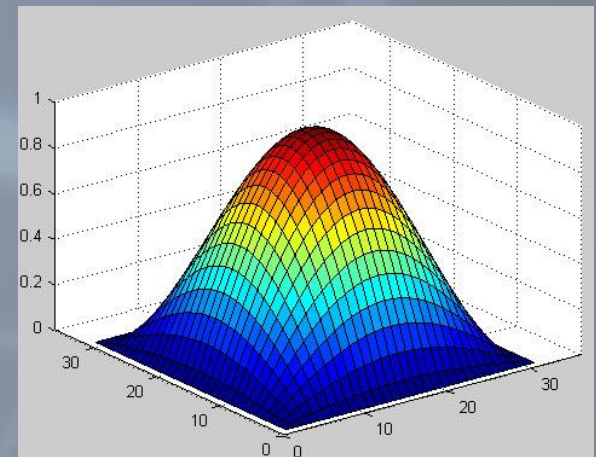
$$\varphi_{obs} = \begin{bmatrix} -\pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{bmatrix}$$



1 итерация



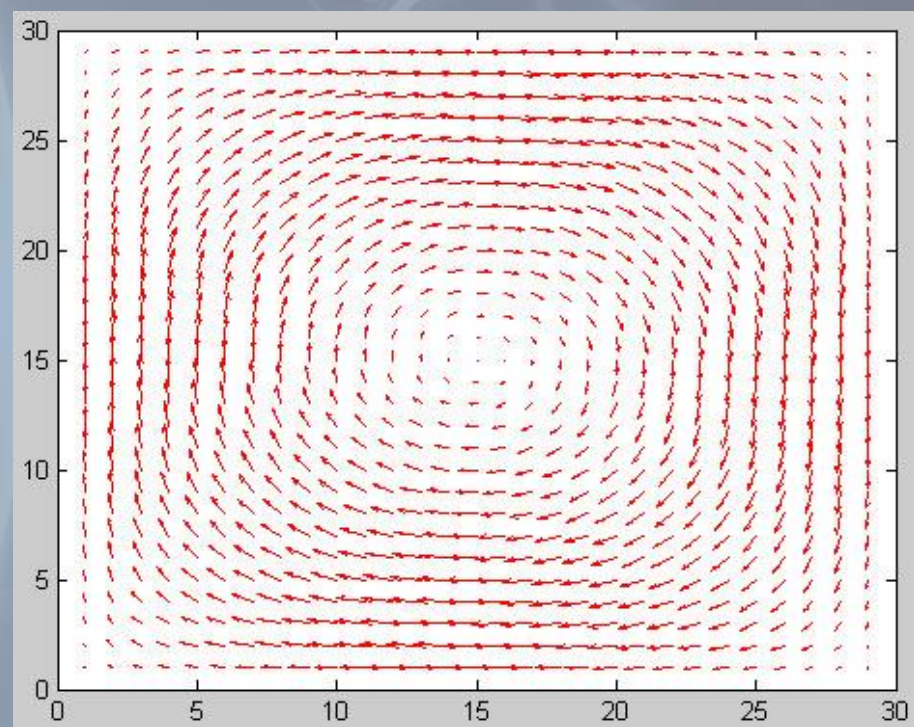
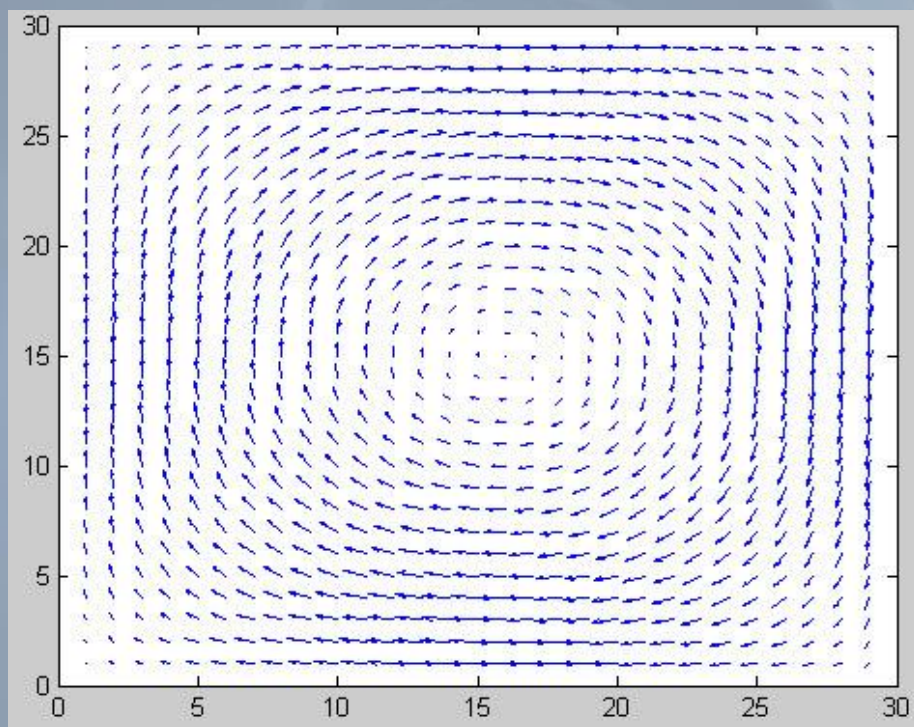
2 итерации

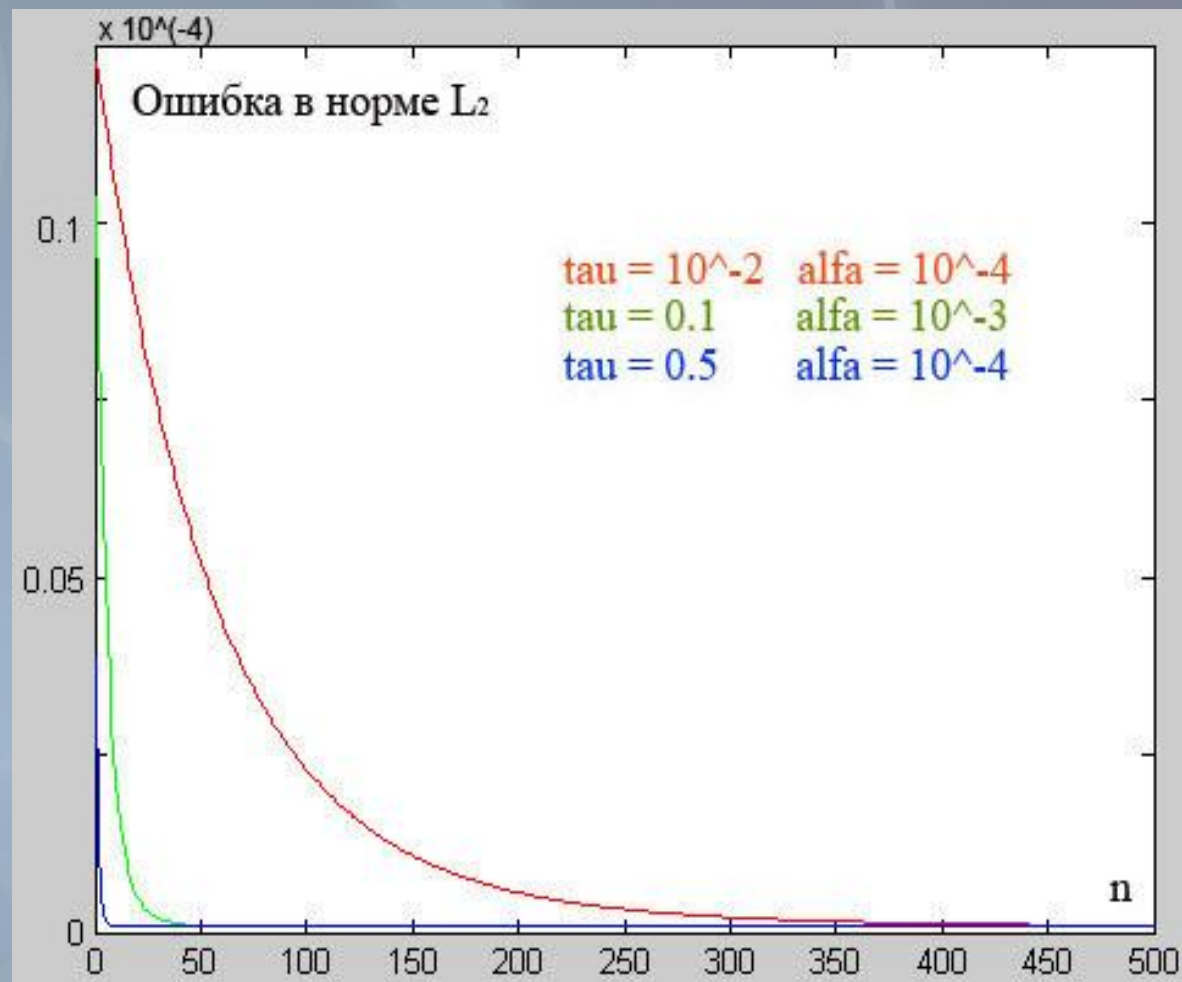


5 итераций



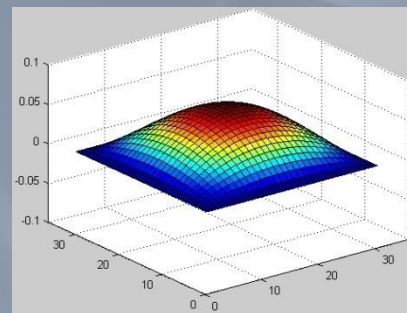
Поля  $\vec{u}$  и  $\vec{v} = \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^T$  :



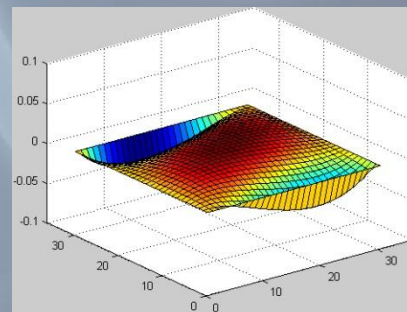
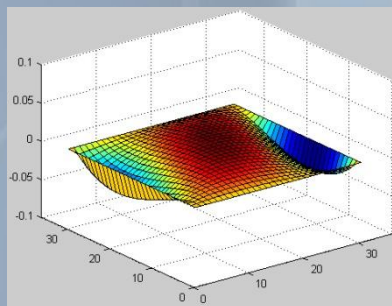


- Случай «плохой» функции:

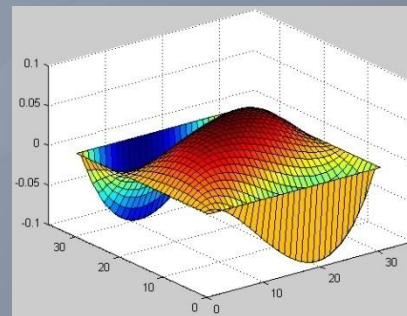
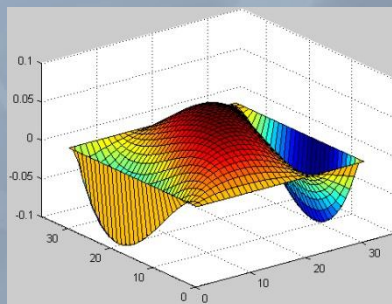
$$\varphi_{obs} = \begin{bmatrix} xy(a-x)(b-y) \\ xy(b-y)(a-x) \end{bmatrix}$$

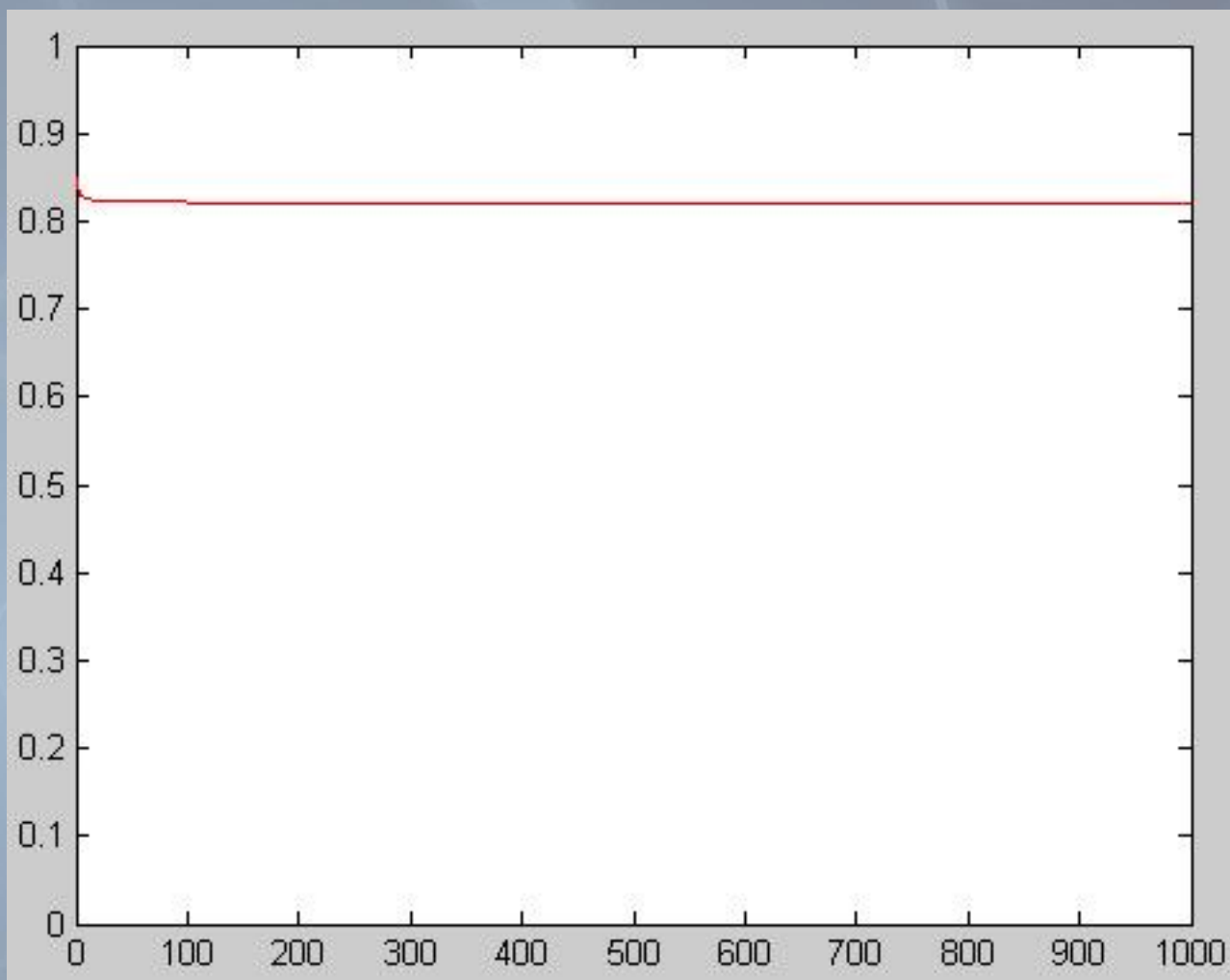


Через 1000 итераций:



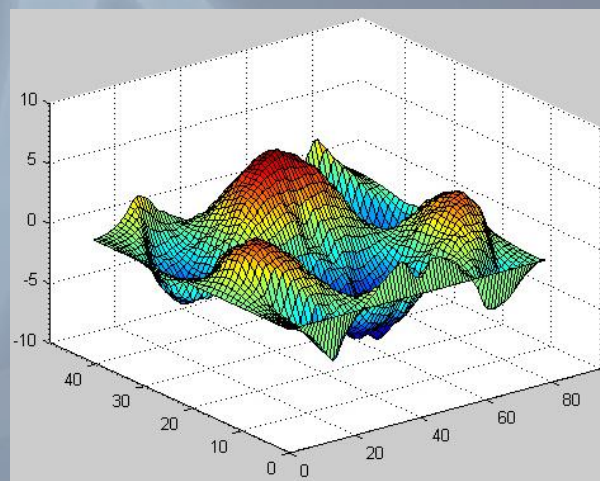
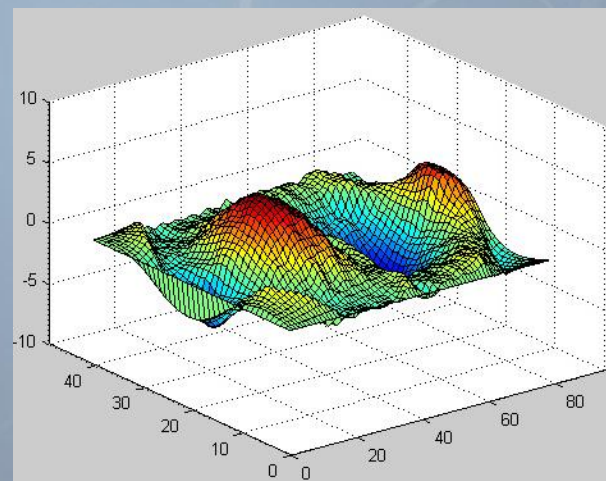
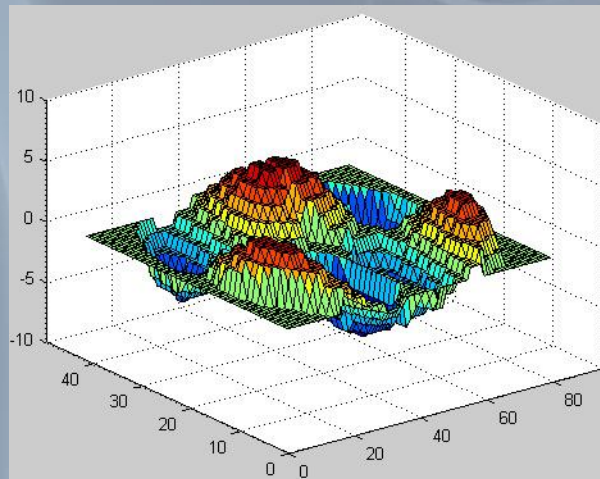
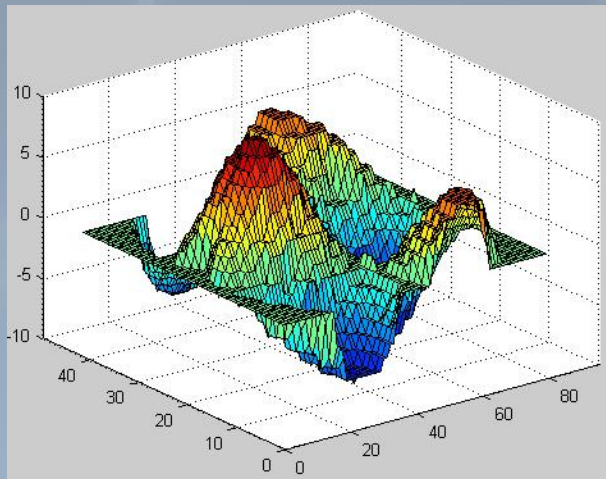
Через 3000 итераций:





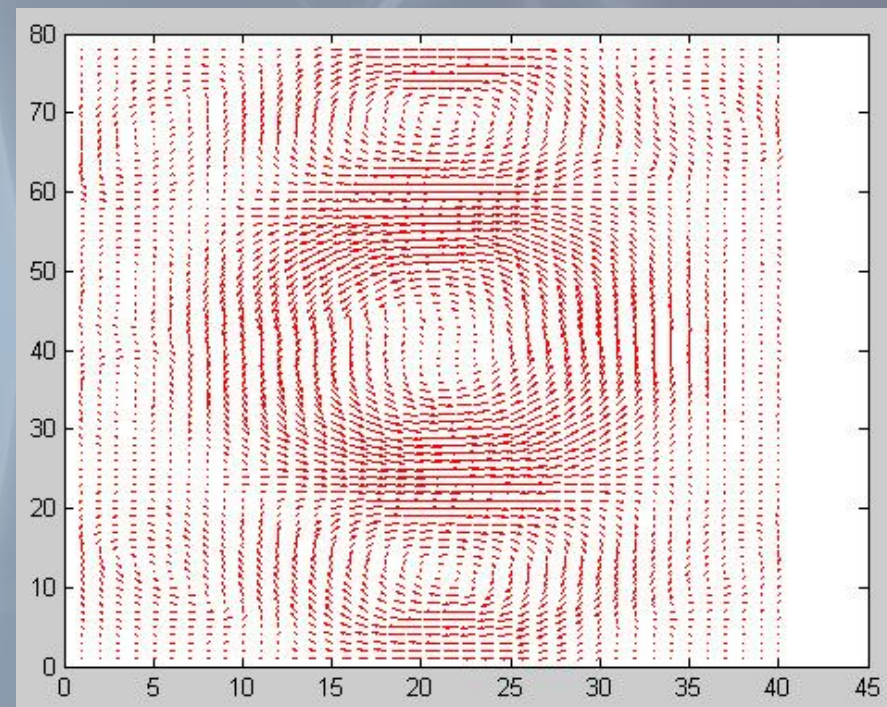
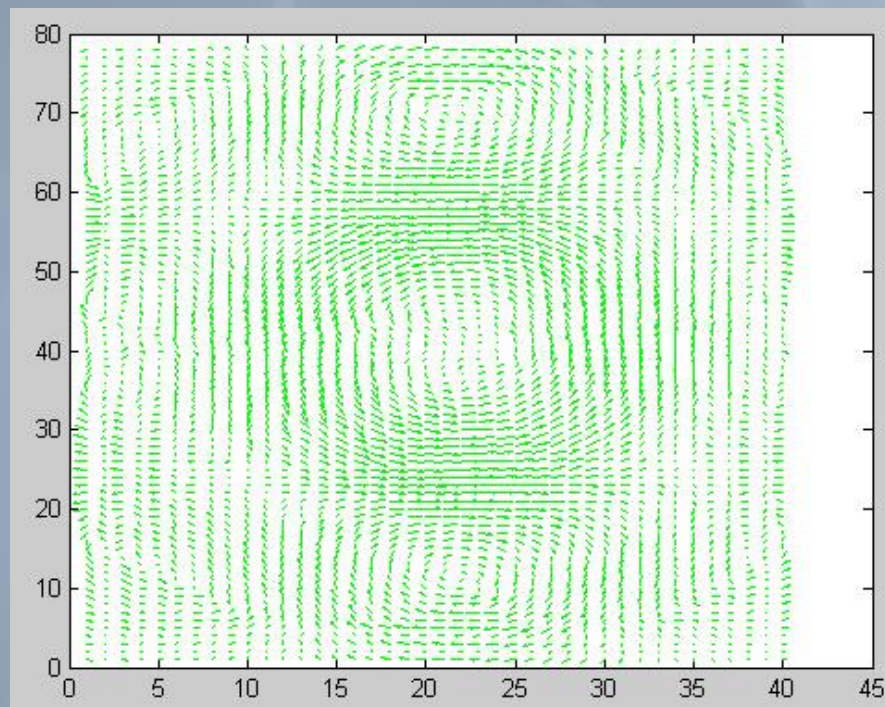


- Обработка экспериментальных данных наблюдений:





Поля  $\vec{u}$  и  $\vec{v} = \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^T$  :



$$\begin{cases} k\Delta^2\phi = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} u \\ \phi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \\ \Delta\phi = \varphi_{obs} \end{cases} \quad (12)$$

Задача: найти  $\phi, u$ , т.ч. выполнено (12).

Параметры:  $k, \beta, \rho_0 = \text{const}$  .

Управление:  $u = [u_1, u_2]^T$  .

Функция наблюдений:  $\varphi_{obs}$  .

- Операторная постановка задачи:

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ C\phi = \varphi_{obs} \end{cases}.$$

Определение операторов:

$$L = k\Delta^2$$

$$D(L) = \left\{ \phi \in W_2^4(\Omega), \phi|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$Bu = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} u$$

$$D(B) = \left\{ u \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \exists \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\},$$

$$C = \Delta$$

$$D(C) = \left\{ \phi \in W_2^2(\Omega), \phi|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$K = I, G \equiv 0, \varphi_{obs} \equiv \varphi_I.$$

- Семейство регуляризованных задач:

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ \inf = \frac{1}{2} \|C\phi - \varphi_{obs}\|_{H_{ob}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u - u^0\|_{H_c}^2 \end{cases}$$

- Система вариационных уравнений:

$$\begin{cases} L\phi = Bu \\ L^*q = C^*(C\phi - \varphi_{obs}) \\ \alpha u + B^*q = 0 \end{cases}$$

Сопряженные операторы:

$$L^* = L, \quad B^* = -\frac{1}{\rho_0} \left[ -\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right]^T, \quad C^* = C$$

Ответ на вопрос о тривиальности  $\ker(A^*)$  сводится к поиску нетривиальных решений  $u$  системы

$$\begin{cases} L^* q = C^* w \\ B^* q = 0 \end{cases}.$$

Из второго уравнения получаем  $q = \text{const}$ , тогда первое уравнение дает  $\Delta w = 0$ . Это уравнение с нулевым граничным условием дает нулевое решение, следовательно, в задаче есть плотная разрешимость.

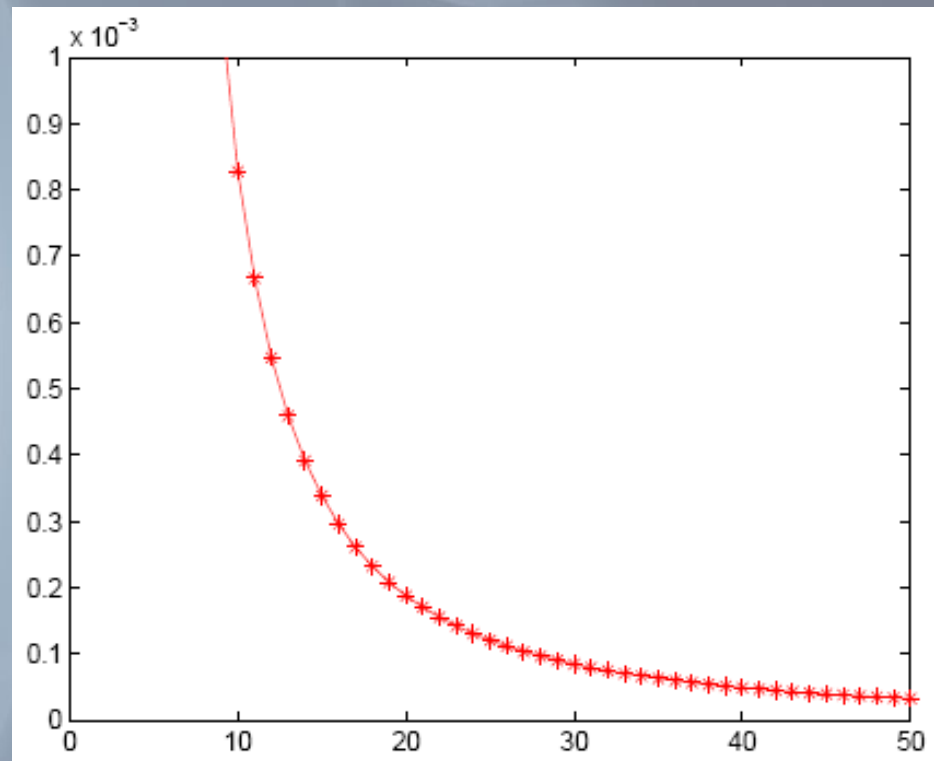
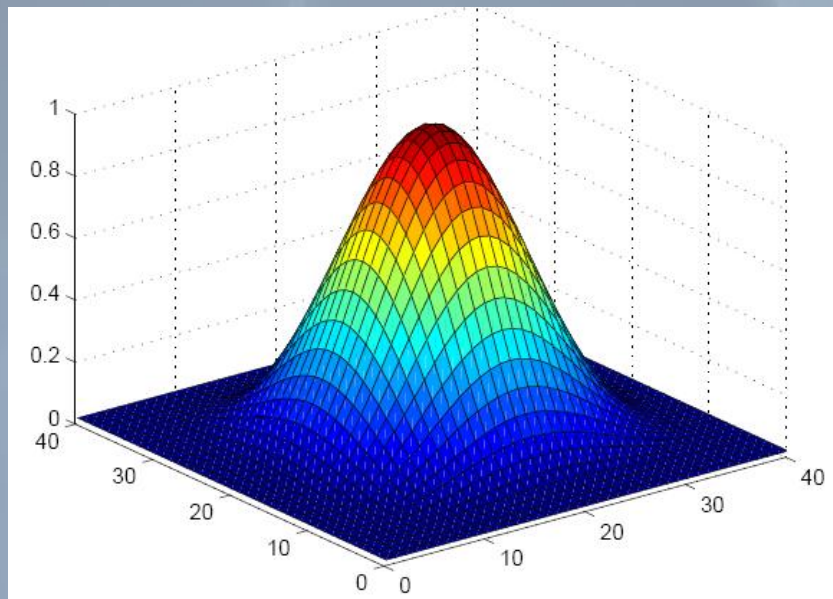
Легко заметить, что в общем случае однозначная разрешимость обратной задачи отсутствует. Однако в данной задаче можно также ввести подпространство для  $u$ , при принадлежности  $u$  к которому, имеет место однозначная разрешимость задачи.

- Итерационный процесс:

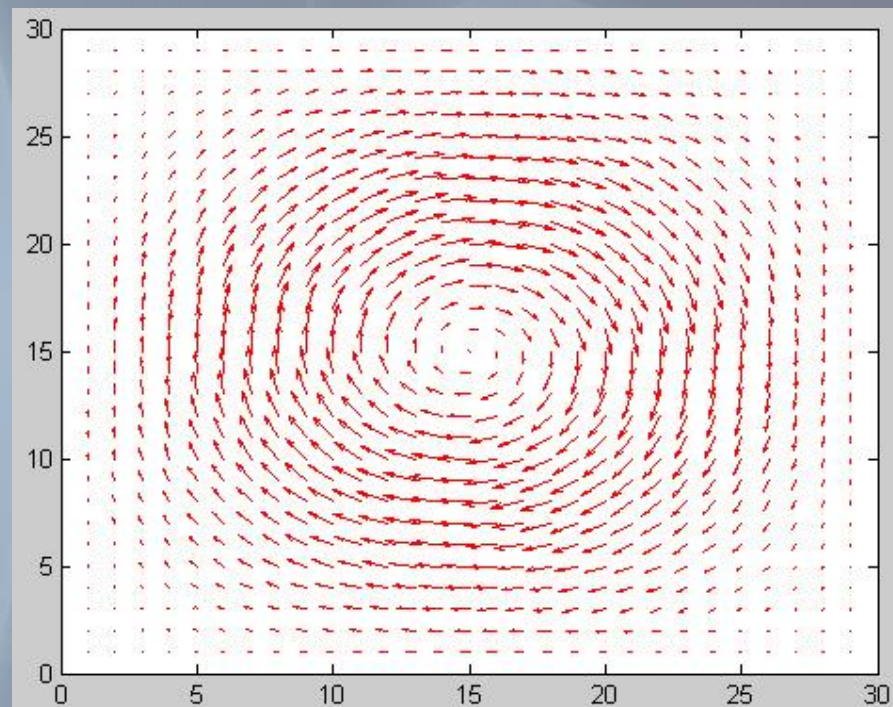
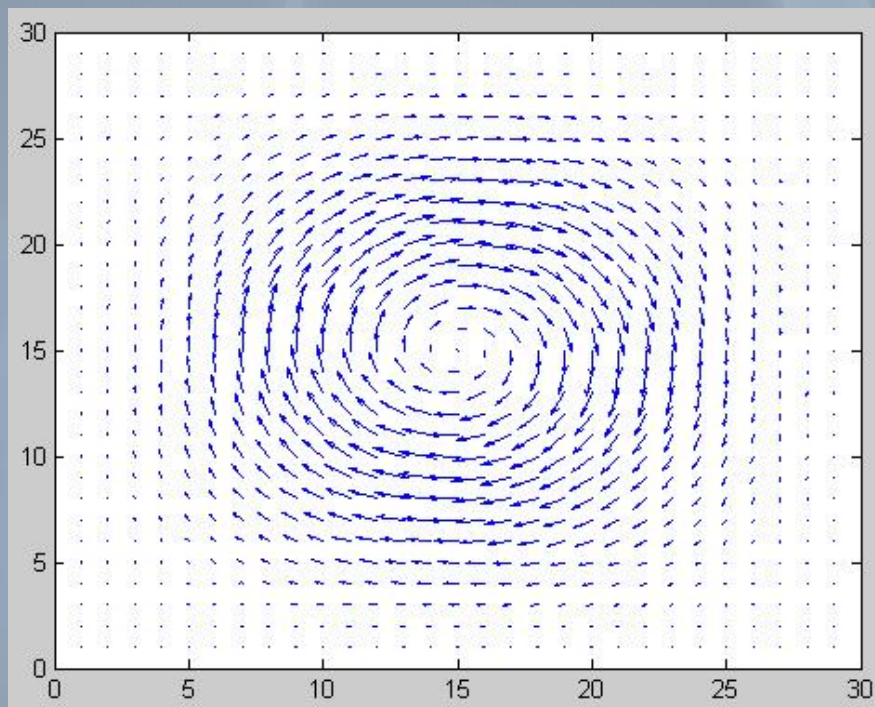
$$\left\{ \begin{array}{l} k\Delta^2\phi^k = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial u_y^k}{\partial x} - \frac{\partial u_x^k}{\partial y} \right) \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial\phi}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \\ k\Delta^2 q^k = \Delta(\Delta\phi^k - \varphi_{obs}) \\ q|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial q}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \\ u_x^{k+1} = u_x^k - \tau \left( \alpha u_x^k + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q^k}{\partial y} \right) \\ u_y^{k+1} = u_y^k - \tau \left( \alpha u_y^k - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q^k}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$



- Случай «хорошей» функции  $\phi = \sin^3(\pi x) \sin^3(\pi y)$  :

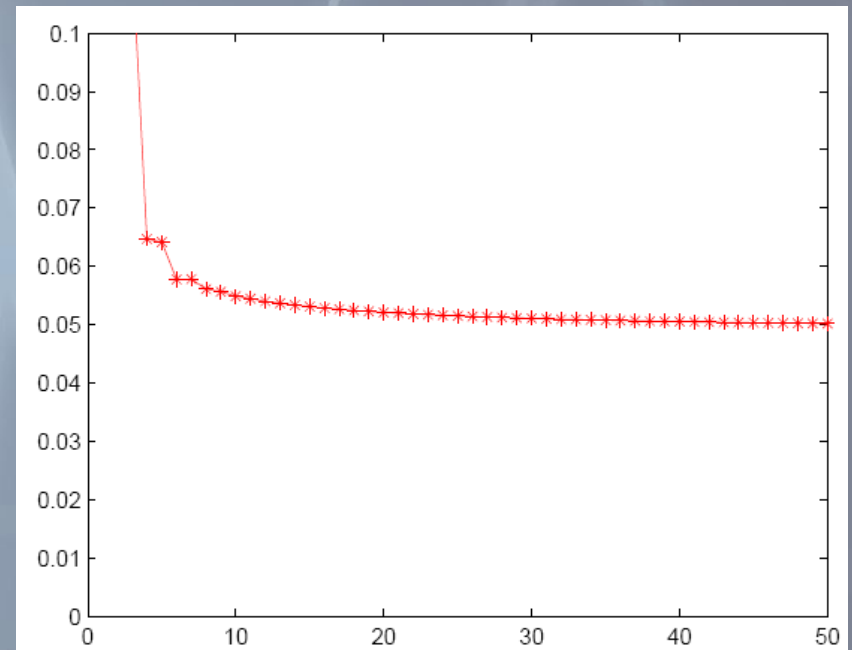
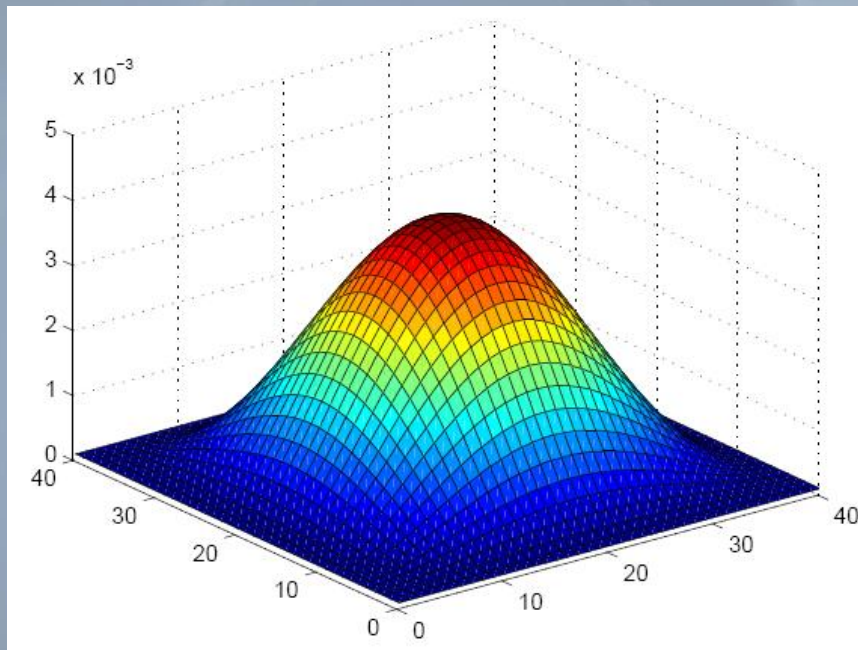


Поля  $\vec{u}$  и  $\vec{v} = \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^T$  :



- Случай «плохой» функции  $\phi = x^2 y^2 (1-x)^2 (1-y)^2$ ,

$$\varphi_{obs} = 2(1-6x+6x^2)y^2(1-y)^2 + 2(1-6y+6y^2)x^2(1-x)^2, \quad \varphi_{obs}|_{\partial\Omega} \neq 0 \Rightarrow \varphi_{obs} \notin D(C^*):$$



- **Задачи для уравнения Манка исследуются и численно решаются также как и задачи для уравнения Штокмана.**

- Сформулирован и изучен класс обратных задач с применением «вариационной ассимиляции образов» (фотографий полей скорости, вихря и т.д.)
- Исследованы обратные задачи для уравнений Стоммела, Манка и Штокмана для случая «однородного океана с плоским дном».
- Результаты исследований показывают целесообразность распространения рассмотренных методов и подходов на более сложные задачи.

**Спасибо за внимание!**