Нелинейное вихревое течение в вертикальном канале, обусловленное асимметрией вертикального переноса влажности

П.Б. Руткевич[1], П.П. Руткевич[2]

[1] *Институт космических исследований РАН*
117997 Москва, Профсоюзная, 84/32
E-mail: pbrutkevich@gmail.com
[2] *Институт высокопроизводительных компьютерных вычислений, Сингапур*
E-mail: pprutkevich@yahoo.com

Считается, что теоретическое описание таких природных явлений как смерч и тайфун требует учёта нелинейности. Однако многочисленные попытки учесть нелинейные слагаемые из системы гидродинамики не приводят к построению теории этих природных явлений. Обычно учитывают инерционные слагаемые $(V_{grad})V$ в уравнениях Навье–Стокса. Однако эти слагаемые не привносят в систему энергию. В настоящей работе методом разложения по функциям Бесселя описываются стационарные решения нелинейной конвекции в вертикальном канале заданного радиуса с учётом сжимаемости. Нелинейность считается обусловленной зависимостью стратификации от вертикальной скорости течения воздуха. Такая ситуация характерна для смерчей и тропических циклонов, в которых стратификация обусловлена выделением скрытой теплоты фазовых переходов атмосферной влаги в восходящих потоках воздуха. В результате получено, что сжимаемость воздуха и нелинейность, обусловленная зависимостью стратификации от вертикальной скорости, оказываются основными факторами, обусловливающими решения типа смерча.

Ключевые слова: нелинейная конвекция, стратификация, смерч, атмосферная влага, фазовые переходы.

Вопрос о формировании и структуре воронки смерча является очень важным как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Считается, что смерч представляет собой часть вращающегося грозового облака. Вначале вращение заметно лишь непосредственно в вихревом облаке. Затем его часть, похожая на воронку, отвисает книзу. Воронка, вращаясь, постепенно удлиняется и в какой-то момент соединяется с земной поверхности. Она имеет вид колонны или хобота, который расширяется к облаку и сужается к земле. Скорость вращения воронки иногда почти звуковая, направление вращения – по спирали снизу вверх.

До настоящего времени не построено удовлетворительной теоретической модели, описывающей образование воронки смерча. Этот вопрос оказывается достаточно сложным как с принципиальной, так и с технической точки зрения. Считается, что образование и существование смерча должно описываться нелинейными уравнениями гидродинамики, Однако вопрос о том, какие именно нелинейные слагаемые играют в описании этого явления основную роль остаётся открытым. В самом деле, инерционные нелинейные слагаемые $(V_{grad})V$ не описывают совершение работы и, хотя именно они отвечают за вращение структуры, проблему энергетики явления они не решают (*Fritsch* et al., 1986; *Аристов*, 2001; *Renno*, *Imgersoll*, 1996). Известно также, что энергетика смерча обусловлена выделением скрытой теплоты фазовых преобразований атмосферной влаги. Нетрудно показать, что конденсация пара, содержащегося в атмосфере, действительно может обеспечить характерные для смерча скорости вращения воздуха.

Энергетический баланс в смерче

Пусть за время dt в колонну смерча поступает с боков dM килограммов теплого влажного воздуха. В этом воздухе содержится dM_v килограммов пара. Обозначим через q массовую долю пара в теплом воздухе, который всасывается в колонну смерча

$$q = \frac{dM_v}{dM}.$$

При полной конденсации этого пара за время dt в смерче выделится энергия

$$dE = dM_v L = dM\ q\ L, \qquad (1)$$

где $L = 2{,}256 \cdot 10^6$ Дж/кг – удельная теплота парообразования. В сформировавшемся стационарном смерче эта энергия расходуется на сообщение вращения воздуху, всасываемому за время dt в колонну dE_1, на диссипацию в атмосфере dE_2, трение о земную поверхность dE_3 и другие потери.

$$dE = dE_1 + dE_2 + dE_3 + \ldots. \qquad (2)$$

Запишем следующую оценку первого слагаемого в правой части уравнения (2):

$$dE_1 = dM \frac{v^2}{2}. \qquad (3)$$

Таким образом, dE_1 – это кинетическая энергия воздуха массы dM, который поступает в колонну смерча с периферии за время dt. Если в колонну смерча воздух втягивается на разной высоте z над земной поверхностью, то скорость v в правой части уравнения (3) есть некоторая усреднённая по высоте скорость $v = \left\langle v(r, z)\big|_{r=R} \right\rangle$, где R – радиус колонны смерча. Но, поскольку воздух втягивается в основном снизу, то можно считать:

$$\mathrm{v} \approx \mathrm{v}(r, 0)\big|_{r=R}. \qquad (4)$$

Так как все слагаемые в правой части (2) положительны, из соотношения баланса энергии (2) следует неравенство

$$dE_1 < dE. \qquad (5)$$

Подстановка (1), (3) в (5) дает верхнюю границу для скорости воздуха, поступающего в колонну смерча

$$v < v_{\max}(q) = \sqrt{2qL}. \qquad (6)$$

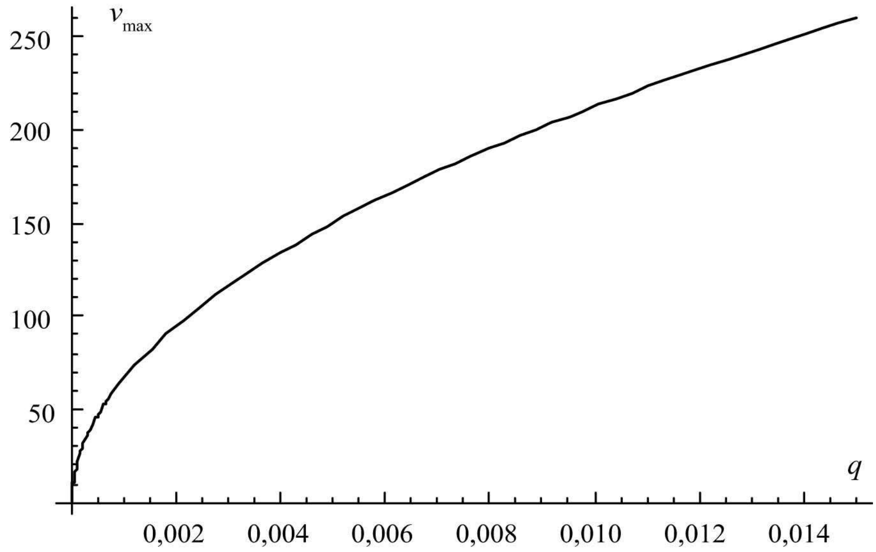

Рис. 1. Зависимость (6) максимальной скорости ветра в смерче v_{max} от массовой доли q пара в приземном слое воздуха

Таким образом, если вращение воздуха обеспечивается конденсацией содержащегося в атмосфере водяного пара, то скорость ветра не может превышать некоторой величины, которая определяется только массовой долей пара в атмосфере. Как видно на рис. 1, простая оценка (6) дает правильный порядок для максимальной величины скорости ветра в торнадо.

Стационарные решения в аксиально-симметричном канале

Опишем установившееся движение газа в аксиально-симметричном вертикальном канале моделирующее течение воздуха в колонне смерча. При этом будем учитывать тот факт, что поднимающийся влажный воздух находится в состоянии насыщения и имеет почти влажноадиабатические вертикальные распределения термодинамических параметров, а опускающийся воздух практически не содержит влаги и характеризуется сухоадиабатическими вертикальными распределениями термодинамических параметров. Однако хорошо известно, что влажноадиабатические вертикальные распределения температуры влажного и сухого воздуха значительно отличаются друг от друга. Для качественного учёта этого обстоятельства включим в рассмотрение задачи слагаемое, учитывающее различие вертикального распределения температуры в сухом и влажном воздухе в зависимости от знака вертикальной скорости движения воздуха (Emanuel, 1994; *Rutkevich*, 2002; *Руткевич*, 2001*а*, *б*),

$$\gamma(v_z) = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{v_z}{v_T}, \tag{7}$$

где параметры γ_1, v_T —численные значения изменения градиент вертикального распределения температуры при наличии вертикальной скорости воздуха. Такое слагаемое, которое имитирует конденсацию пара в колонне смерча, очевидно, приведёт к нелинейности в уравнении для энтропии.

Рассмотрим аксиально-симметричное течение газа в высоком цилиндрическом канале радиуса R. Запишем линеаризованную систему гидродинамики во вращающейся с частотой Ω системе координат с учётом нелинейного слагаемого (7) — зависимости градиента вертикального распределения температуры от вертикальной скорости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{v} + \frac{\nabla P_1}{\rho_0(z)} + \frac{g}{\rho_0(z)}\rho_1\vec{e}_z + 2\vec{\Omega}\times\vec{v} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\vec{v}\right) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - c^2\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2\gamma\left(v_z\right)\rho_0 v_z = \chi\frac{c_p}{c_v}\Delta P_1 - c^2\chi\Delta\rho_1. \tag{10}$$

Здесь P_1, ρ_1 — поправки к давлению и плотности; $\vec{e}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, $\vec{\Omega}$ — параметр Кориолиса; остальные обозначения общепринятые. Предположим, что горизонтальные производные всех зависимых переменных существенно превосходят вертикальные.

Следует отметить, что, обращаясь к исследованию полной системы гидродинамических уравнений, мы невольно учитываем звуковую компоненту. Таким образом, ограничиться приближением несжимаемой жидкости при рассмотрении вихря нельзя, потому что без звуковой скорости однородная по высоте структура теряет связь вращения с остальными параметрами, т. е. такая вихревая структура не будет вращаться, что полностью противоречит нашей постановке задачи.

Воспользуемся представлением для поля скорости в виде суммы потенциального, тороидального и полоидального полей (*Руткевич*, *Руткевич*, 2009):

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\psi + \vec{v}_\varphi = \nabla\cdot\Phi + \nabla\times\left(\vec{e}\psi\right) + \nabla\times\left(\nabla\times\left(\vec{e}\varphi\right)\right), \tag{11}$$

где Φ, ψ, φ — «потенциалы» потенциального, тороидального и полоидального полей скорости, которые являются скалярными функциями времени и координат. В этих переменных стационарные уравнения (8) — (10) принимают вид

$$-\nu\Delta\Delta\Phi + \frac{\Delta P_1}{\rho_0} + \frac{g}{c^2}\frac{g\rho_1}{\rho_0} + 2\Omega\Delta\psi = 0, \tag{12}$$

$$-\nu\Delta_\perp\Delta_\perp\psi - 2\Omega\Delta_\perp\Phi = 0, \tag{13}$$

$$-\nu\Delta\Delta\Delta\varphi + \frac{g}{c^2}\frac{\Delta P_1}{\rho_0} - \frac{g}{\rho_0}\Delta\rho_1 = 0, \tag{14}$$

$$\rho_0\Delta\Phi + \rho_0\frac{g}{c^2}\Delta\varphi = 0, \tag{15}$$

$$-c^2\gamma(v_z)\rho_0\Delta\varphi - \chi\kappa\,\Delta P_1 + \chi c^2\Delta\rho_1 = 0, \tag{16}$$

$$\kappa = c_P/c_v = 1{,}4.$$

Исключаем из этой системы все зависимые переменные, кроме потенциала полоидального поля и получаем для этого потенциала уравнение:

$$a_1\Delta^3\varphi + \Delta^2\varphi + \frac{(a_1\Delta+1)}{(1-\kappa)}\left[a_3\varphi + \kappa\Delta^2\varphi\right] + a_2\varphi = -\frac{a_1a_3}{(\kappa-1)}\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\frac{\Delta(\varphi\Delta\varphi)}{v_T R^2}, \tag{17}$$

где $a_1 = \dfrac{c^4}{R^2g^2}$, $a_2 = \dfrac{(2\Omega)^2 R^4}{v^2}$, $a_3 = \dfrac{\gamma_0 g R^4}{\chi v(1-\kappa)}$ — приведенные к безразмерному виду коэффициенты уравнения (17).

Решение уравнения (17) ищем в виде разложения по функциям Бесселя нулевого порядка, считая, что на границе цилиндра радиальная и азимутальная компоненты скорости равны нулю, а у вертикальной компоненты скорости радиальная производная обращается в нуль. Для решения задачи используем естественные атмосферные значения параметров $v = \chi = 10$ м^2/с; $\Omega = 1$ 1/с; $c^2 = 10^5$ м^2/с^2; $g = 9{,}8$ м/с^2; $v_T = 10^{-3}$ м/с; $\gamma_0 = 3{,}33\cdot10^{-7}$ 1/с, $\gamma_0 = 3{,}33\cdot10^{-6}$ 1/с, $R = 200$ м.

Таким образом, решение задачи ищем в виде разложения по ограниченному числу функций Бесселя нулевого порядка. Такой подход является маломодовым, и количество удерживаемых в разложении мод обычно ограничивают, когда соответствующие решения становятся достаточно близкими. На рис. 2 представлены графики для потенциала полоидального поля скорости при удержании в разложении одной, двух мод и трёх мод. Видно, что решение с удержанием трёх мод является достаточно точным для рассматриваемых параметров задачи.

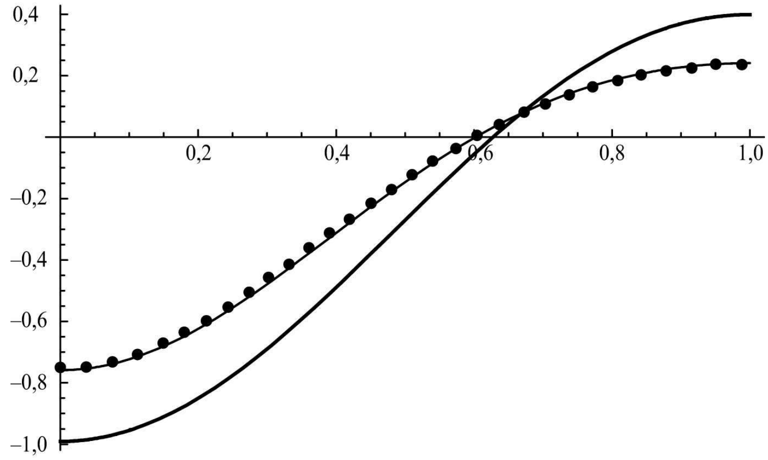

Рис. 2. Решения уравнения (17) для потенциала полоидального поля скорости при удержании в разложении: одной моды (сплошная жирная кривая), двух мод (сплошная тонкая кривая) и трёх мод (кривая из жирных точек)

На рис. 3 и 4 представлены все компоненты поля скорости в канале и потенциал полоидальной компоненты, на основе которой проводились вычисления.

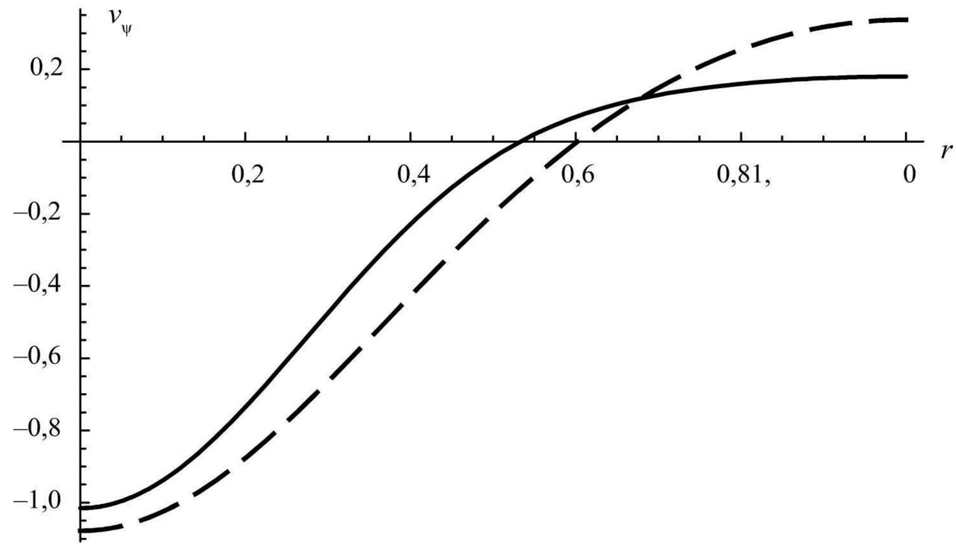

Рис. 3. Радиальная зависимость полоидальной (вертикальной) скорости (сплошная кривая) v_ψ и потенциала полоидальной скорости (пунктирная кривая) в относительны единицах

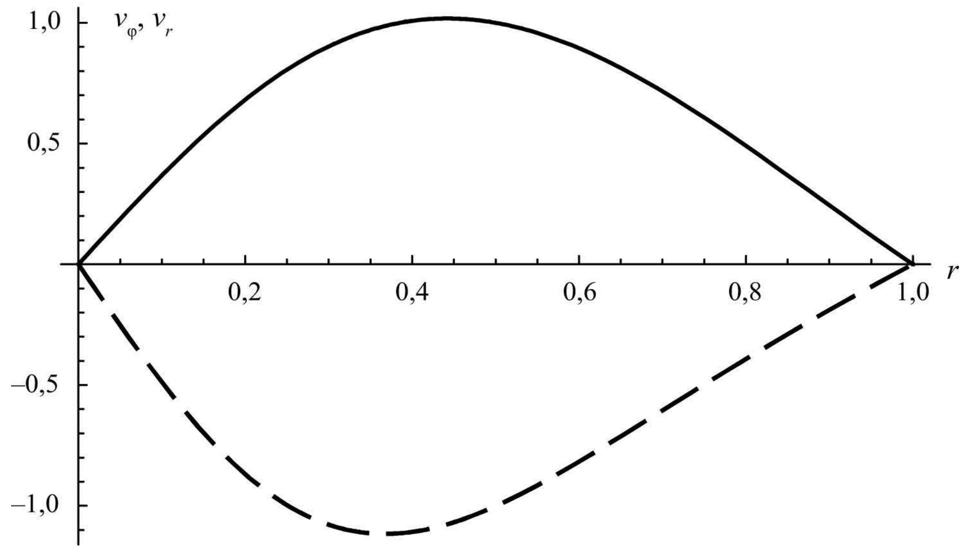

Рис. 4. Радиальная зависимость тороидальной (азимутальной) скорости (сплошная кривая) v_r и потенциальной (радиальной) скорости (пунктирная кривая) v_φ в относительны единицах

Возвращаясь к размерным параметрам, получим максимальные значения скоростей, представленных на рис. 3 и 4: v_ψ = 63 см/с, v_r = –1,2 мм/с, v_φ = –1,2 мм/с. Из результатов расчёта видно, что азимутальная компонента скорости существенно превосходит остальные компоненты. Радиальная компонента скорости направлена к оси вихря.

Таким образом, в работе получена оценка для верхней границы скорости ветра в смерче и показано, что она определяется только массовой долей пара в приземном слое воздуха. Методом разложения потенциала полоидального поля по функциям Бесселя получены маломодовые стационарные распределения компонент скорости для задачи о нелинейной конвекции, в которой нелинейность считается обусловленной только зависимостью стратификации от вертикальной скорости течения воздуха. В результате получено, что сжимаемость воздуха и указанная нелинейность, оказываются основными факторами, обусловливающими решения типа смерча даже в случае задачи без учёта инерционных нелинейных слагаемых.

Литература

1. *Fritsch J.M.*, *Kane R.J.*, *Chelius C.R.* et al. (1986) The Contribution of Mesoscale Convective Weather to the Warm-Season Precipitation in the United States // J. Applied Meteorology. 1986. V. 25. P. 1333–1345.
2. *Аристов С.Н.* (2001) Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 4. С. 477–480.
3. *Renno N.O.*, *Imgersoll A.P.* (1996) Natural convection as a heat engine: A theory for CAPE // J. Atmospheric Sciences. 1996. V. 53. P. 572–585.
4. *Emanuel K.* (1994) // Atmospheric convection. N. Y.; Oxford: Oxford Univ. Press., 1994.
5. *Rutkevich P.B.* (2002) Convective and rotational instability in moist air // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2002. V. 315/1-2. P. 215–221.
6. *Руткевич П.Б.* (2001*а*) Вращательная неустойчивость в двухфазной двухкомпонентной системе: Препринт. Пр-2034. М.: ИКИ РАН, 2001. 11 с.
7. *Руткевич П.Б.* (2001*б*) Вращательная неустойчивость во влажном воздухе. «Применение симметрии и косимметрии в теории бифуркаций и фазовых переходов // SCDS. 2-я Международ. шк.-семинар. 18–23 сент. 2001, г. Сочи, Лазаревское, Россия: Сб. тр. 2001. С. 171–182.
8. *Rutkevich P.B.* (1998) Hydrodynamic Motions of Saturated Air in Terms of Equilibrium Thermodynamics // Electromagnetic phenomena. 1998. V. 1. N. 4. P. 538–544.
9. *Руткевич П.Б.*, *Руткевич П.П.* (2009) Нелинейная конвекция в аксиальном вертикальном канале // Современные проблемы дистанц. зондирования Земли из космоса: Сб. науч ст. Вып. 6. М.: Азбука-2000, 2009. Т. 2. С. 188-192. + 1 электрон. отп. диск (CD-ROM).

Nonlinear vortical current in the vertical channel, caused by asymmetry of vertical humidity transition

P.B. Rutkevich[1], P.P. Rutkevich[2]

[1] *Space Research Institute, Russian Academy of Sciences (IKI RAN)*
Profsoyuznaya Str., 84/32, Moscow, GSP-7, Russia, 117997
E-mail: pbrutkevich@gmail.com
[2] *Institute of high performance computing, Singapore*
E-mail: pprutkevich@yahoo.com

It is widely accepted that theoretical description of the natural phenomena as tornado and tropical cyclone should be nonlinear. However numerous efforts to take into account the nonlinear terms in the hydrodynamic system, do not lead to a complete theory of these natural phenomena. Usually for nonlinearity the inertial terms $(V_{grad})V$ in the Navier–Stokes equations are considered. However these terms do not introduce energy in the system. In the present paper we describe the stationary solutions of the nonlinear convection in the vertical axial channel of a given radius with compressibility taken into account with the use of the Bessel functions series. We associate the nonlinearity with the stratification dependence on the air current vertical velocity. Such situation characterizes tornadoes and tropical cyclones where stratification is caused by the latent heat release of the atmospheric moisture phase transitions in ascending air currents. As a result it is shown that the problem nonlinearity caused by stratification dependence on the vertical velocity and the air compressibility turn to be the principal factors of the tornado type solutions.

Keywords: nonlinear convection, stratification, tornado, atmosphere moisture, phase transitions.