

Задача ассилияции «образа» поверхностных скоростей для уравнения завихренности

А.Ю. Семененко

Московский физико-технический институт (ГУ),
141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9,
e-mail: stormerr@gmail.com

Предлагаются математические модели физических процессов в вихревом течении, создаваемом магнитогидродинамическим способом в тонком слое жидкости на основании двумерного уравнения переноса завихренности. Формулируются обратные задачи о восстановлении вектора электрического поля, формулируются алгоритмы численного решения и приводятся результаты численных экспериментов. Проводится сравнение с результатами, полученными при использовании линейных уравнений мелкой воды.

Ключевые слова: обратные задачи, вариационная ассилияция данных, образы наблюдений, сопряженные задачи.

Введение

Данная работа посвящена постановке обратных задач на основе двумерного стационарного и нестационарного уравнений переноса завихренности для модели движения жидкости в лабораторном эксперименте и численному решению этих задач. Формулируются обратные задачи о восстановлении электрического поля в эксперименте, проведенном в Институте физики атмосферы РАН (ИФА РАН) им. А.М. Обухова для исследования вихревого течения, создаваемого магнитогидродинамическим способом в тонком слое вращающейся вязкой жидкости. Подробно о данном эксперименте можно прочитать в статье (Пономарев и др., 2009).

В работе также приводится сравнение результатов расчетов на основании уравнения завихренности с расчетами для более простой линейной модели уравнений мелкой воды. Подробнее об этих расчетах можно прочитать в (Agoshkov et al., 2011).

Предложенный в статье метод может использоваться для усвоения данных наблюдений о вихрях (полученных, например, с помощью космических наблюдений) с целью восстановления динамики движения жидкости в Мировом Океане и его акваториях.

Стационарная модель

Для описания физических процессов в эксперименте предлагается следующая математическая модель:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + UU_x + VU_y - fV &= -\frac{1}{\rho} P_x^a + \frac{1}{h\rho} \tau_1 + \frac{1}{\rho} F_1 + \eta \Delta U, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + UV_x + VV_y + fU &= -\frac{1}{\rho} P_y^a + \frac{1}{h\rho} \tau_2 + \frac{1}{\rho} F_2 + \eta \Delta V, \\ \operatorname{div} \vec{V} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где: U, V — средние по глубине скорости соответственно по осям Ox, Oy ; $h=\text{const}$ — средняя глубина бассейна; $g=\text{const}$ — ускорение свободного падения; $\rho=\text{const}$ — плотность жидкости в бассейне; $\tau=(\tau_1, \tau_2)$ — вектор напряжения трения ветра; $h=\text{const} \geq 0$ — коэффициент горизонтальной вязкости; $U_x \equiv \partial U / \partial x, V_y \equiv \partial V / \partial y$; f — параметр Кориолиса (Марчук, Саркисян, 1988); $\vec{F} = (F_1, F_2)$ — электромагнитная сила.

Рассматривая стационарный процесс, и вводя функцию тока ϕ :

$$U = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, V = \frac{\partial \phi}{\partial x} ,$$

уравнение (1) сводим к переменной ϕ и получаем уравнение переноса завихренности:

$$-\eta \Delta^2 \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial x} = \frac{1}{h\rho} rot \vec{\tau} + \frac{1}{\rho} rot \vec{F} \quad (2)$$

где β — производная параметра Кориолиса по широте.

Будем рассматривать уравнение (2) в ограниченной односвязной области Ω в двумерном пространстве. Тогда, можно поставить следующие граничные условия:

$$\phi|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3)$$

Разрешимость задачи (2)–(3) была рассмотрена, например, в (Ладыженская, 1970).

Перейдем теперь к рассмотрению лабораторного эксперимента. Так как в эксперименте нет ветра, как движущей силы, то $\vec{\tau} = 0$. Из теории магнитной гидродинамики известно что (Яновский, 1964; Кирко, Кирко, 2009) $\vec{F} = [\vec{j}, \vec{B}] \bar{b}$, $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}])$, где \vec{V} — скорость движения вещества; \vec{j} — плотность электрического тока; \vec{E} — напряженность электрического поля; \vec{B} — магнитная индукция; $[,]$ — векторное произведение; σ — удельная проводимость среды. Считаем что \vec{j} , \vec{E} и \vec{B} не зависят от z . Для данного эксперимента можно считать что $\vec{B} = (0, 0, B)^T$, $\vec{E} = (E_1, E_2, 0)^T$. Также считая, что скорость $\vec{V} = (U, V, 0)^T$, получаем: $F_1 = \sigma B E_2 - \sigma B^2 U$, $F_2 = -\sigma B E_1 - \sigma B^2 V$.

Подставим $\vec{\tau} = 0$ и полученные выражения в (2), получим уравнение

$$-\eta \Delta^2 \phi + \text{div}(r \nabla \phi) + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial x} = \frac{\sigma}{\rho} \text{div}(B \vec{E}) \quad (4)$$

где $r = \sigma B^2 / \rho$.

Постановка обратной задачи в стационарном случае и алгоритм ее решения

Подставим следующую обратную задачу: найти ϕ , \vec{E} , т.ч.:

$$\begin{cases} L\phi \equiv -\eta \Delta^2 \phi + \text{div}(r \nabla \phi) + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \phi}{\partial x} = \frac{\sigma}{\rho} \text{div}(B \vec{E}), \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \\ C\phi = \vec{\phi}_{obs}, \end{cases} \quad (5)$$

где Ω — односвязная область с кусочно-гладкой границей (например, $\Omega = [0, a] \times [0, b]$); $r = \sigma B^2 / \rho$, β — параметры, которые предполагаются постоянными величинами; $\vec{\phi}_{obs} = [\phi_{obs1}, \phi_{obs2}]^T$ — наблюдаемый «образ» поля скоростей (поля движения красителей, алюминиевых частиц);

$$C\phi \equiv \left[-\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^T .$$

Предположим далее, что поле $\vec{E} = (E_1, E_2)$ потенциально, при этом $\vec{n} \cdot \vec{E} = \vec{E}_\Gamma \cdot \vec{n} = E_{\Gamma,n}$ на $\partial\Omega$ при заданном векторе \vec{E}_Γ и \vec{n} — единичном векторе внешней нормали к границе бассейна $\partial\Omega$. Продолжая \vec{E}_Γ «гармоническим» образом (т. е. вектор функцией, каждый компонент которой вне Ω является гармонической функцией) и, переходя к $\vec{E}_0 = \vec{E} - \vec{E}_\Gamma$ и $\vec{u} = B\vec{E}_0$, получаем задачу:

$$\begin{cases} L\varphi \equiv -\eta\Delta^2\varphi + \operatorname{div}(r\nabla\varphi) + \beta \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x} = \frac{\sigma}{\rho} \operatorname{div}(\vec{u}) + f, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \\ C\varphi = \vec{\Phi}_{obs}, \end{cases} \quad (6)$$

где $f = -\sigma(\operatorname{div}B\vec{E}_\Gamma)/\rho$. Также предполагаем, что $\operatorname{div}\vec{\Phi}_{obs} = 0$ и $\vec{\Phi}_{obs} \cdot \vec{n}|_\Gamma = 0$.

Возьмем первую вариацию от первого уравнения из (6).

$$\begin{aligned} & -\eta\Delta^2\delta\varphi + \operatorname{div}(r\nabla\delta\varphi) + \beta \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\delta\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\delta\varphi}{\partial y} - \\ & - \frac{\partial\delta\varphi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\delta\varphi}{\partial x} = \frac{\sigma}{\rho} \operatorname{div}(\delta\vec{u}). \end{aligned} \quad (7)$$

Свяжем с этой вариацией следующий линейный оператор:

$$L_\varphi \cdot = -\eta\Delta^2 \cdot + \operatorname{div}(r\nabla \cdot) + \beta \frac{\partial \cdot}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial x} \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\Delta\cdot}{\partial y} - \frac{\partial \cdot}{\partial y} \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\Delta\cdot}{\partial x} \quad (8)$$

Задачу (6) можно записать в следующей операторной постановке:

$$\begin{cases} L\varphi = B\vec{u} + f, \\ C\varphi = \vec{\Phi}_{obs}. \end{cases} \quad (9)$$

Для краткости не будет приводить здесь определения операторов и пространства, в которых решается каждое из уравнений. Для приближенного решения задачи (9) применяем методологию, изложенную в (Агошков, 2003). В итоге получаем итерационный алгоритм вида: если \vec{u}^k задано, то \vec{u}^{k+1} находится путем последовательного решения задач:

$$\begin{cases} L\varphi^k = B\vec{u}^k + f, \\ L_{\varphi^k}^* q^k = C^* (C\varphi^k - \vec{\Phi}_{obs}), \\ \vec{u}^{k+1} = \vec{u}^k - \tau_k (\alpha(\vec{u}^k - \vec{u}^C) + B^* q^k), \end{cases} \quad (10)$$

где $\vec{u}^k = \vec{u}^{k+1} = \vec{u}^C = 0$ на $\partial\Omega$.

Если вектор \vec{u} построен с необходимой точностью, то определять вектор \vec{E} будем так же как в статье (Agoshkov et al., 2011). Дальнейшая аппроксимация подзадач из (10) может быть осуществлена, например, методом конечных разностей, что и осуществляется в численных экспериментах, результаты которых приводятся в следующем параграфе.

Численные результаты в стационарном случае

Аппроксимация подзадач из (14) осуществляется конечно-разностным методом на сетке А (Аракава, Лэмб, 1981) на протяжении нескольких сот итераций. Надо заметить, что для предоставленных данных $\|\operatorname{div}\vec{\phi}_{obs}\|_{L_2(\Omega)} \approx 0,028$.

Магнитное поле бралось согласно (Пономарев и др., 2009):

$$B_z = B_0 \exp\left(\frac{-z}{l_z}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{l_y}\right) \text{ для } z = 0.$$

Ниже приведены параметры, используемые при расчетах: размеры кюветы: $0,24 \times 0,12 \text{ м}$, $l_x = 0,24 \text{ м}$, $l_y = 0,12 \text{ м}$, $l_z = 0,0094 \text{ м}$, $\beta \approx 10^{-11} \text{ м}^{-1}\text{с}^{-1}$, $\rho = 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}^3$, $B^0 = 0,32 \text{ Тл}$, $\sigma \approx 5 \dots 50 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, $r = 0,036 \text{ с}^{-1}$. Здесь $\vec{E}_\Gamma = (E_{\Gamma 1}, E_{\Gamma 2})$, $E_{\Gamma 1} = E_{\Gamma 2} = \text{const} \approx 1 \text{ В/м}$. Результаты численных расчетов приведены на рис. 1–4.

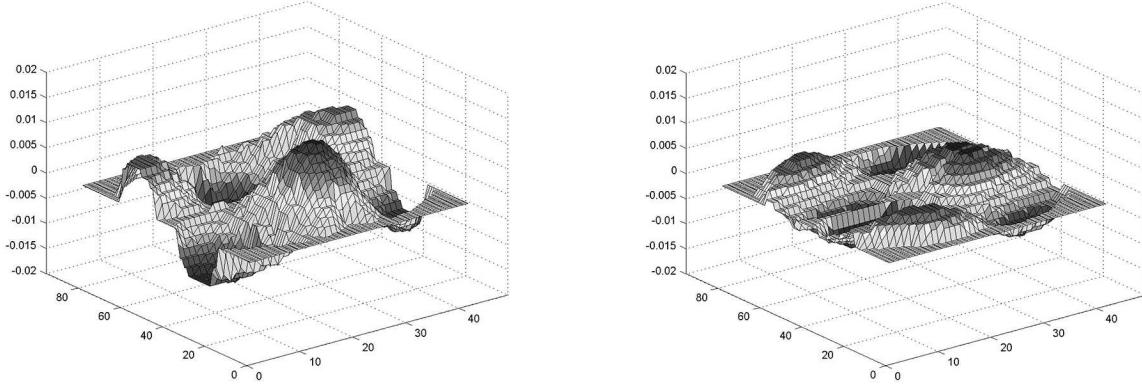


Рис 1. Компоненты наблюдаемой скорости: а — первый; б — второй

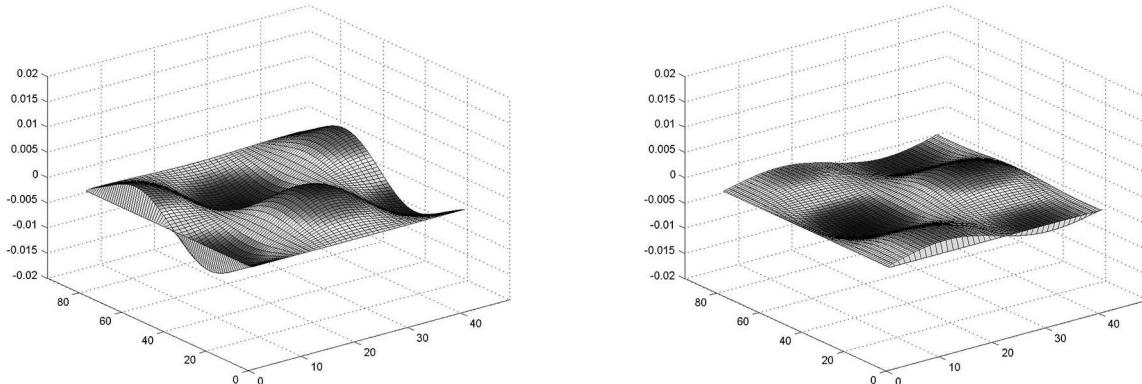


Рис 2. Компоненты восстановленной скорости: а — первый; б — второй

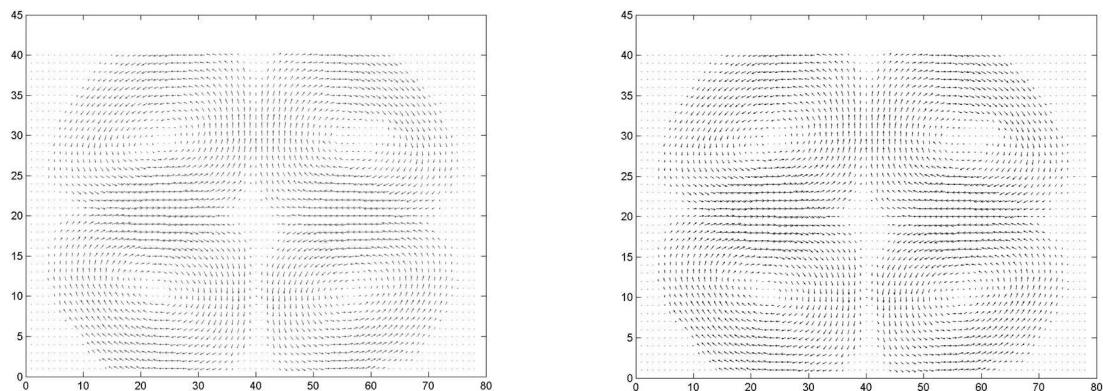


Рис 3. Поля скоростей: а — «образ»; б — восстановленное

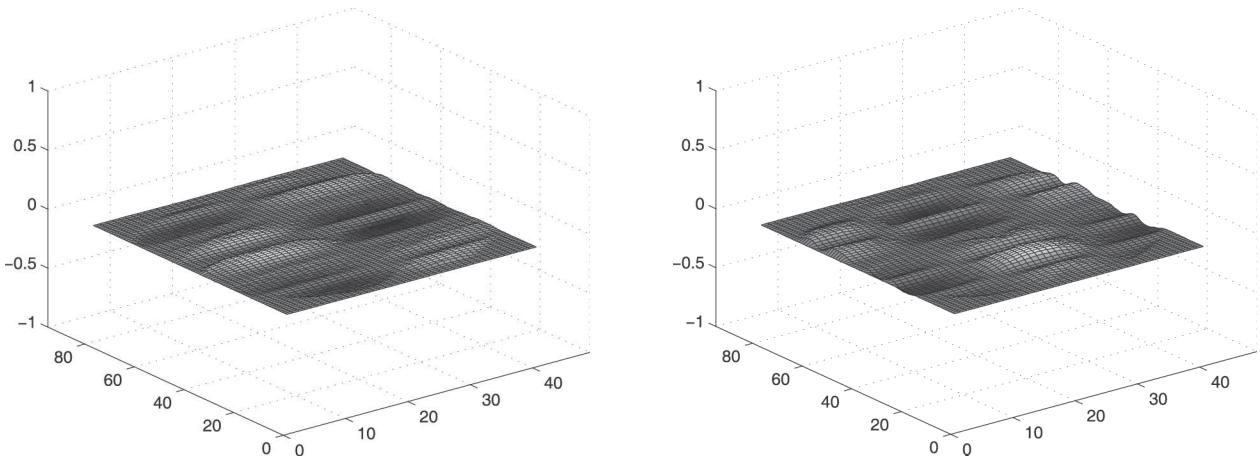


Рис 4. Компоненты восстановленной переменной части электрического поля; а — первый; б — второй

Нестационарная модель

Для описания физических процессов в эксперименте будем по-прежнему использовать модель (1). Сводя уравнение (1) к переменной φ получим уравнение переноса завихренности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi - \eta \Delta^2 \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} = \frac{1}{h\rho} \text{rot} \vec{\tau} + \frac{1}{\rho} \text{rot} \vec{F} \quad (11)$$

Будем рассматривать это уравнение на цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$. Поставим следующие граничные условия:

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (12)$$

Разрешимость задачи (11)–(12) была рассмотрена, например, в работе (Ладыженская, 1970). Так же как и в стационарно случае для лабораторного эксперимента получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi - \eta \Delta^2 \varphi + \text{div}(r \nabla \varphi) + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} = \frac{\sigma}{\rho} \text{div}(B \vec{E}). \quad (13)$$

Постановка обратной задачи в нестационарном случае и алгоритм ее решения

Также как и в стационарном случае поставим обратную задачу: найти φ , \vec{u} , φ_0 т.ч.:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + L\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi - \eta \Delta^2 \varphi + \text{div}(r \nabla \varphi) + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} = \frac{\sigma}{\rho} \text{div}(\vec{u}) + f, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \\ C\varphi = \vec{\varphi}_{obs}. \end{cases} \quad (14)$$

Возьмем первую вариацию от первого уравнения из (14). Из нее получим такую же, как и в стационарном случае, формальную запись оператора L_φ , но только сам оператор будет уже определен в другом пространстве, но для краткости полное определение оператором мы здесь приводить не будем. Задачу (14) можно записать в следующей операторной постановке:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + L\varphi = B\vec{u} + f, \\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \\ C\varphi = \vec{\varphi}_{obs}. \end{cases} \quad (15)$$

Применяя методологию, изложенную в (Агошков, 2003), для решения (15) строим следующий итерационный алгоритм: если \vec{u}^k , φ_0^k заданы, то \vec{u}^{k+1} , φ_0^{k+1} находится путем последовательного решения задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi^k + L \varphi^k = B \vec{u}^k + f, \quad \varphi^k \Big|_{t=0} = \varphi_0^k, \\ -\frac{\partial}{\partial t} \Delta q^k + L_{\varphi}^* q^k = C^* (C \varphi^k - \vec{\varphi}_{obs}), \quad q^k \Big|_{t=T} = (\Delta)^{-1} C^* (C \varphi^k - \vec{\varphi}_{obs})(T), \\ \vec{u}^{k+1} = \vec{u}^k - \tau_{k1} (\alpha_1 (\vec{u}^k - \vec{u}^C) + B^* q^k), \\ \varphi_0^{k+1} = \varphi_0^k - \tau_{k2} (\alpha_2 \varphi_0^k - q_0^k). \end{cases} \quad (16)$$

Если вектор \vec{u} построен с необходимой точностью, то определять вектор \vec{E} будем так же как в статье (Agoshkov et al., 2011). Дальнейшая аппроксимация подзадач из (16) может быть осуществлена, например, методом конечных разностей, что и осуществляется в численных экспериментах, результаты которых приводятся в следующем параграфе.

Численные результаты в нестационарном случае

Численные эксперименты приводились при тех же значениях параметров, что и в стационарном случае. Значение шага по времени соответствует разности во времени между рассматриваемыми снимками в нестационарном режиме работы лабораторной установки. Результаты численных расчетов приведены на рис. 5–7.

Результаты расчетов для восстановленного электрического поля аналогичны стационарному режиму и показывают небольшое отклонение переменной составляющей от постоянного значения.

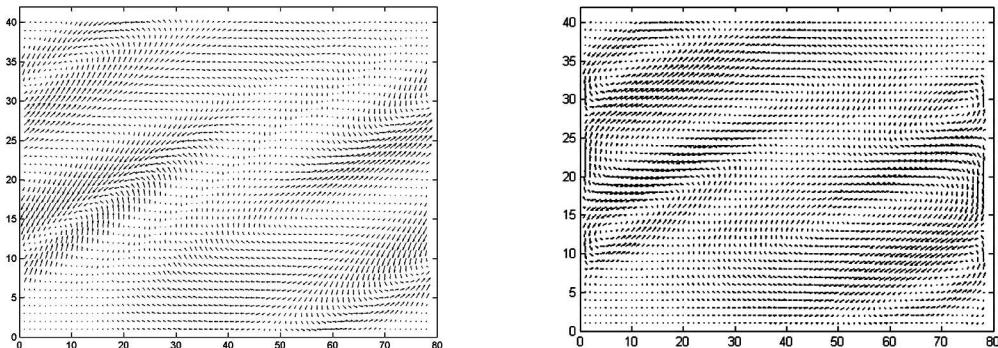


Рис. 5. Поля скоростей в момент времени T_0 : а — «образ»; б — восстановленное

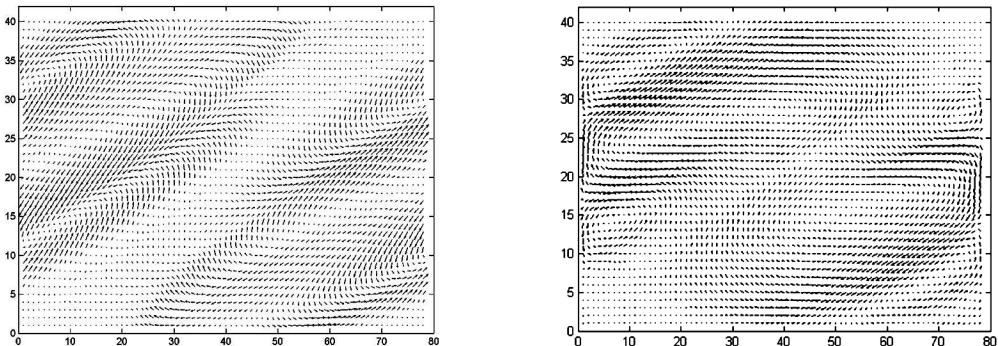


Рис. 6. Поля скоростей в момент времени T_5 : а — «образ»; б — восстановленное

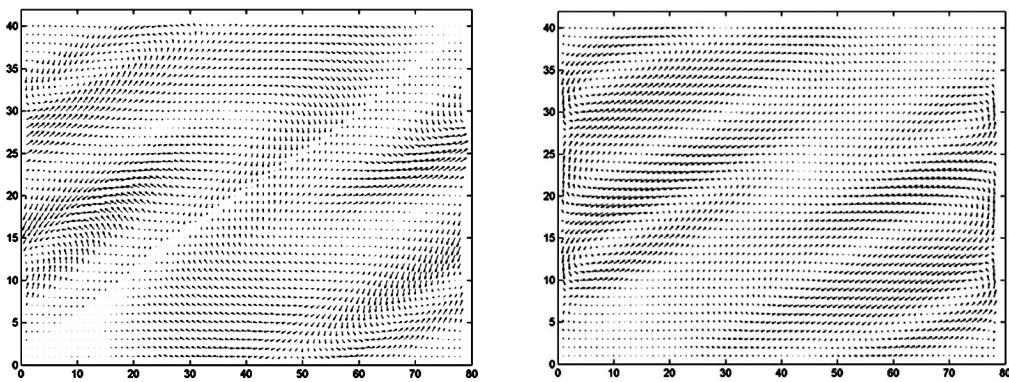


Рис. 7. Поля скоростей в момент времени T_{10} : а — «образ»; б — восстановленное

Заключение

Результаты расчетов основываясь на более точной модели уравнения переноса завихренности с точностью 10^{-3} (для нестационарного режима 10^{-2}) совпадают с результатами расчетов основывая на линейной системе уравнений типа мелкой воды (Agoshkov et al., 2011). Поэтому можно сделать вывод, что рассматриваемая модель в целом адекватно описывает процесс в эксперименте и для экономии расчетных мощностей целесообразно проводить расчеты для тонкого слоя жидкости используя более простую линейную систему уравнений.

Рассмотренный подход ассилияции «образов» поверхностных скоростей в модели движения жидкости может быть применен для восстановления динамики жидкости в более сложных областях (морях и океанах) при наличии данных о поверхностных течениях или вихрях, полученных, например, с помощью космических наблюдений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00806а).

Литература

1. Агощков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003. 256 с.
2. Аракава А., Лэмб В.Р. Вычислительные схемы для основных динамических процессов в глобальной циркуляционной модели Калифорнийского университета в Лос-Анжелесе // Модели общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 352 с.
3. Доронин Ю.П. Динамика океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 304 с.
4. Кирко И.М, Кирко Г.Е. Магнитная гидродинамика. Современное видение проблем. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Ижевский Ин-т компьютерных исслед., 2009. 632 с.
5. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
6. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. М.: Наука, 1988. 304 с.
7. Пономарев В.М., Ханаев А.А., Якушин И.Г. Нелинейное экмановское трение и асимметрия циклонических и антициклонических когерентных структур в геофизических течениях // Докл. АН. 2009. Т. 425. № 6. С. 821–826.
8. Яновский Б.М. Земной магнетизм. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1964.
9. Agoshkov V.I., Kosyrykin S.V., Semenenko A. Inverse problem for a model of magnetic hydrodynamics // Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. V. 26. N. 1. P. 1–15.

Assimilation problem for an “image” of velocities for vorticity equation

A. Semenenko

*Moscow Institute of Physics and Technology,
141700, Dolgoprudniy, Institutskiy lane, 9
e-mail: stormerr@gmail.com*

Mathematical models using the vorticity equation of physical processes in vertical flow, created in magnetic hydrodynamic way in a thin layer of rotating liquid, are proposed. Inverse problems on restoring electric field vector are stated, algorithms of numerical solution are formulated and the results of numerical experiments are presented. The results are compared to the results of calculations based on linear model of shallow water equations.

Keywords: inverse problems, variational data assimilation, images, adjoint problems.