

Исследование и алгоритм решения задачи об оптимальном маршруте корабля на основе теории рисков при дистанционном зондировании опасностей

В.И. Агошков^{1,2}, А.О. Заячковский²

¹ *Институт вычислительной математики РАН,
119333, Москва, Губкина, 8,
e-mail: agoshkov@inm.ras.ru*

² *МГУ имени М.В. Ломоносова,
119991, Москва, Воробьевы горы, 1,
e-mail: anton@adeq.inm.ras.ru*

В работе представлено возможное приложение результатов дистанционного зондирования океана. Для различных данных, указывающих на наличие опасности для прохождения судна, устанавливается величина риска возникновения критической ситуации с кораблем и предложен алгоритм нахождения оптимального маршрута корабля. Метод нахождения оптимального маршрута корабля базируется на минимизации «функционала стоимости маршрута», описывающего суммарные издержки, которыми может быть отягощен выбранный маршрут между расчетными точками. Мы предполагаем, что возможна критическая ситуация с кораблем, характеризующаяся, во-первых, вероятностью неблагоприятного события и, во-вторых, последствиями при его наступлении (ущербом). Для измерения риска используется подход, основанный на измерении убытков в неблагоприятной ситуации, и такая количественная мера риска включена в функционал. Рассмотрены вариационные уравнения для минимизации функционала и исследованы вопросы, связанные с разрешимостью задачи. Задача решалась численно, для приближенного решения использовался метод малого параметра. Результаты анализа позволяют в дальнейшем рассматривать другие более сложные задачи об оптимальном курсе корабля.

Ключевые слова: оптимальный маршрут корабля, дистанционное зондирование опасностей, вариационные уравнения, функционал риска.

Введение

Современные спутниковые системы обеспечивают непрерывный сбор данных о состоянии океана. Ученые и исследователи могут наблюдать не только температуру, скорости течения и другие гидротермодинамические параметры океана, но и специфические состояния и события на водной поверхности. Например, радиолокаторы в состоянии видеть выглаженные участки поверхности — слики, в том числе слики, обусловленные нефтяными загрязнениями и поверхностно-активными веществами, а также различные взвеси и цветение фитопланктона, *прохождение через которые неприемлемо для судна*. Для дистанционного контроля этих условий и ситуаций осуществляется оперативный и обзорный космический мониторинг. Результаты отражают текущее состояние и оперативно передаются органам управления для оценки ситуации и принятия при необходимости соответствующих мер.

Также появляются новые сферы и приложения для поступающего потока новых данных наблюдений. Отметим, что в настоящее время известной и актуальной проблемой стала проблема нападения на корабли морских пиратов, если курс корабля проходит акваторию возможного их нападения. Так, с 2010 г. информация о последних нападениях и грабежах пиратов поступает из информационного центра IMB Piracy Reporting Centre. IMB (International Maritime Bureau — Международное морское бюро) является специализированным подразделением Международной торговой палаты (ИТС). В их обязанности входит борьба с преступлениями, связанными с морской торговлей и транспортом, особенно с пиратством и коммерческим мошенничеством, и в защите экипажей океанских судов. Их

спутниковые системы наблюдения передают информацию в центр обработки данных, где они совместно с данными из других источников оперативно распространяются по сети. На рис. 1 можно видеть карту IMB Piracy & Armed Robbery Map 2012 с официального сайта <http://www.icc-ccs.org>. Также их спутниковые системы наблюдения постоянно расширяются и совершенствуются. В конце 2012 г. они получают в распоряжение новый спутник PAZ, разработанный компанией HISDESAT и который будет запущен на орбиту с космодрома Байконур. Тогда они первые в Евросоюзе будут иметь систему спутников, обладающих двойной системой распознавания — радарной и оптической. Спутник будет обладать разрешающей способностью в 1 м², и за сутки будет осуществлять 15 оборотов вокруг Земли, проходя оба ее полюса, и с такой траекторией, которая позволит наблюдать за любой точкой планеты. На создание спутника было потрачено 160 млн евро. Данный спутник выделяется своей способностью «видеть» и в ночное время, и даже если небо в районе наблюдения будет закрыто облаками, что невозможно для спутников, имеющих только оптическую систему наблюдения.

Помимо прочего в задачи спутника будет входить помощь в борьбе с морскими пиратами. Поскольку пираты часто выводят из строя систему слежения за судном, то с помощью PAZ судно будет обнаружено и информация будет передана находящимся поблизости другим судам. Кроме того, ожидается, что спутник станет полезен при прочих спасательных операциях, экологам, например для определения мест разлива нефти, а также для картографии высокого разрешения.

В настоящей работе будет рассмотрено, как можно применить получаемые данные для построения *оптимального маршрута корабля*.

Оптимизация маршрута судна заключается в одновременном учете многих факторов, влияющих на скорость и сохранность судна. Прохождение заданного маршрута можно осуществить многими путями и отнюдь не самый короткий маршрут может оказаться оптимальным. По существу, проводка судов рекомендованными курсами представляет собой процесс прогнозирования такого курса, следуя которым судно должно пройти в максимально благоприятных условиях погоды и волнения и уложиться в плановый график. Такие рассчитанные и рекомендованные службами сопровождения траектории являются в определенном смысле «предварительными оптимальными курсами кораблей».

Для того чтобы находить оптимальную из возможностей, приходится решать задачи на отыскание наименьших значений специальных функционалов, включающих функционалы стоимости отклонения корабля от предписанного маршрута, и представляющих собой различного рода риски (Ваганов, Им, 2001; Мушик, Мюллер, 1990). Подходы к решению задачи базируются на теории случайных функций и теории рисков, при этом применяются известные методы исследования и решения задач экстремальных задач (Алексеев и др., 2007).

1. Постановка задачи об оптимальном курсе корабля

Пусть в ограниченной области Ω из \mathbb{R}^2 с липшицевой кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ осуществляется движение («проводка») корабля. Для упрощения изложения мы ограничимся далее рассмотрением прямоугольной системой координат $x \equiv (x^1, x^2) \in \Omega$. Обозначим траекторию плавания (следования) корабля через $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ («курс корабля»), где $t \in [0, T]$ – время при $T < \infty$. Предполагается, что $|dX/dt| \equiv ((dX_1/dt)^2 + (dX_2/dt)^2)^{1/2} < \infty \forall t \in [0, T]$, т. е. что корабль может плыть только с конечной скоростью. Через $X^{(0)}(t) = (X_1^{(0)}(t), X_2^{(0)}(t))$ обозначается «предварительная оптимальная траектория» плавания корабля, которая заранее рассчитана и рекомендована службами сопровождения. Считаем выполненными условия $X(0) = X^{(0)}(0) = X_{(0)}$, $X(T) = X^{(0)}(T) = X_{(T)}$, т. е. как искомая траектория $X(t)$, так и предварительная $X^{(0)}(t)$ при $t=0$ выходят из одной и той же точки $X_{(0)}$, и заканчиваются в одной точке $X_{(T)}$ при $t=T$.

Введем функционал вида:

$$J_1(X) \equiv J_1(X, X^{(0)}) = \int_0^T \frac{1}{2} k_1(t) \left| \frac{d(X - X^{(0)})}{dt} \right|^2 dt \quad (1)$$

где $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ – траектория корабля в условиях возникновения риска (об этом речь будет идти ниже), $X^{(0)}(t)$ – оптимальная траектория, рассчитанная заранее без учета возможного риска. Функции $X_i(t), X_i^{(0)}(t), i=1,2$ продолжаем на \mathbf{R} постоянной $X_{(0),i}$ при $t < 0$ и постоянной $X_{(T),i}$ при $t > T$. Коэффициент $k_1(t)$ является положительной гладкой функцией $\forall t$.

Функционал можно интерпретировать как величину затрат («штраф») за отклонение траектории корабля от $X^{(0)}$.

Предположим теперь, что в течение заданного промежутка времени $(t_1, t_2) \subset (0, T)$ возможна критическая ситуация с кораблем. Характеристическую функцию интервала (t_1, t_2) обозначим $m_{1,2}$. Вероятное положение точки возникновения критической ситуации обозначаем $\tilde{X} \equiv (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$, а ее какую-либо реализацию обозначим $\tilde{X} \equiv (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$. Координаты точек \tilde{X}, \tilde{X} считаем независимыми от $t \in (0, T)$. Величины \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 считаем независимыми и равновероятными.

Распределение плотности вероятности возникновения критической ситуации в Ω (т. е. появления вероятностной величины \tilde{X}) зададим как произведение одномерных нормальных распределений:

$$f(x) \equiv f_1(x_1) f_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} e^{-\frac{(x_1 - a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} e^{-\frac{(x_2 - a_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (2)$$

с произвольными параметрами $a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2$ ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$). Известно также (Письменный, 2010), что a_i есть математическое ожидание случайной величины $\tilde{X}_i \in \mathbf{R}$, а σ_i – среднее квадратичное отклонение i -го нормального распределения ($i = 1, 2$). Поэтому чтобы задать нормальные распределения $f_i(x)$ достаточно знать (или задать) параметры $a_i, \sigma_i, i = 1, 2$.

Пусть далее $a_i \equiv X_i^{(n)}, i = 1, 2$ — координаты некоторой точки в $\Omega^{(n)} \subset \Omega$ – точки $X^{(n)} \equiv (X_1^{(n)}, X_2^{(n)})$ наиболее частого возникновения критической ситуации или просто точки, в которой ожидается данная ситуация.

Параметры σ_1, σ_2 будем задавать равными малой положительной величине $\sigma: 0 < \sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, что означает возрастание плотности вероятности при приближении к точке $X^{(n)}$ – точке вероятного появления опасности возникновения критической ситуации.

Пусть ущерб от критической ситуации есть $Q = \text{const} > 0$ — например, сумма издержек, выплачиваемая природоохранным органам. Обращаем внимание на то, что ниже мы всегда рассматриваем вектор-функцию $X(t)$ как неслучайную функцию.

Введем следующий функционал:

$$\begin{aligned} J_2(X(t)) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}(t) Q f(X(t)) dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}(t) Q M \left(\delta \left(\tilde{X} - X(t) \right) \right) dt \equiv \\ &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}(t) Q M_1 \left(\delta \left(\tilde{X}_1 - X_1(t) \right) \right) M_2 \left(\delta \left(\tilde{X}_2 - X_2(t) \right) \right) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta(t)$ – «дельта-функция Дирака», а также

$$M_i \left(\delta \left(\tilde{X}_i - X_i(t) \right) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(\tilde{X}_i) \delta(\tilde{X}_i - X_i(t)) dx_i = f_i(X_i(t))$$

– математическое ожидание функции $\delta(\tilde{X}_i - X_i(t))$ случайного аргумента \tilde{X}_i с нормальным законом распределения вероятности ($i = 1, 2$).

Легко видеть, что функционал $J_2(X)$ вида является математическим ожиданием функции ущерба $Q(\tilde{X}, X(t)) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}(t) Q \delta(\tilde{X} - X(t)) dt$ от случайного аргумента \tilde{X} с нормальным законом распределения вероятностей.

Величина J_2 представляет собой функционал риска или просто риск возникновения критической ситуации. Здесь для измерения рисков используется подход, основанный на измерении убытков в неблагоприятной ситуации, когда показатель риска зависит как от вероятности опасности рассматриваемого события, так и от величины ожидаемых последствий (ущерба). Если ввести разбиение (t_1, t_2) на элементарные подинтервалы длиной Δt , нетрудно заметить, что величина J_2 есть предел суммы «элементарных» рисков, определяемых как произведение вероятности события на величину ущерба от него, широко используемых в инженерных расчетах и практике принятия решений (Мушик, Мюллер, 1990).

Образуем теперь функционал вида

$$J_\alpha(X) = J_1(X) + \alpha J_2(X), \quad (4)$$

где $\alpha \dots 0$ – весовой коэффициент. Выбирая α так или иначе, мы можем рассматривать различные случаи задачи об оптимальном курсе корабля.

Сформулируем теперь следующую задачу: требуется найти траекторию $X(t) \in (W_2^1(0, T))^2$, такую что

$$J_\alpha(X(\cdot)) = \inf_{\substack{\tilde{X} \in (W_2^1([0, T]))^2 \\ \tilde{X}(0)=X(0), \tilde{X}(T)=X(T)}} J_\alpha(\tilde{X}(t)) \quad (5)$$

– задача об оптимальном курсе корабля при радиолокационном контроле появления опасности.

Если принимается $\alpha = 0$ или $0 < \alpha \ll 1$, то это означает, что рассматривается задача с «пренебрежительным» риском, и очевидно, что здесь $X \approx X^{(0)}$. Если $\alpha \ll 1$, то величина риска в J_α может стать преобладающей и, возможно, здесь придется принимать решение о значительном изменении траектории $X(t)$ по сравнению с $X^{(0)}$ и идти на значительные дополнительные затраты с целью уменьшения риска.

2. Разрешимость задачи и вариационное уравнение

2.1. Предположим, что $X(t)$ есть решение поставленной задачи минимизации. Тогда оно необходимо удовлетворяет вариационному уравнению (уравнение Эйлера, необходимое условие оптимальности):

$$\delta J_\alpha = \int_0^T \left(k_1(t) \frac{d(X - X^{(0)})}{dt} \cdot \frac{dY}{dt} + \alpha m_{1,2}(t) Q \nabla f(X) Y \right) dt = 0, \quad (6)$$

$$\forall \delta X \equiv Y \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2,$$

где

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_1) f_2(X_2), f_1(X_1) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_2) \right).$$

Пусть $X^{(0)}$ есть «гладкая» траектория, например $X^{(0)} \in (W_2^2(0, T))^2$ и $x(t) = X(t) - X^{(0)}(t)$.

Тогда для $x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t)) \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2$ из вариационного уравнения получаем классическую форму вариационной задачи:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} \left(k_1(t) \frac{dx}{dt} \right) + \alpha m_{1,2}(t) Q \nabla f(x + X^{(0)}) = 0, t \in (0, T) \\ x(0) = x(T) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Исследование и решение задачи можно осуществить методами теории экстремальных задач (Алексеев и др., 2007). Отыскание экстремальных точек этой задачи можно также осуществить путем отыскания и анализа критических точек, т. е. фактически решений полученной системы.

2.2. Исследуем вопросы, связанные с разрешимостью задачи. Для этого рассмотрим сначала свойства функционала J_2 .

Запишем J_2 как функционал для приращения $x(t) \equiv (X - X^{(0)}) \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2$ с учетом того, что $(t_1, t_2) \subseteq (0, T)$:

$$J_2(x) \equiv J_2(X^{(0)} + x) \equiv \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^T m_{1,2}(t) Q \tilde{f}(x(t)) dt, \quad (8)$$

где
$$\tilde{f}(x) \equiv \tilde{f}_1(x_1) \tilde{f}_2(x_2), \quad \tilde{f}_i(x_i) = e^{-\frac{(x_i + X_i^{(0)} - a_i)^2}{2\sigma^2}}$$

Замечаем, что выражение для первой и второй производных Гато от $J_2(x)$ имеет вид:

$$D^2 J_2(x; h_1, h_2) \equiv \langle F'(x) h_1, h_2 \rangle \equiv \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^T m_{1,2}(t) Q \frac{\tilde{f}}{\sigma^4} A(x) h_1 \cdot h_2 dt$$

где $h, h_1, h_2 \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2$, а матрица $A(x) = A^T(x) \equiv \{a_{ij}(x)\}$ имеет следующие элементы

$$a_{ii} = (x_i + X_i^{(0)} - a_i)^2 - \sigma^2, \quad i = 1, 2, \quad a_{12} = a_{21} = (x_1 + X_1^{(0)} - a_1)(x_2 + X_2^{(0)} - a_2).$$

Собственные числа матрицы $A(x)$ имеют вид:

$$\lambda_1 = -\sigma^2, \quad \lambda_2 = (x_1 + X_1^{(0)} - a_1)^2 + (x_2 + X_2^{(0)} - a_2)^2 - \sigma^2.$$

Следовательно, для любых вектор-функций $x, h \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2$ имеем:

$$D^2 J_2(x; h, h) = \langle F'(x) h, h \rangle \dots \frac{(-Q)}{2\pi\sigma^4} \|h\|_{L_2(0, T)}^2$$

Также легко показать, что функция $\langle F(\xi x), x \rangle$ непрерывна по ξ на $[0, 1]$ при любом $x \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2$.

Функционал $J_1(x) \equiv J_1(x + X^{(0)})$ является квадратичным и для него имеет место очевидное соотношение:

$$\langle J_1''(x) h, h \rangle = \int_0^T \frac{1}{2} k_1(t) \left| \frac{dh}{dt} \right|^2 dt \dots \frac{1}{2} k_1^{(0)} \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 \|h\|_{(L_2(0, T))^2}^2,$$

где

$$k_1^{(0)} = \left(\min_{t \in [0, T]} k_1(t) \right) > 0.$$

Предположим в дальнейшем выполнение следующего неравенства:

$$\alpha Q_1 < \frac{\pi^3 \sigma^4 k_1^{(0)}}{T^2}. \quad (9)$$

При выполнении , свойств функционалов $J_1(x)$, $J_2(x)$ и теорем нелинейного анализа (Вайнберг, 1977, 1979) для функционала $J_\alpha = J_1 + \alpha J_2$ и его градиента $DJ_\alpha \equiv F_\alpha$ имеет место соотношение и свойства:

а) функция $\langle F_\alpha(\xi x), x \rangle$ непрерывна по ξ на $[0, 1]$ при любом $x \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2$;

б) $\langle F_\alpha(x+h) - F_\alpha(x), h \rangle > 0$ для всех $x, h \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2$, т. е. F_α – строго монотонный оператор, а J_α – строго выпуклый;

в) $\lim_{\|x\|_{\left(W_2^1(0, T) \right)^2} \rightarrow \infty} \frac{\langle F_\alpha(x), x \rangle}{\|x\|_{\left(W_2^1(0, T) \right)^2}^2} \dots C = \text{const} > 0$, следовательно F_α – коэрцитивен.

2.3. На основании установленных свойств функционала J_α устанавливается **Теорема.** Пусть выполнено условие. Тогда в любой конечной окрестности

$$S \equiv \left\{ X \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2 : \|X - X^{(0)}\|_{\left(W_2^1(0, T) \right)^2} < R, R < \infty \right\}$$

вектор-функция, удовлетворяющая условию, существует внутренняя точка $X \in S$, в которой J_α имеет абсолютный минимум и X удовлетворяет уравнению , т. е. X является решением задачи .

Доказательство. Переходя к $x \equiv X - X^{(0)}$, рассмотрим функционал $J_\alpha(x)$. Тогда задача эквивалентна задаче об отыскании минимального значения $J_\alpha(x)$ при $x \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2$.

Для $J_\alpha(x)$ справедливы установленные ранее свойства (а)–(в). Кроме того, при выполнении имеем:

$$\langle J_\alpha''(x)h, h \rangle \gg 0 \quad \forall x, h \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2 .$$

Следовательно, функционал $J_\alpha(x)$ слабо полунепрерывен снизу на любом

$$S_R = \left\{ x \in \left(W_2^1(0, T) \right)^2 : \|x\|_{\left(W_2^1(0, T) \right)^2} < R \right\}$$

(см. теоремы 8.5, 8.6 из (Вайнберг, 1977)).

Теперь на основе обобщения теорем Вейерштрасса и теорем о существовании критических точек (см. § 26 из (Вайнберг, 1979)) заключаем, что в S_R существует единственная внутренняя точка x_0 абсолютного минимума функционала J_α , при этом x_0 удовлетворяет уравнению $J'_\alpha(x_0) = 0$, которое в «классической» форме записи есть . Если теперь ввести вектор-функцию $X \equiv x_0 + X^{(0)}$, то именно она является решением задачи , к тому же единственным.

Приближенное решение задачи можно осуществить различными методами, один из которых будет рассмотрен в следующем параграфе.

3. Приближенное решение задачи

Пусть $Q = \text{const} > 0$ и $\varepsilon = \alpha Q$ есть малый параметр (интерпретацию задачи, когда это возможно, мы фактически дали уже выше).

Будем искать x в виде

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots$$

Подставляя x такого вида в нашу систему и привлекая метод малого параметра можно получить задачи для $\{x^{(k)}\}$. Так в частности, заключаем, что $x^{(0)} = 0$, и для $x^{(1)}$ получаем задачу вида:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(k_1(t) \frac{dx_1^{(1)}}{dt} \right) = m_{1,2}(t) \frac{\partial f}{\partial x_1} (X^{(0)}(t)), \\ \frac{d}{dt} \left(k_1(t) \frac{dx_2^{(1)}}{dt} \right) = m_{1,2}(t) \frac{\partial f}{\partial x_2} (X^{(0)}(t)) \\ \text{при } t \in (0, T), \\ x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad t = T. \end{cases} \quad (10)$$

Как известно, задача допускает получение решения в явной форме. А можно также получить приближенное решение, например, разностным методом или методом конечных элементов. Если же к задаче применить метод интегральных тождеств (Марчук, 1989), то в заданных узлах сетки решение задачи может быть получено точно (при условии точного выполнения промежуточных вычислений, взятия интегралов и т. п.).

Решив задачу, находим $x(t) = \varepsilon x^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2)$ и приближенное решение задачи $X_\varepsilon(t)$:

$$X_\varepsilon(t) = X^{(0)}(t) + \varepsilon x^{(1)}(t) \approx X(t).$$

Заметим также, что функционал J_α можно представить в виде ряда по ε :

$$J_\alpha(X(t)) = J^{(0)}(X(t)) + \varepsilon J^{(1)}(X(t)) + O(\varepsilon^2),$$

где $J^{(0)} = 0$, а $J^{(1)}(X(t))$ есть выпуклый квадратичный функционал, минимальное значение которого реализуется на $x^{(1)}(t)$. Таким образом заключаем, что $X_\varepsilon(t)$ с точностью $O(\varepsilon^2)$ реализует минимум J_α и такая вектор-функция единственная.

В общем случае для решения задачи типа целесообразно применять тот или иной алгоритм в зависимости от свойств операторов задачи (величин параметров α , Q и т. д.).

Результаты некоторых численных расчетов представлены на рисунках. В расчетах использовалась модельная ситуация с фиксированными параметрами ущерба Q и характеристической функцией расчетного периода $t = (1, 15)$ (15 шагов по времени) $m_{1,2}$ и менялись весовой коэффициент α , задающий величину влияния риска критической ситуации на изменение траектории судна, и среднее квадратичное отклонение σ , характеризующее плотность вероятности возникновения критической ситуации.

Заключение

Несложно заметить, что рассмотренная выше задача легко обобщается на случай наличия N возможных критических ситуаций. В этом случае функционал J_2 может быть задан в следующем виде:

$$J_2(X) = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} m_{1,2}^{(n)}(t) Q^{(n)}(t) f^{(n)}(X(t)) dt,$$

где $m_{1,2}^{(n)}(t)$, $Q^{(n)}(t)$, $f^{(n)}(X(t))$ имеют физический смысл, что и $m_{1,2}(t)$, $Q(t)$, $f(X(t))$ в рассмотренной выше задаче, но только для n -й критической ситуации.

Таким образом, используя данные дистанционного зондирования, полученные, например, по карте Live Piracy Map (<http://www.icc-ccs.org/piracy-reporting-centre/live-piracy-map>)



Рис. 1. Данные наблюдений по пиратству в регионе. Красный маркер — последние нападения, желтый — попытки нападения, фиолетовый — подозрительное судно

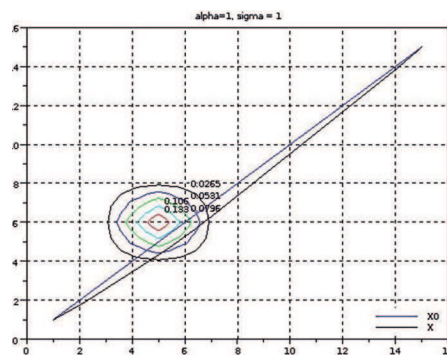


Рис. 2. Оптимальная траектория (X — черным) при значениях $\alpha = 1$, $\sigma = 1$. Предварительная траектория X_0 представлена синим на фоне изолиний плотности вероятности возникновения критической ситуации

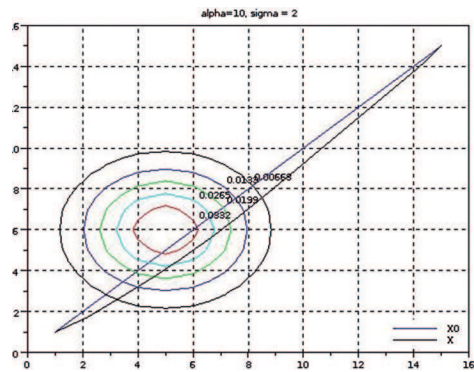


Рис. 3. Оптимальная траектория (X — черным) при значениях $\alpha = 10$, $\sigma = 2$. Предварительная траектория X_0 представлена синим на фоне изолиний плотности вероятности возникновения критической ситуации

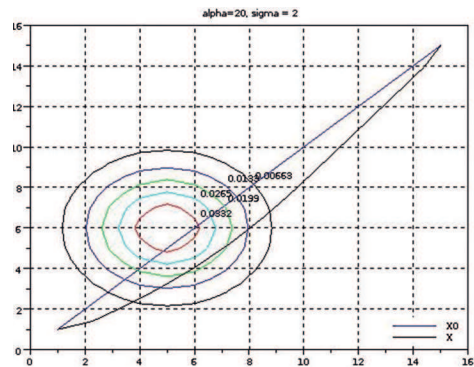


Рис. 4. Оптимальная траектория (X — черным) при значениях $\alpha = 20$, $\sigma = 2$. Предварительная траектория X_0 представлена синим на фоне изолиний плотности вероятности возникновения критической ситуации

и применяя изложенную выше методику, можно предварительно находить оптимальные маршруты и использовать их при движении морского транспорта.

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. и федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 гг.».

Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление: Учеб. М.: Физматлит, 2007. 406 с.
2. Ваганов П.А., Им М.-С. Экологические риски: Учеб. пособие. СПб.: С.-Петербург. ун-т, 2001. 152 с.
3. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1977. 143 с.
4. Вайнберг М.М. Функциональный анализ: Спец. курс для пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1979. 128 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: КНОРУС, 2010. 448 с.
6. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды: Учеб. пособие. М.: Наука, 1982. 320 с.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
8. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений: Пер. с нем. М.: Мир, 1990. 208 с.
9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. 10-е изд. М.: Айрис-пресс, 2010. 288 с.

Research and Algorithm for Solving the Problem of the Optimum Ship Route Based on Risk Theory and Remote Sensing

V.I. Agoshkov^{1,2}, A.O. Zayachkovskiy²

¹*Institute of Numerical Mathematics RAS,
119333, Moscow, Gubkina, 8
e-mail: agoshkov@inm.ras.ru*

²*Lomonosov Moscow State University,
119991, Moscow, Vorobevy Gori, 1
e-mail: anton@adeq.inm.ras.ru*

In this paper an algorithm for finding the optimum ship route according to the radar danger appearance control is proposed. The method for finding the optimum ship route is based on the route cost functional, which describes the total costs the route between the two points may be burdened with. We consider some kinds of critical situation with the ship. Having described the situation possibilities characteristics and the loss of consequences we get the numerical estimation of risk. There are considered variational equations for minimization of the functional and the problem of solvability is examined. The problem was solved numerically and the small perturbation method was used to find an approximate solution. The results of analysis allow further consideration of other more complex optimum ship route problems.

Keywords: optimum ship route, radar danger appearance control, variational equations, functional of risk.