Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса.
2012. Т. 9. № 4. С. 129–132

Стационарное распределение водности в мощном облаке при испарении с океана

П.Б. Руткевич

Институт космических исследований РАН,
117997, Москва, Профсоюзная, 84/32
E-mail: pbrutkevich@gmail.com

Дистанционное изучение тропических циклонов (ТЦ) и окружающей их геофизической среды занимает особое место в программах дистанционного мониторинга тропических возмущений. В первую очередь надо отметить задачи прогнозирования возникновения первичных форм возмущения и последующего перехода индивидуального первичного тропического возмущения в развитую форму ТЦ [Голицын, 2008]. При этом наблюдается образование мощной облачности, возникающей за счёт испарения пара с океана. В данной работе рассматривается стационарная задача об образовании и выпадении капель из облака. В модели учитывается поток пара в вертикальном направлении при его испарении с океана. При этом существует также некоторый поток воздуха вверх.

Ключевые слова: водяной пар, капли, стационарное состояние, водность облака.

Хорошо известно, что количество пара в дождевом облаке не может превзойти некоторую величину, поскольку пар в облаке насыщен. В месте, где количество пара превосходит величину насыщения, происходит конденсация пара. Капли не участвуют в термодинамике облачности, и пока их количество не очень велико их количеством можно пренебречь. С другой стороны можно рассматреть задачу о непрерывном поступлении пара в атмосферу, когда количество влаги в облаке постоянно увеличивается. По мере роста капель, вертикальные потоки воздуха больше не могут их поддержать, и они начинают падать вниз.

Рассмотрим более подробно вопрос о выпадении капель из облака. В нашей модели учитывается поток пара в вертикальном направлении при его испарении с океана. При этом существует также некоторый локальный (постоянный в нашей модели) поток воздуха вверх, с вертикальной скоростью w. Поскольку вертикальное распределение насыщенного пара в облаке достаточно быстро уменьшается с высотой, движение воздуха вверх приводит к тому, что пар оказывается в более холодном воздухе и происходит конденсация пара. Капли, пока они маленькие, продолжают подниматься вверх вместе с потоком воздуха, но, увеличиваясь за счёт постоянного испарения с поверхности океана, начинают падать вниз в виде дождя. При этом возникает стационарное состояние, при котором количество влаги, поднявшееся вверх в виде пара, и выпавшее вниз в виде капель уравновешивают друг друга. Поскольку вертикальное распределение пара в насыщенном влажном облаке фиксировано, в облаке возникает некоторое вертикальное распределение жидкой воды в виде капель (водности) уравновешивающее распределение пара.

Обычно решение вопросов выпадения капель из облаков начинают с рассмотрения функций распределения капель в облаке по размерам. Этот безусловно правильный подход является сам по себе достаточно сложным уже на первом этапе рассмотрения задачи, и приходится упрощать постановку задачи на более поздних этапах. В данной задаче мы сделаем упрощающие предположения на этапе распределения капель по размерам, чтобы иметь возможность построить уравнение переноса капель в вертикальном направлении. Будем считать, что облако насыщено водяным паром, количество капель в единице объёма облака постоянно и что в единице объёма на данной высоте все капли одинаковы, но размеры капель зависят от высоты. Таким образом, мы фактически предполагаем, что капли при падении увеличиваются в размерах и, согласно закону Стокса, падают всё быстрее:

$$v_S(z) = \frac{2}{9}\frac{r_d^2 g(\rho_W - \rho')}{\mu}, \qquad (1)$$

где μ — динамическая вязкость воздуха; $r_d(z)$ — радиус капли; ρ_W — плотность воды; ρ' — плотность воздуха. Определим количество капель в таком облаке. Обозначим $M_L(z)$ — плотность облака в килограммах капель на кубический метр. Число капель в единице объёма облака получается равным

$$N_d = \frac{M_L}{M_d} = \frac{3M_L}{4\pi\rho_W}\frac{1}{r_d^3} \quad , \tag{2}$$

где введена масса капли

$$M_d = \frac{4\pi}{3} r_d^3 \rho_W \, . \tag{3}$$

Величина $M_L(z)$ в нашей модели искомая, для неё запишем дифференциальное уравнение переноса. Для этого выразим скорость падания капель $v_S(z)$ из закона Стокса (1) через водность облака $M_L(z)$:

$$v_S(M_L) = \frac{2}{9}\frac{g\rho_W}{\mu}\left(\frac{3M_L}{4\pi\rho_W N_d}\right)^{2/3} . \tag{4}$$

Уравнение переноса в рассматриваемом случае должно быть дополнено слагаемым $w\partial M_q/\partial z$, которое описывает конденсацию пара, имеющего вертикальное распределение $M_q(z)$ в насыщенном влажном воздухе рассматриваемого облака, при его переносе вверх со скоростью w. Кроме того, нужно учесть слагаемое $d\left(v_S M_L\right)/dz$, которое описывает падение капель вниз со скоростью $v_S(M_L)$. Таким образом, дифференциальное уравнение переноса принимает вид:

$$\frac{\partial M_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\Big[\big(w - v_S\left(M_L\right)\big)M_L\Big] + w\frac{\partial M_q}{\partial z} = 0 \, . \tag{5}$$

В рассматриваемой модели существует стационарное состояние. Для определения этого стационарного состояния отбрасываем слагаемое с производной по времени. Стационарное неоднородное уравнение принимает вид обыкновенного нелинейного уравнения первого порядка:

$$\frac{d}{dz}\Big[\big(w - v_S(M_L)\big)M_L\Big] + w\frac{dM_q}{dz} = 0 \, . \tag{6}$$

Переходим к безразмерным величинам $\beta(\zeta) = \dfrac{M_q(\zeta)}{q_b\rho_b}$, $n(\zeta) = \dfrac{M_L(\zeta)}{q_b\rho_b}$, $\zeta = \dfrac{z}{H}$, где q_b и ρ_b — отношение смеси и плотность воздуха на нижней границе облака ($H = RT_b/g$ — характерная высота атмосферы; T_b — температура нижней границы облака). Таким образом, $\beta(\zeta)$ — безразмерное вертикальное распределение отношения смеси в насыщенном влажном облаке; $n(\zeta)$ — безразмерная плотность капель в облаке; ζ — безразмерная вертикальная координата. В этих переменных стационарное уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{d}{d\zeta}\left[\left(1 - \frac{v_S(n)}{w}\right)n\right] + \frac{\partial\beta(\zeta)}{\partial\zeta} = 0 \, , \tag{7}$$

где вводена безразмерная скорость Стокса падения капель в воздухе $v_S(n)/w = A_d n^{2/3}$ и безразмерный параметр A_d:

$$A_d = \frac{2}{9}\frac{g\rho_w^{1/3}}{\mu w}\left(q_b\rho_b\right)^{2/3}\left(\frac{3}{4\pi N_d}\right)^{2/3} \tag{8}$$

Уравнение (7) легко интегрируется: $(1 - A_d n^{2/3})n + \beta = C$.

Легко видеть, что величина $(w - v_S(M_L))M_L$ описывает поток капель вниз (падение) в атмосфере, а wM_q — поток пара (вверх). Сумма этих потоков есть полный поток влаги, который должен быть одинаков на всех высотах. Таким образом, константа интегрирования C, в рамках нашей простой модели, есть полный вертикальный поток влаги в атмосфере, и мы должны потребовать, чтобы он был равен нулю $C = 0$:

$$A_d n^{5/3} - n = \beta(\zeta)\,. \qquad (9)$$

На больших высотах количество пара очень быстро уменьшается $n_q(\zeta)$, и уравнение для безразмерной водности на больших высотах принимает вид:

$$A_d n_\infty^{5/3} - n_\infty = 0\,. \qquad (10)$$

Отметим, что уравнение (10) для определения безразмерной водности имеет корень не равный нулю, даже когда плотность пара пренебрежимо мала. Корень (10) обратно пропорционален постоянной A_d в степени 3/2, и является достаточно малым числом при выбранных значениях параметров:

$$n_\infty = A_d^{-3/2}\,, \qquad (11)$$

где, как уже отмечалось, A_d не зависит от высоты. Подставляя явное выражение A_d, получаем водность на больших высотах в размерном выражении:

$$M_L(\infty) \approx \frac{4\pi N_d}{3}\left(\frac{2}{9}\frac{g\rho_W}{\mu w}\right)^{-3/2}. \qquad (12)$$

Таким образом, получаем, что на больших высотах водность остается конечной, даже когда плотность пара стремится к нулю. Отсюда можно сделать вывод, что даже столь простая модель, тем не менее, описывает капельную влагу на значительных высотах, что может соответствовать перистым облакам.

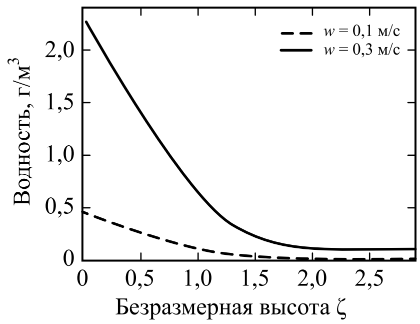

Рис. 1. Вертикальное распределение водности при различных скоростях подъема воздуха в облаке

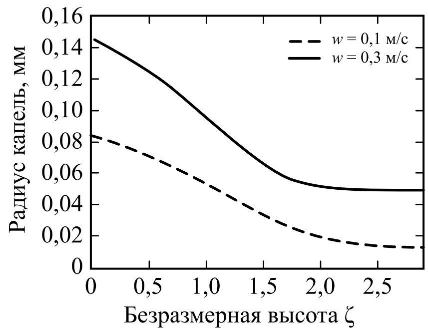

Рис. 2. Вертикальное распределение радиуса капель согласно закону Стокса для выбранных значений вертикальной скорости воздуха в облаке

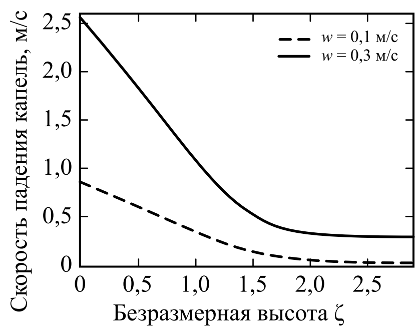

Рис. 3. Вертикальное распределение скорости падения капель для выбранных значений вертикальной скорости воздуха в облаке

Для решения уравнения (9) для вертикального распределения водности во всём облаке необходимо знать вертикальное распределение плотности пара в насыщенном влажном облаке. Уравнения, описывающие вертикальные распределения термодинамических параметров, приводятся в работах [Rutkevich, 2001, 2002], из них уравнения для вертикальных распределений температуры $T(z)$ и отношения смеси $q(z) = M_d(z)/M_d(0)$ образуют замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, остальные термодинамические параметры вычисляются из них.

Для численных оценок примем динамическую вязкость воздуха $\mu = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), капли в экваториальных облаках имеют средний радиус 30 мкм, и центральной части развитых кучевых облаков водность примем равной 2 г/м³ [Вопросы…, 2008, Матвеев, 2000]. Принимая также вертикальную скорость вверх в облаке $w_d \approx 0{,}1$ м/с [Вопросы…, 2008, Матвеев, 2000], и отношение смеси на уровне нижней границе облака при температуре $T_0 \approx 293$ равно $q_0 \approx 0{,}014$, получим коэффициент $A_d \approx 460$.

На рис. 1 представлены графики вертикальной зависимости водности в облаке для вертикальной скорости подъёма воздуха 10 и 30 см/с во время дождя. На рис. 2 представлены графики зависимости радиусов капель от высоты в облаке для тех же скоростей подъёма воздуха. На рис. 3 представлены графики зависимости скорости падания капель от высоты в облаке для тех же скоростей подъёма воздуха. На графиках видно, что все кривые не стремятся к нулю на больших высотах. Это связано с нашей постановкой задачи: мы задаём постоянный вертикальный поток воздуха w. В реальной атмосфере вертикальная скорость в конце концов обращается в нуль.

Литература

1. Вопросы физики облаков. 50 лет отделу физики облаков ГГО: Сб. избранных ст. СПб.: Астерион, 2008.
2. *Голицын Г.С.* Ураганы, полярные и тропические, их энергия и размеры, количественный критерий возникновения // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2008. Т. 44. № 5. С. 579–590.
3. *Матвеев Л.Т.* Физика атмосферы. СПб.: Гидрометеоиздат, 2000.
4. *Rutkevich P.B.* Instability of non convective type in moist air // Electromagnetic Phenomena. 2001. V. 2. N. 3. P. 331–334.
5. *Rutkevich P.B.* Convective and rotational instability in moist air // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2002. V. 315/1-2. P. 215–221.