

Скейлинговые свойства цифровых изображений земных ландшафтов

Н.Г. Макаренко^{1,2}, Л.М. Каримова², О.А. Круглун²

¹Главная Астрономическая Обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ng-makar@mail.ru

²Институт Проблем Информатики и Управления МОН РК, Алматы, Казахстан

E-mail: klyailya@mail.ru

Свойства масштабной инвариантности связывают обычно со степенными статистиками в распределении отсчетов. Такая инвариантность или скейлинг проявляется асимптотически, как тяжелые хвосты некоторых распределений, либо явным образом, как законы типа Парето для распределения случайных величин. Степенная функция сохраняет свою форму при изменении масштаба. Это свойство реферируется как статистическое самоподобие выборки данных или мультифрактальность соответствующей меры. Количественное описание статистического самоподобия сводится к оценкам мультифрактального спектра. Существует два подхода к получению таких оценок. Первый из них опирается на микроканонический формализм и сводится к вычислению локальных показателей Гельдера для подходящей меры. Сам спектр получается тогда с помощью гистограмм. Второй подход основан на каноническом формализме и вычислении моментов функции разбиения. В этом случае локальное поведение меры можно описать номером момента и соответствующей обобщенной размерностью Реньи. Переход к сопряженным по Лежандру переменным приводит к мультифрактальному спектру. Уже давно было обнаружено, что большая часть высококонтрастных цифровых изображений земных ландшафтов имеют признаки степенных статистик. В данной работе мы приводим оценки мультифрактальных спектров для таких изображений. Существование таких спектров позволяет корректно применять методы мультифрактальной сегментации ДДЗ снимков.

Ключевые слова: степенные статистики, мультифрактальность, емкости Шоке, данные дистанционного зондирования, статистика тяжелых хвостов.

Введение

Первые попытки изобразить пространственные сцены на плоскости, используя наивные идеи связи масштаба с расстоянием, можно найти еще в древнеегипетской «Книге Мертвых» (Раушенбах, 1980). Первым, кто начал экспериментировать с масштабными свойствами сцен на своих картинах, опираясь на логику перспективы, был, по-видимому, флорентийский живописец раннего Возрождения Паоло Уччелло (1397-1475гг.) (Бернсон, 2006). Паоло считали даже не художником, а математиком, «помешавшимся на перспективе», для которого его знаменитая «Ночная охота» (~1460 г.) служила лишь иллюстрацией математических выкладок.

Первые статистические исследования статистики природных изображений были инициированы попытками построения модели эффективной сенсорной системы для первичной зрительной коры мозга. Выяснилось, что такую систему невозможно построить, если природное окружение полностью случайно (Laughlin, 1983): мы не можем запомнить хаос или сравнить его с другим хаосом. К счастью, уже в ранних работах, посвященных связям рецептивных полей клеток с изображениями было обнаружено, что природные сцены не случайны. Они обладают наиболее общим свойством симметрии – масштабной

инвариантностью. Она позволяет нам узнавать друг друга и выражается степенными законами статистики отсчетов и асимптотики их Фурье-спектров (Field, 1987; Ruderman, 1994). В то же время стало ясно, что Пирсоновская статистика второго порядка недостаточна для правильного распознавания образов (Field, 1989). Действительно, два изображения, имеющие одинаковый 2D-спектр, выглядят совершенно различными, если второе получается после рандомизации фазы Фурье-компонент первого изображения и обратного Фурье-преобразования. Паттерны распознаются по сингулярности градиента (Marr, 2010), которые нельзя извлечь из информации о парных корреляциях. Геометрия пространств «типичных» природных изображений и их внутренняя размерность исследовалась группой Дэвида Мамфорда (Lee, Pedersen, Mumford, 2003; Mumford, Desolneux, 2010).

Степенные законы в статистике отсчетов в своей основе обладают свойством масштабной инвариантности. Поэтому можно попытаться интерпретировать их в рамках статистического самоподобия, т.е. мультифрактальности. Первая попытка связать турбулентные каскады с мультифрактальными свойствами высококонтрастных HR (High Resolution) изображений содержалась в работе группы Антонио Туриэля (Turiel, Mato, Parga, 1998). Корректный статистический анализ, сделанный по современным базам данных, подтвердил мультискейлинговые свойства изображений (Nevado, Turiel, Parga, 2000). Оказалось, что такие изображения можно описать моделями бесконечно делимых каскадов (Chainais, 2007), которые позволяют даже аппроксимировать структуру случайных полей за пределами действительного разрешения (Chainais et al., 2011).

Мультифрактальный скейлинг с успехом используется для оценки функции потоков океана (Turiel et al., 2005) и анализа структуры температурных карт водной поверхности (Turiel et al., 2009), текстурного анализа снимков земных ландшафтов (Wendt, Abry et al., 2009) и сегментации спутниковых изображений (Макаренко и др., 2008).

Существование самих мультифрактальных свойств для изображений обычно мотивируют косвенными доводами. Они основаны на присутствии «тяжелых» хвостов в pdf (распределении плотности вероятности), убывающих по степенному закону. Разумеется, аналогичным образом будет убывать и спектр мощности данных.

Прямого вычисления 2D мультифрактального спектра в рамках канонического или микроканонического формализма (Князева, Макаренко, 2009) стараются избегать. Дело в том, что известные алгоритмы оценки спектров сингулярностей плохо адаптированы к вариабельной фотометрической мере (Макаренко и др., 2008). Использование вейвлетов для функции разбиения (Arneodo et al., 2003) улучшает ситуацию, а техника, известная как вейвлет-лидер (Wendt, Roux et al., 2009) позволяет получить вполне приемлемые мульт-

тифрактальные спектры (Wendt, Abry et al., 2009). Однако, эта техника основана на серии сложных вычислений и требует хорошего знания теории всплесков.

В этой работе мы приводим оценки мультифрактальных спектров природных изображений, полученные с помощью хорошо известного прямого способа вычисления спектров (Chhabra, Jensen, 1989) и емкостей Шоке вместо фотометрической сумм-меры (Макаренко и др., 2008; Макаренко, 2009). Мы использовали для экспериментов базу данных цифровых изображений с высоким разрешением¹ и некоторые снимки с КА.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 приводятся краткое изложение необходимого формализма. В разделе 2 приводятся оценки мультифрактальных спектров. Раздел 3 содержит результаты оценки статистики отсчетов для некоторых изображений. Заключение резюмирует результаты работы.

1. Элементы мультифрактального формализма

Мы приведем здесь необходимые краткие сведения из техники оценки мультифрактальных спектров. Подробности можно найти в монографии (Harte, 2001), учебном пособии (Короленко и др., 2004), лекции (Макаренко, 2009) или статьях (Князева, Макаренко, 2009; Макаренко и др., 2008).

Исходным понятием является регулярность или гладкость функции. Для $f : R \rightarrow R$ она измеряется локально, т.е. в ε – окрестности точки x_0 , положительным, но не обязательно целым числом $\alpha(x_0)$, таким, что

$$\frac{|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)|}{|\varepsilon|^{\alpha(x_0)}} \leq C,$$

где C некоторая постоянная. Значение $\alpha(x_0) = 1$ соответствует обычному условию Липшиц-непрерывности для функции f . В остальных случаях «правильное» значение $\alpha(x_0)$ определяется двумя условиями $\alpha' > \alpha(x_0) \rightarrow C = 0$ и $\alpha' < \alpha(x_0) \rightarrow C = \infty$. Иными словами, правильная регулярность является компромиссом между поведением практически постоянной функции с $|\Delta f| \approx 0$ и функцией чрезмерно чувствительной к изменению аргумента $|\Delta f| \approx \infty$. Формально это записывают как

$$\alpha(x_0) = \sup\{\alpha' | C = 0\} = \inf\{\alpha' | C = \infty\} \quad (1)$$

¹ http://www.cfar.umd.edu/~fer/High-resolution-data-base/hr_database.htm

и говорят, что функция f принадлежит гильдеровскому классу $C^\alpha(x_0)$ в окрестности x_0 . Верхнюю грань $\alpha_p(x_0) = \sup \left\{ \alpha \mid f \in C^\alpha(x_0) \right\}$ всех α в этой окрестности называют *поточечным показателем Гельдера* в этой точке.

Будем рассматривать значения функции в ε –окрестности некоторой точки $x \in R^D$, как количество массы некоторой борелевой меры $\mu(\varepsilon)$. Универсальной аппроксимацией распределения массы для разных ситуаций является степенной закон $\mu(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha(x)}$. Пусть $D=1$ и масса M распределена «атомарно» с значениями m_i в отдельных точках x_i носителя. Тогда $\alpha=0$ и $M = \sum_i m_i \delta(x-x_i)$. Равномерному распределению массы соответствует $\alpha=1$ и абсолютно непрерывная мера μ с постоянной плотностью ρ , так что $M = \int_I \rho dx$, где $dx \equiv \mu(dx)$, и интеграл понимается в смысле Лебега. Для $\alpha < 1$ плотность меры расходится при $\varepsilon \rightarrow 0$, и такую меру называют *сингулярной*. Несколько неожиданным покажется то, что случай $\alpha=2$, который соответствует мере, достаточной для равномерной раскраски квадрата тоже объявляют сингулярным в R . Таким образом, для случая $D=1$ мера сингулярна при $0 < \alpha < 1$; для случая $D=2$ – она сингулярна при $0 < \alpha < 2$.

Рассмотрим общий случай, когда мера на носителе имеет широкий диапазон значений показателей $\alpha_p(x) \approx \alpha \pm \delta$. Тогда выбор определенного значения Гильдеровского показателя позволяет выделить из носителя меры X компоненту, содержащую точки с интенсивностью «окраски» α . Иначе говоря, множеству уровней функции $\alpha_p(x) = \alpha$ соответствуют подмножества $K_{\alpha_p}^\alpha \equiv \alpha_p^{-1}(\alpha) = \{x \mid \alpha_p(x) = \alpha\}$, которые называют *компонентами мультифрактального разложения*, так что $X = \bigcup_\alpha K_{\alpha_p}^\alpha$ (Песин, 2002). Название обусловлено следующими соображениями. Измерим каждую компоненту ее размерностью. Пусть N_ε – минимальное число ε –боксов, необходимое для покрытия всех точек $K_{\alpha_p}^\alpha$. Тогда *букс-размерностью* или *емкостью* $K_{\alpha_p}^\alpha$ называют предел:

$$D(K_{\alpha_p}^\alpha) \equiv f(\alpha) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\log N_\varepsilon / \log \varepsilon), \quad (2)$$

если он существует (Фальконер, 1997). Емкость для компонент, которые содержат отдельные точки, обычно является дробным числом. Поэтому можно считать, что каждое из $K_{\alpha_p}^\alpha$ является фракталом, а их объединение уместно назвать мультифракталом. Пару $(\alpha, f(\alpha))$ называют мультифрактальным спектром. Эти эвристические соображения требуют уточ-

нения. При случайной раскраске носителя график $(\alpha, f(\alpha))$ представляет собой облако точек. Оно редуцируется к одной точке в случае монофрактальной меры. Наконец, если закон $\mu(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha(x)}$ выполняется для достаточно широкого диапазона масштабов, мультифрактальный спектр является выпуклой вверх кривой (Harte, 2001). Способы вычисления такого спектра для разных ситуаций являются основной задачей мультифрактального анализа.

В каноническом варианте этого формализма рассматривают сумму моментов меры взятой по всем непустым боксам: $Z(q, \varepsilon) = \sum_i \mu_i^q$, где $\mu_i \sim \varepsilon^{\alpha_i}$ и $q \in [-\infty, \infty]$. Мера считается мультифрактальной, если $Z(q, \varepsilon)$ ведет себя как отдельное слагаемое, т.е. также по степенному закону

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q \approx \varepsilon^{\tau(q)} \quad (3)$$

в пределе достаточно малых ε . Если мера нормирована, то $\tau(1) = 0$. Это условие обычно учитывают с помощью выражения $\tau(q) = D_q(q-1)$, в котором величины D_q называют обобщенными размерностями Реньи (Короленко и др., 2004; Harte, 2001). Рассмотрим непрерывный аналог (3), оставив в сумме только те слагаемые, для которых показатель сингулярности равен α . Согласно определению (2) число таких слагаемых будет $\varepsilon^{-f(\alpha)}$. Поэтому: $\sum_i \mu_i^q \propto \int d\alpha w(\alpha) \varepsilon^{-f(\alpha)} \varepsilon^{q\alpha} = \int d\alpha w(\alpha) \exp[(q\alpha - f(\alpha)) \ln \varepsilon]$, где $w(\alpha)$ – весовой множитель (Князева, Макаренко, 2009). Полагая, что (3) справедливо лишь в пределе исчезающих ε ($\varepsilon \rightarrow 0, \log \varepsilon \rightarrow -\infty$) и используя метод перевала в точке максимума функции $(q\alpha - f(\alpha))$, можно получить

$$\sum_i \mu_i^q \approx \exp[(q\alpha - f(\alpha)) \ln \varepsilon] = \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)} \sim \varepsilon^{D_q(q-1)}. \quad (3a)$$

При условии $q = f'(\alpha)$, $f''(\alpha) < 0$ из (3a) следуют соотношения:

$$\alpha = \frac{d}{dq} [D_q(q-1)], \quad f(\alpha) = -(q-1)D_q + q\alpha, \quad (4)$$

которые позволяют перейти от переменных (q, D_q) к сопряженным переменным $(\alpha, f(\alpha))$. Последняя формула в (4) известна как *преобразование Лежандра*. Фактически, это преобразование сводится к нахождению разности между функцией и прямой $y = q\alpha$, коэффициент наклона которой q находится из условия: $q = f'(\alpha)$. Преобразование Лежандра всегда приводит к выпуклой функции. График $\{f(\alpha), \alpha\}$ является выпуклой

функцией и называется *лежандровским* $f_l(\alpha)$ -спектром. Численное дифференцирование, необходимое при вычислении (4), ухудшает оценки мультифрактального спектра.

К счастью, существует способ оценки спектра, который не использует преобразование Лежандра (Chhabra, Jensen, 1989). Он основан на двух выражениях:

$$\begin{aligned} f(q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, \varepsilon) \lg(\mu_i(q, \varepsilon))}{\lg \varepsilon} \\ \alpha(q) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, \varepsilon) \lg(P_i(q, \varepsilon))}{\lg \varepsilon} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $f(q)$ – мультифрактальный спектр, q – вес статистических моментов, $P_i(\varepsilon)$ – вероятностная борелева мера на масштабе ε , $\alpha(q)$ – гельдеровский показатель регулярности меры $\mu_i(q, \varepsilon)$, вычисленной на масштабе ε с нормированными статистическими моментами: $\mu_i(q, \varepsilon) = P_i^q(\varepsilon) / \sum_j P_j^q(\varepsilon)$.

Для изображений мера $P_i(\varepsilon)$ вычисляется обычно как сумма «уровней серого» в малой окрестности каждого пикселя. Однако, большая вариабельность поля не позволяет уверенно выделить «инерционный диапазон», т.е. интервал масштабов, на котором можно оценить $f(\alpha)$ по наклонам графиков $f(q)$ и $\alpha(q)$, построенных в двойном логарифмическом масштабе. Для того чтобы избежать эту трудность, мы предложили использовать вместо фотометрической меры так называемые миопические *емкости Шоке* (Макаренко и др., 2008; Макаренко, 2009). Они не аддитивны, но сохраняют свойство монотонности. Мы использовали емкость $Iso(c^l)$, которая определяется следующим образом.

Рассмотрим замкнутую область Ω на изображении и обозначим через $p(x), p(y)$ уровни серого в пикселях $(x, y) \in \Omega$. Будем считать, что два пикселя l – эквивалентными с точностью до выбранного порога l , если $|p(x) - p(y)| \leq l$. Пусть $W(i) \in \Omega$ сканирующее квадратное окно, размером $i \times i$ пиксел, $i = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и пусть p_c – интенсивность центрального пикселя окна. Тогда c^l в окне определяется как максимальное число пикселей в нем, l – эквивалентных центральному p_c :

$$c^l(W(i)) = \max_x \# \{ \{x\} \mid |p(x) - p_c| \leq l, x \in W(i) \}.$$

Сканируя всю область Ω , мы приписываем значение емкости каждому из ее пикселей. Используя Iso -емкость c^l вместо борелевых мер $P_i(\varepsilon)$ в формуле (5), начиная с минимального масштаба $\varepsilon = 3$ пикселя, можно получить корректные оценки мультифракталь-

ного спектра. Следует заметить, что существуют и другие способы введения конечных (Радоновых) мер на изображении. Так, можно использовать лапласиан от свертки изображения с гауссовским ядром (Xu et al., 2009).

2. Оценка спектров для природных изображений

Мы использовали базу данных высоко контрастных цифровых природных изображений, доступную на сайте <http://www.cfar.umd.edu/~fer/website-texture/texture.htm> В качестве примера, на *рис. 1* (вверху) приведены фрагменты изображений коры пробкового дерева и гальки, взятые из этой базы. Мультифрактальные спектры для этих изображений представлены на *рис. 1* (а, б). Были использованы емкости *Iso*. Видно, что спектры коры и гальки имеют каноническую (Harte, 2001), выпуклую вверх, форму.

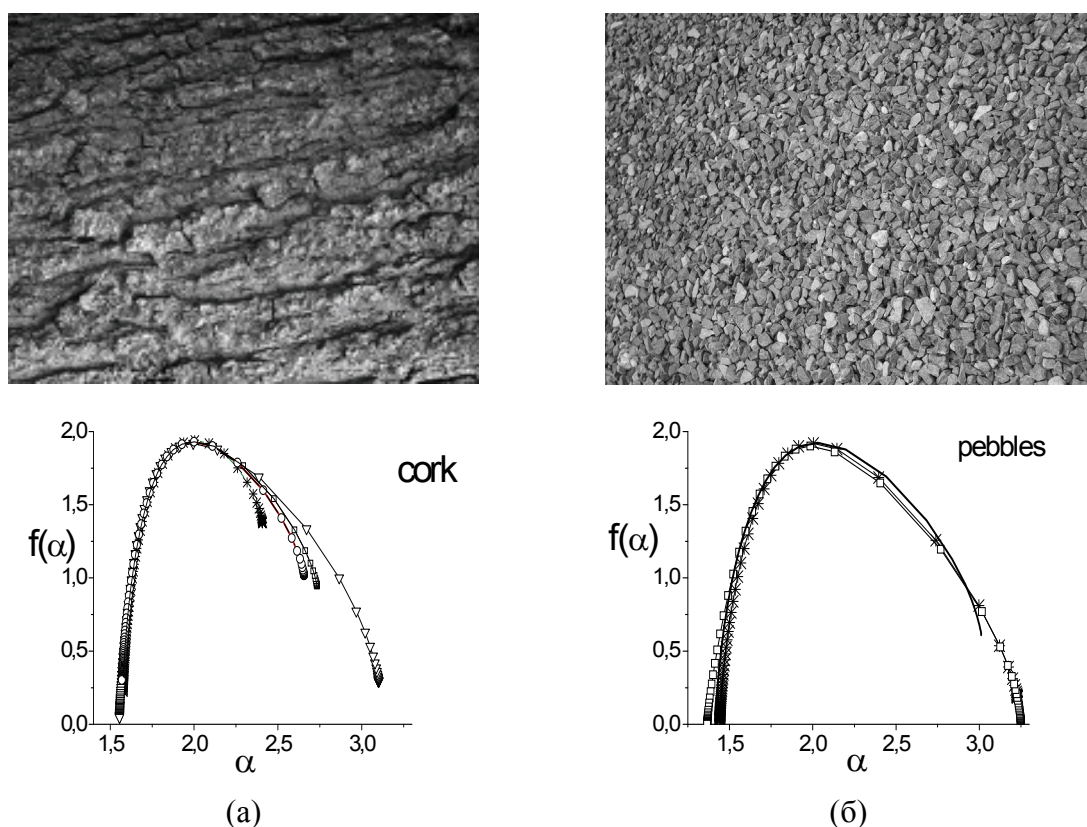


Рис. 1. Изображения и их спектры для коры пробкового дерева (а) и гальки (б). Емкость Iso, диапазон изменения порядка моментов меры $q=[-30,30]$. Различные кривые соответствуют разным комбинациям размера окна W и порога l для оценки емкости

Полученный результат показывает, прежде всего, что присутствие на *HR* снимке множества статистически похожих элементов может продуцировать мультифрактальный спектр даже в тех ситуациях, когда процессы продуцирующие наблюдаемые паттерны не известны в явном виде. Любопытно, что такие спектры удалось получить даже для некоторых произведений живописи (Abry, Wendt, Jaffard, 2013).

3. Статистические свойства фотометрических мер для природных изображений

Статистические свойства *HR* изображений обычно описывают первыми 4-мя моментами: средним значением μ , стандартным отклонением σ , несимметричностью распределения (*skewness*) S и эксцессом (*kurtosis*) κ (Lee et al., 2003; Mumford, Desolneux, 2010). Основой служит график зависимости функции правдоподобия $\log(pdf)$, где pdf – плотность распределения, от одномерной вариации интенсивности фотометрической меры. Существует два варианта построения такой вариации. В первом из них используется разность логарифмов между текущим и средним значениями $D = \log(I(i, j) - \langle \log(I(i, j + 1)) \rangle)$. Во втором случае это разность между значениями логарифмов в соседних пикселах

$$D = \log(I(i, j) - \log(I(i, j + 1))). \quad (6)$$

Ниже использовался последний вариант.

Эксцесс является наиболее существенной статистикой для *HR* изображений. Он определяется выражением

$$\kappa(p) = \frac{\int (x - \bar{x})^4 p(x) dx}{\left(\int (x - \bar{x})^2 p(x) dx \right)^2} = \frac{\mathbf{E}((x - \bar{x})^4)}{\left(\mathbf{E}((x - \bar{x})^2) \right)^2}$$

и показывает, насколько распределение является остроконечным или плоским по сравнению с нормальным распределением. Выборка данных с высоким значением эксцесса, как правило, имеет отчетливый пик около среднего значения, довольно быстрое снижение, и тяжелые хвосты. Данные с низким эксцессом имеют плоскую вершину. Для гауссовского распределения значение $\kappa(p) = 3$, в то время как для природных изображений эксцесс значительно больше: $\kappa(p) \in [10 \div 20]$ (Mumford, Desolneux, 2010).

На *рис. 2* и *3* приведены функции правдоподобия для изображений коры пробкового дерева, гальки, и двух ландшафтов, полученных с космических аппаратов. Первое из них – это фрагмент месторождения Узень (IRS) со статическими моментами $\mu = 0,0072$, $\sigma = 0,1$, $S = -0,2966$, $\kappa(p) = 17,87$. Второе – предгорья Алматы (Landsat) со статистиками $\mu = 0,0052$, $\sigma = 0,022$, $S = -0,038$, $\kappa(p) = 7,71$. Относительно небольшое значение эксцесса в последнем случае обусловлено крупномасштабными структурами на изображении.

Мы наблюдаем для ДДЗ (*рис. 3*) те же особенности поведения функции правдоподобия, которые были описаны для наземных *HR* снимков природных ландшафтов (*рис. 2* и (Nevado et al., 2000)).

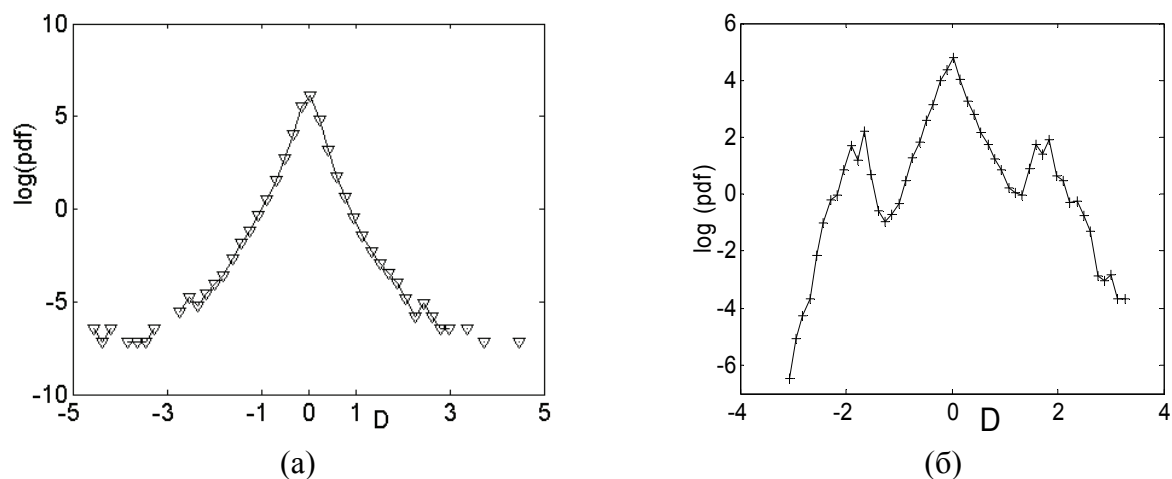


Рис. 2. Функции правдоподобия для изображения коры (а) и гальки (б) По горизонтальной шкале вариация D , согласно (6)

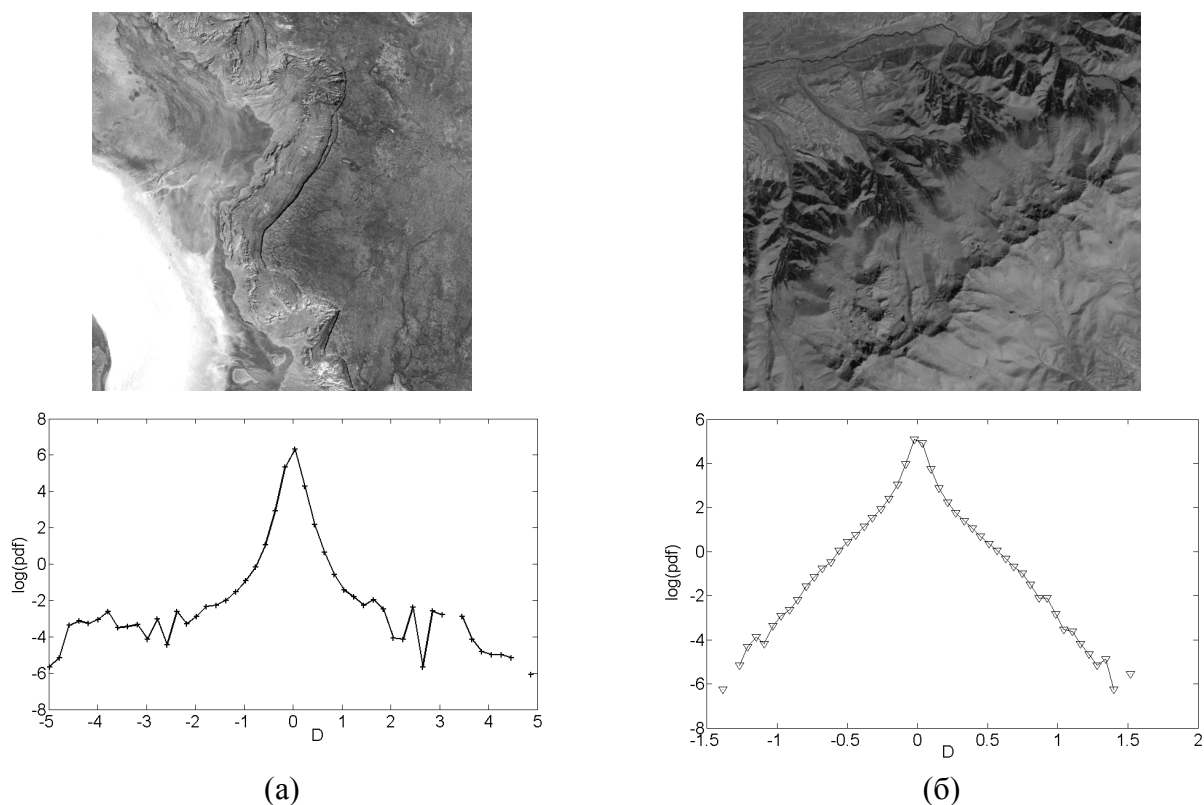


Рис. 3. Функция правдоподобия для изображений природных ландшафтов: месторождение Узень (IRIS) (а) и предгорья Алматы (Landsat) (б). По горизонтальной шкале вариация D , согласно (6)

Заключение

Сведения о статистике природных изображений очень важны во многих приложениях, таких как сжатие, редукция шума и задачах распознавания ДДЗ. Разнообразие текстур и вариабельность контраста в HR -изображениях не позволяют адекватно описать природные изображения простыми параметрическими моделями Пирсоновского типа.

Наиболее общим типом симметрии в окружающем нас Мире является масштабная инвариантность, которая наблюдается в широком диапазоне объектов: от океанических потоков (Turiel et al., 2005) до картин Ван Гога (Abry, Wendt, Jaffard, 2013).

Мы обсуждаем в статье детальные свойства статистической масштабной инвариантности *HR* природных изображений. Аналогия между статистикой турбулентных каскадов и особенностями высококонтрастных изображений (Turiel et al., 1998) подтверждается прямыми оценками мультифрактальных спектров, полученными с использованием емкостей Шоке (Макаренко и др., 2008). Кроме того, мы приводим статистические характеристики снимков из ДДЗ и показываем, что их характеристики аналогичны особенностям, описанным в монографии (Mumford, Desolneux, 2010). Отличительной особенностью космических снимков является островершинная функция правдоподобия с тяжелыми хвостами, вогнутыми крыльями и соответствующим ей высоким значением куртозиса. Таким образом, можно считать вполне обоснованным использование мультифрактального формализма для сегментации и текстурного анализа спутниковых изображений земных ландшафтов.

Работа выполнена при поддержке грантов № 0866/ГФ2 и 2308/ГФ3 МОН РК.

Литература

1. Бернсон Б. Живописцы итальянского Возрождения. Пер. с англ. Н. Белоусовой, И. Тепляковой. М.: Б.С.Г.Пресс, 2006. 559 с.
2. Князева И.С., Макаренко Н.Г. Мультифрактальный анализ изображений // Прикладная Нелинейная Динамика. Изв. вузов. 2009. Т. 4. С. 85-99.
3. Короленко П.В., Маганова М.С., Меснянкин А.В. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования М.: МГУ, 2004. 82 с.
4. Макаренко Н. Г. Геометрия изображений // Нейроинформатика 2009. Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ (2009). С. 89-125.
5. Макаренко Н.Г., Круглун О.А., Макаренко И.Н., Каримова Л.М.. Мультифрактальная сегментация данных дистанционного зондирования // Исследование Земли из Космоса. 2008. № 3. С.18-26.
6. Песин Я.Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. 404 с.
7. Раушенбах Б. В. Пространственные построения в живописи. Очерк основных методов. М: НАУКА 1980. 286 с.
8. Abry P., Wendt H., Jaffard S. When Van Gogh meets Mandelbrot: Multifractal Classification of Painting's Texture// Signal Processing. 2013. Vol.93. P. 554–572.
9. Arneodo A., Decoster N., Kestener P., Roux S.G. A Wavelet-based method for multifractal image analysis: from Theoretical Concepts to Experimental Applications // Advances in Imaging and Electron Physics. 2003. V. 126. P. 1-92.
10. Chhabra A. B., Jensen R. V. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum// Phys.Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 1327-1330.
11. Chainais P. Infinitely Divisible Cascades to Model the Statistics of Natural Images // IEEE Transact. on Pattern Analysis and Machine Intelligence 2007. Vol. 29. No. 12. P.1-15.
12. Chainais P., Kaenig E., Delouille V., Hochedez J-F. Virtual super resolution of textured images using multifractal stochastic processes // J. of Mathem. Imaging and Vision. 2011. Vol. 39. P. 28-44.
13. Falconer K. Techniques in fractal geometry. John Wiley & Sons. 1997. 256 p.

14. *Field D.J.* Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1987. Vol. 4. P.2379-2394.
15. *Field D.J.* What the statistics of natural images tell us about visual coding // *Human Vision, Visual Processing and Digital Display.* 1989. Vol. 1077. P.269-276.
16. *Harte D.* Multifractals: Theory and Applications 2001. Chapman & Hall/CRC. 248 p.
17. *Laughlin S. B.,* Matching coding scenes to enhance efficiency // in *Physical and Biological Processing of Images*, O. J. Braddick and A. C. Sleight, eds. Springer, Berlin, 1983. P. 42-72.
18. *Lee A. B., Pedersen K. S., Mumford D.* The Nonlinear Statistics of High-Contrast Patches in Natural Images // *Intern. J. of Comp.Vis.* 2003. Vol. 54. P. 83–103.
19. *Marr D.* Vision. MIT Press. 2010. 403 p.
20. *Mumford D., Desolneux A.* Pattern Theory. The Stochastic Analysis of Real-World Signals. A K Peters, Ltd. 2010. 400 p.
21. *Nevado A., Turiel A., Parga N.* Scene dependence of the non-gaussian scaling properties of natural images // *Network.: Computation in Neural Systems* 2000. Vol. 11. P. 131–152.
22. *Ruderman D.L.* The statistics of natural images // *Network: Computation in Neural Systems* 1994. Vol.5. P. 517-548.
23. *Turiel A., Mato G., Parga N.* The self-similarity properties of natural images resemble those of turbulent flows // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80(5). P. 1098-1101.
24. *Turiel A., Isern-Fontanet J., Garcia-Ladona E., Font J.* Multifractal Method for the Instantaneous Evaluation of the Stream Function in Geophysical Flows // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Vol. 95. 104502.
25. *Turiel A., Nieves V., Garcia-Ladona E., Font J., Rio M.-H., Larnicol G.* The multifractal structure of satellite sea surface temperature maps can be used to obtain global maps of streamlines // *Ocean Sci.* 2009. No. 5. P. 447–460.
26. *Wendt H., Rouxa St. G., Jaffard St., Abry P.* Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images // *Signal Proces.* 2009. Vol. 89. P. 1100-1114.
27. *Wendt H., Abry P., Jaffard S., Hui Ji.* Wavelet leader multifractal analysis for texture classification // *IEEE Int. Conf. on Image Processing.* Cairo, Egypt. 2009. P. 3829-3832.
28. *Xu Y., Ji H., Fermüller C.* Viewpoint invariant texture description using fractal analysis // *Intern. J. of Computer Vision.* 2009. Vol. 83 (1). P. 85-100.

Scaling properties of digital images of Earth landscape

N.G. Makarenko^{1,2}, L.M. Karimova², O.A. Kruglun²

¹*Central Astronomical Observatory of the Russian Academy of Sciences
Saint-Petersburg, Russia*

E-mail: ng-makar@mail.ru

²*Institute for Information Science and Management Problems
Ministry of Education and Science of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

E-mail: klyailya@mail.ru

Properties of scale invariance are usually associated with power statistics in the distribution of samples. This invariance or scaling appears asymptotically as heavy-tails of some distributions or explicitly, as the laws of Pareto-type distribution of random variables. Power function retains its shape when zooming. This property is abstracted as a statistical self-similarity of the data samples or multifractality of the measure. A quantitative description of statistical self-similarity reduces to estimating the multifractal spectrum. There are two approaches to obtaining such estimates. The first is based on the microcanonical formalism and reduces to the calculation of local exponents Holder for suitable measures. Spectrum itself is then obtained using the histograms. The second approach is based on the canonical formalism and computing the moments of the partition function. In this case, the local behavior of the measures can describe the number of the moment and the time corresponding generalized Renyi dimensions. The transition to the adjoint Legendre variables leads to multifractal spectrum. It has long been observed that most of the high-contrast digital images of terrestrial landscapes have attributes of power statistics. In this paper, we estimate multifractal spectra for such images. The existence of such spectra allows to correctly apply the methods of multifractal segmentation to remote sensing images.

Keywords: power asymptotics, multifractality, Choquet capacities, data of remote sensing, statistics of heavy tails.

References

1. Berenson B. *Zhivopiscy ital'janskogo Vozrozhdenija* (Painters of the Italian Renaissance), Moscow: B.S.G.Press, 2006, 559 p.
2. Knjazeva I.S., Makarenko N.G. Mul'tifraktal'nyj analiz izobrazhenij (Multifractal analysis of images), *Izvestiya vuzov. Prikladnaja Nelinejnaja Dinamika*, 2009, Vol. 4, pp. 85-99.
3. Korolenko P.V., Maganova M.S., Mesnjankin A.V. *Novacionnye metody analiza stohasticheskikh processov i struktur v optike. Fraktal'nye i mul'tifraktal'nye metody, vejvlet-preobrazovanija* (Innovatory methods of analysis of stochastic processes and structures in optics. Fractal and multifractal methods, wavelet transform) Moscow: MGU, 2004, 82 p.
4. Makarenko N.G. Geometrija izobrazhenij (Geometry of images), *Nejroinformatika 2009. Lekcii po nejroinformatike*, Moscow: MIFI, 2009, pp. 89-125.
5. Makarenko N.G., Kruglun O.A., Makarenko I.N., Karimova L.M. Mul'tifraktal'naja segmentacija dannyh distancionnogo zondirovanija (Multifractal segmentation of remote sensing data.), *Issledovanie Zemli iz Kosmosa*, 2008, No. 3, pp. 18-26.
6. Pesin Ya.B. *Teorija razmernosti i dinamicheskie sistemy: sovremennyy vzgljad i prilozhenija* (Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications) Moscow-Izhevsk: IKI, 2002, 404 p.
7. Rauschenbach B. V. *Prostranstvennye postroenija v zhivopisi. Oчерk osnovnykh metodov* (Spatial construction in painting. Basic methods), Moscow: NAUKA, 1980, 286 p.
8. Abry P., Wendt H., Jaffard S. When Van Gogh meets Mandelbrot: Multifractal Classification of Painting's Texture, *Signal Processing*, 2013, Vol. 93, pp. 554–572.
9. Arneodo A., Decoster N., Kestener P., Roux S.G. A Wavelet-based method for multifractal image analysis: from Theoretical Concepts to Experimental Applications, *Advances in Imaging and Electron Physics*, 2003, Vol. 126, pp. 1-92.
10. Chhabra A. B., Jensen R. V. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum, *Phys.Rev. Lett*, 1989, Vol. 62, pp. 1327-1330.
11. Chainais P. Infinitely Divisible Cascades to Model the Statistics of Natural Images, *IEEE Transact. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, Vol. 29, No. 12, pp. 1-15.
12. Chainais P., Koenig E., Delouille V., Hochedez J-F. Virtual super resolution of textured images using multifractal stochastic processes, *J. of Mathem. Imaging and Vision*, 2011, Vol. 39, pp. 28–44.
13. Falconer K. *Techniques in fractal geometry*, John Wiley & Sons, 1997, 256 p.
14. Field D.J. Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells, *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1987, Vol. 4, pp. 2379-2394.
15. Field D.J. What the statistics of natural images tell us about visual coding, *Human Vision, Visual Procsssing and Digital Display*, 1989, Vol. 1077, pp. 269-276.
16. Harte D. *Multifractals: Theory and Applications*, Chapman & Hall/CRC, 2001, 248 p.
17. Laughlin S. B., Matching coding scenes to enhance efficiency, In: *Physical and Biological Processing of Images*, Springer, Berlin, 1983, pp. 42-72.
18. Lee A. B., Pedersen K. S., Mumford D. The Nonlinear Statistics of High-Contrast Patches in Natural Images, *Intern. J. of Comp. Vis.*, 2003, Vol. 54, pp. 83–103.
19. Marr D. *Vision*, MIT Press, 2010, 403 p.
20. Mumford D., Desolneux A. *Pattern Theory. The Stochastic Analysis of Real-World Signals*, A K Peters, Ltd., Natick, Massachusetts, 2010, 400 p.
21. Nevado A., Turiel A., Parga N. Scene dependence of the non-gaussian scaling properties of natural images, *Network: Computation in Neural Systems*, 2000, Vol. 11, pp. 131–152.
22. Rudermant D.L. The statistics of natural images, *Network: Computation in Neural Systems*, 1994, Vol. 5, pp. 517-548.
23. Turiel A., Mato G., Parga N. The self-similarity properties of natural images resemble those of turbulent flows, *Phys. Rev. Lett.*, 1998, Vol. 80(5), pp. 1098-1101.
24. Turiel A., Isern-Fontanet J, Garcia-Ladona E, Font J. Multifractal Method for the Instantaneous Evaluation of the Stream Function in Geophysical Flows, *Phys. Rev. Lett.*, 2005, Vol. 95, pp. 104502.
25. Turiel A., Nieves V., Garcia-Ladona E., Font J., Rio M.-H., Larnicol G. The multifractal structure of satellite sea surface temperature maps can be used to obtain global maps of streamlines, *Ocean Sci.*, 2009, Vol. 5, pp. 447–460.
26. Wendt H., Rouxa St. G., Jaffard St., Abry P. Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images, *Signal Proces*, 2009, Vol. 89, pp. 1100–1114.
27. Wendt H., Abry P., Jaffard S., Hui Ji. Wavelet leader multifractal analysis for texture classification, *IEEE Int. Conf. on Image Processing*, Cairo, Egypt, 2009, pp. 3829–3832.
28. Xu Y., Ji H., Fermüller C. Viewpoint invariant texture description using fractal analysis, *Intern. J. of Computer Vision*, 2009, Vol. 83 (1), pp. 85-100.