Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2014. Т. 11. № 4. С. 17–30

Чувствительность оптимального решения задачи вариационного усвоения данных спутниковых наблюдений для модели термодинамики Балтийского моря

В.П. Шутяев[1], С.А. Лебедев[2,3], Е.И. Пармузин[1], Н.Б. Захарова[1]

[1] Институт вычислительной математики РАН, Москва, 119333, Россия
E-mails: parm@inm.ras.ru, shutyaev@inm.ras.ru
[2]Геофизический центр РАН, 119296, Москва, Россия
E-mail: lebedev@wdcb.ru
[3] Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия

Наиболее универсальной и перспективной технологией решения задач мониторинга и анализа природной среды является четырехмерное вариационное усвоение данных наблюдений. Наряду с разработкой и обоснованием алгоритмов численного решения задач вариационного усвоения данных, важную роль играют свойства самого оптимального решения. До сих пор малоисследованным является вопрос о чувствительности решений задач вариационного усвоения к погрешностям данных наблюдений.
В настоящей работе рассмотрены численные алгоритмы исследования чувствительности решения задачи вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря, полученных со спутника, с целью восстановления потоков тепла на поверхности. Получено уравнение для погрешностей оптимального решения через ошибки данных наблюдений. Это уравнение приводит к определению коэффициентов чувствительности, которые характеризуют степень влияния ошибок данных наблюдений на оптимальное решение задачи вариационного усвоения. Для пересчета данных спутниковых наблюдений на расчетную равномерную сетку численной модели термодинамики Балтийского моря использовался оригинальный алгоритмы интерполяции данных. В заключении представлены численные эксперименты в приложении к модели термодинамики Балтийского моря, определены районы акватории Балтийского моря наиболее чувствительные к ошибкам данных наблюдений и проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: математическое моделирование, данные спутниковых наблюдений, вариационное усвоение данных, оптимальное управление, сопряженные уравнения, чувствительность к погрешностям.

Введение

Наиболее универсальной и перспективной технологией решения задач мониторинга и анализа природной среды является четырехмерное вариационное усвоение данных наблюдений. В работе (Пармузин и др., 2012) сформулирована и исследована задача вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря, разработан алгоритм численного решения задачи и приведены результаты численных экспериментов на примере акватории Черного моря с целью определения потоков тепла на поверхности. Наряду с разработкой и обоснованием алгоритмов численного решения задач вариационного усвоения данных, важную роль играют свойства самого оптимального решения. До сих пор малоисследованным является вопрос о чувствительности решений задач вариационного усвоения к погрешностям данных наблюдений. Некоторые результаты по исследованию чувствительности решений задач вариационного усвоения данных можно найти в работах (Gejadze et al., 2011; Gejadze, Shutyaev, 2012; Shutyaev et al., 2012). Мы рассмотрим задачу вариационного усвоения данных наблюдений о температуре поверхности моря для модели термодинамики в постановке, аналогичной введенной в работе (Агошков и др., 2008). В

работе (Parmuzin, Shutyaev, 2013) получено уравнение, связывающее погрешности оптимального решения задачи вариационного усвоения с ошибками данных наблюдений через Гессиан функционала стоимости, и предложены алгоритмы вычисления коэффициентов чувствительности как норм операторов отклика, возникающих в уравнениях для погрешностей, на основе которых в настоящей статье проведены численные эксперименты по вычислению спектра Гессиана и сравнению оптимальных решений (потоков на поверхности) в возмущенной и невозмущенной задачах вариационного усвоения в приложении к акватории Балтийского моря.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим задачу термодинамики моря в виде (Алексеев, Залесный, 1993; Марчук и др., 1987):

$$\begin{gathered}
T_t + (\bar{U}, Grad)T - Div(\hat{a}_T \cdot Grad\, T) = f_T \ \text{ в } \ D \times (t_0, t_1), \\
T = T_0 \text{ при } t = t_0 \text{ в } D, \\
-\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = Q \text{ на } \Gamma_S \times (t_0, t_1), \quad \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (t_0, t_1), \\
\bar{U}_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = \bar{U}_n^{(-)} d_T + Q_T \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_0, t_1), \\
\frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_H \times (t_0, t_1),
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $T = T(x, y, z, t)$ – неизвестная функция температуры, $t \in (t_0, t_1)$, $(x, y, z) \in D = \Omega \times (0, H)$, $\Omega \subset R^2$, $H = H(x, y)$ – функция рельефа дна, $Q = Q(x, y, t)$ – суммарный приток тепла, $\bar{U} = (u, v, w)$, $\hat{a}_T =$ diag$((a_T)_{ii})$, $(a_T)_{11} = (a_T)_{22} = \mu_T$, $(a_T)_{33} = \nu_T$, $f_T = f_T(x, y, z, t)$ – заданные функции. Граница области $\Gamma \equiv \partial D$ представляется как объединение четырех непересекающихся частей Γ_S, $\Gamma_{w,op}$, $\Gamma_{w,c}$, Γ_H, где $\Gamma_S = \Omega$ (невозмущенная поверхность моря), $\Gamma_{w,op}$ – жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ – твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H – дно моря. Другие обозначения и детальное описание постановки задачи можно найти в работах (Агошков и др., 2008, Zalesny et al., 2013).

Задачу (1.1) можно записать в форме операторного уравнения:

$$\begin{gathered}
T_t + LT = F + BQ, \quad t \in (t_0, t_1), \\
T = T_0 \quad \text{при} \quad t = t_0,
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где равенство понимается в слабом смысле, а именно:

$$(T_t,T)+(LT,T)=F(T)+(BQ,T)\ \ \forall T\in W_2^1(D), \tag{1.3}$$

при этом L, F, B определяются следующими соотношениями:

$$(LT,T)\equiv\int_D(-TDiv(\bar{U}T))+\int_{\Gamma_{w,op}}\bar{U}_n^{(+)}TTd\Gamma+\int_D a_T Grad(T)\cdot Grad(T)dD,$$

$$F(T)=\int_{\Gamma_{w,op}}(Q_T+\bar{U}_n^{(-)}d_T)TdT+\int_D f_T TdD,$$

$$(T_t,T)=\int_D T_t TdD,\ \ (BQ,T)=\int_\Omega QT|_{z=0}\,d\Omega,$$

а функции $\hat{a}_T$, Q_T, f_T, Q таковы, что равенство (1.3) имеет смысл. Свойства оператора L исследованы в работе (Агошков и др., 2008).

2. Задача об усвоении данных о температуре поверхности моря

Мы рассмотрим задачу об усвоении данных о температуре поверхности моря (см. (Агошков и др., 2008; Parmuzin, Agoshkov, 2012). Предположим, что в задаче (1.1) функция $Q\in L_2(\Omega\times(t_0,t_1))$ неизвестна. Пусть задана функция данных наблюдений $T_{\text{obs}}(x,y,t)$ на $\bar{\Omega}\equiv\Omega\cup\partial\Omega$ при $t\in(t_0,t_1)$, которая по своему физическому смыслу есть приближение к функции поверхностной температуры на Ω, т.е. к $T|_{z=0}$. Предполагаем, что $T_{\text{obs}}\in L_2(\Omega\times(t_0,t_1))$, однако большей гладкостью функция T_{obs} может не обладать, поэтому ее нельзя использовать в качестве граничного условия на Γ_S. Допускается случай, когда T_{obs} имеется лишь на некотором подмножестве из $\Omega\times(t_0,t_1)$, характеристическую функцию которого обозначим через m_0. Вне этого подмножества для определенности считаем T_{obs} тривиальной.

Рассмотрим задачу об усвоении данных о температуре поверхности в виде: найти T и Q, такие что

$$\begin{cases} T_1+LT=F+BQ, \text{в } D\times(t_0,t_1) \\ T=T_0 \text{ при } t=t_1 \\ J(Q)=\inf\limits_Q J(Q) \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$J(Q)=\frac{\alpha}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}|Q-Q^{(0)}|^2\,d\Omega dt+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}m_0\,|T|_{z=0}-T_{obs}|^2\,d\Omega dt, \qquad (2.2)$$

$Q^{(0)}=Q^{(0)}(x,y,t)$ – заданная функция, $\alpha=const>0$.

При $\alpha>0$ поставленная задача вариационного усвоения данных имеет единственное решение. Существование оптимального решения следует из классических результатов теории экстремальных задач, так как нетрудно показать, что решение задачи (1.2) непрерывно зависит от потока Q (имеют место априорные оценки в соответствующих функциональных пространствах).

При $\alpha=0$ задача имеет решение не всегда, однако как показано в работе (Агошков и др., 2008), имеет место однозначная и плотная разрешимость, что позволяет построить последовательность регуляризованных решений, минимизирующую функционал.

Система оптимальности, которая определяет решение сформулированной задачи вариационной ассимиляции данных (2.1)-(2.2) согласно необходимому условию $gradJ=0$, имеет вид:

$$\begin{gathered} T_t+LT=F+BQ \quad \text{в} \quad D\times(t_0,t_1), \\ T=T_0 \quad \text{при} \quad t=t_0, \end{gathered} \qquad (2.3)$$

$$\begin{gathered} -(T^*)_t+L^*T^*=Bm_0(T-T_{\text{obs}}) \quad \text{в} \quad D\times(t_0,t_1), \\ T^*=0 \quad \text{при} \quad t=t_1, \end{gathered} \qquad (2.4)$$

$$\alpha(Q-Q^{(0)})+T^*=0 \quad \text{на} \quad \Omega\times(t_0,t_1), \qquad (2.5)$$

где L^*, B^* – операторы, сопряженные к L, B, соответственно.

В дальнейшем мы предполагаем, что $\text{supp}(m_0)=\bar{\Omega}\times[t_0,t_1]$ и исследуем вопрос о чувствительности оптимального решения Q к входным данным, а именно к погрешностям задания функций T_{obs} и $Q^{(0)}$.

3. Погрешность оптимального решения и коэффициенты чувствительности

В результате решения задачи вариационного усвоения данных, изложенной в разделе 2, мы получаем функцию полного потока Q, которая является оптимальным решением в смысле минимизации функционала (2.2). Это решение зависит от функции данных наблюдений T_{obs} на поверхности моря. Важным является вопрос о чувствительности оптимального решения Q к изменениям функции T_{obs}. Этот вопрос имеет большое значение с точки зрения прогноза, поскольку оптимальное решение, найденное в результате реше-

ния задачи вариационного усвоения, используется в дальнейшем для интегрирования модели на следующем временном интервале. В настоящем разделе рассматриваются алгоритмы исследования чувствительности оптимального решения к погрешностям данных наблюдений.

Пусть данные наблюдений заданы с ошибками:

$$Q^{(0)} = \overline{Q} + \xi_1, T_{\text{obs}} = \overline{T}\,|_{z=0} + \xi_2, \tag{3.1}$$

где $\xi_1, \xi_2 \in L_2(\Omega \times (t_0, t_1))$, а $\overline{T}$ есть точное решение прямой задачи при $Q = \overline{Q}$:

$$\begin{gathered} \overline{T}_t + L\overline{T} = F + B\overline{Q} \quad \text{в} \quad D \times (t_0, t_1), \\ \overline{T} = T_0 \quad \text{при} \quad t = t_0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Функции ξ_1, ξ_2 можно рассматривать как погрешности входных данных $Q^{(0)}$ и T_{obs} соответственно. Влияние этих ошибок на оптимальное решение Q, полученное из системы оптимальности (2.3)–(2.5) исследовалось в работе (Parmuzin, Shutyaev, 2013), где показано, что уравнение для погрешности оптимального решения при $\alpha > 0$ имеет единственное решение

$$\delta Q = \alpha H^{-1}\xi_1 + H^{-1}R\xi_2, \tag{3.3}$$

где оператор $H = H_0 + \alpha E$, E – единичный оператор, а H_0 определяется на $v \in L_2(\Omega \times (t_0, t_1))$ последовательным решением задач:

$$\begin{gathered} \psi_t + L\psi = Bv \quad \text{в} \quad D \times (t_0, t_1), \\ \psi = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -(\psi^*)_t + L^*\psi^* = Bm_0\psi \quad \text{в} \quad D \times (t_0, t_1), \\ \psi^* = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1, \end{gathered}$$

$$H_0 v = \psi^* \quad \text{на} \quad \Omega \times (t_0, t_1),$$

а оператор R определен в работе (Parmuzin, Shutyaev, 2013).

Таким образом, погрешность оптимального решения δQ в явном виде выражается через погрешности исходных данных ξ_1, ξ_2. В работе (Parmuzin, Shutyaev, 2013) детально исследованы свойства операторов задачи и приведены оценки для коэффициентов чувствительности, описывающих чувствительность оптимального решения задачи вариационного усвоения данных наблюдений для модели динамики моря. Здесь следует подчерк-

нуть, что при конечномерной аппроксимации H_0 оказывается плохо обусловленной матрицей, у которой наименьшее собственное число $\mu_{\min}$ близко к нулю. В этом случае коэффициент r_2, нижняя граница спектра оператора H_0, может быть достаточно большим, т.е. оптимальное решение может быть очень чувствительным к ошибкам наблюдений. Это означает, что в данной задаче необходимо введение регуляризатора с параметром $\alpha > 0$, что сделает задачу определения оптимального решения устойчивой по отношению к ошибкам наблюдений.

4. Результаты численных экспериментов

Для численных экспериментов мы воспользовались трехмерной численной моделью гидротермодинамики Балтийского моря, разработанной в ИВМ РАН на основе метода расщепления (Zalesny et al., 2013) и дополненной (Агошков и др., 2008; Parmuzin, Agoshkov, 2012) процедурой ассимиляции температуры поверхности T_{obs} с целью восстановления потоков тепла Q.

В качестве объекта моделирования рассматривается акватория Балтийского моря. Параметры рассматриваемой области и ее географические координаты могут быть описаны следующим образом: σ-сетка 336x394x25 (соответственно, по широте, долготе, глубине). Первая точка "сетки C" (Дианский и др., 2002) - точка с координатами 9,406° восточной долготы и 53,64° северной широты. Шаги сетки по x и y по постоянны и равны соответственно 0,0625 и 0,03125 градуса. Шаг по времени $\Delta t = 5$ минут.

В качестве T_{obs} использовались среднесуточные данные ночной температуры поверхности Балтийского моря Датского метеорологического института, подготовленные основе измерений радиометров (AVHRR, AATSR и AMSRE) и спектрорадиометров (SEVIRI и MODIS) (Karagali et al., 2012). Для пересчета данных наблюдений на расчетную сетку численной модели термодинамики Балтийского моря использовались алгоритмы интерполяции данных (Захарова, Лебедев, 2010; Zakharova et al., 2013).

В качестве $Q^{(0)}$ использовался среднеклиматический поток, полученный по данным реанализа NCEP (National Center for Environmental Prediction). С помощью упомянутой модели гидротермодинамики, дополненной “процедурой ассимиляции” температуры поверхности T_{obs}, были проведены расчеты на акватории Балтийского моря, в которых работал алгоритм усвоения лишь в некоторые моменты времени t_0, при этом $t_1 = t_0 + \Delta t$.

Целью экспериментов являлось численное исследование чувствительности оптимального решения Q к ошибкам наблюдений на интервале (t_0, t_1). В первой серии экспериментов проводились расчеты собственных значений μ_k Гессиана H_0, которые определяют коэффициенты чувствительности (Parmuzin, Shutyaev, 2013) . Были выявлены подобласти, соответствующие наименьшим значениям μ_k, в которых оптимальное решение, согласно теории, может быть наиболее чувствительным к ошибкам наблюдений. Во второй серии экспериментов проводился расчет потока Q на интервале (t_0, t_1) по заданным T_{obs} с помощью упомянутого алгоритма усвоения, а затем в T_{obs} вносились возмущения δT_{obs} и той же процедурой вычислялся возмущенный поток $\tilde{Q}$. По значениям погрешностей в потоках δQ определялись точки области, в которых возмущенный поток $\tilde{Q}$ наиболее отклоняется от Q.

При реализации процедуры усвоения на одном шаге по времени $\Delta t = t_1 - t_0$ рассматривалась система вида (2.3)–(2.5), где под (2.3)–(2.4) понимаются конечномерные аналоги соответствующих задач (Агошков и др., 2008).

При конечномерной аппроксимации, когда интервал (t_0, t_1) является шагом дискретизации по времени, Гессиан H_0, определяемый по формулам (3.3), обладает полным набором собственных функций, в качестве которых можно взять

$$Q_{kl} = \begin{cases} 1, & x = x_k, y = y_l, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где (x_k, y_l) - точки сетки на Ω. При этом собственные значения μ_{kl}, отвечающие Q_{kl}, можно определить последовательно по формулам при $x = x_k, y = y_l$:

$$\begin{gathered} (\psi)_t + L\psi = BQ_{kl}, \quad t \in (t_0, t_1), \\ \psi = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} -(\psi^*)_t + L^*\psi^* = Bm_0B^*\psi, \quad t \in (t_0, t_1), \\ \psi^* = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1, \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\mu_{kl} = \psi^* \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{4.3}$$

при этом для упрощения записи под (4.1), (4.2) понимаются конечномерные аналоги соответствующих задач (Агошков и др., 2008).

Приведем некоторые результаты численных экспериментов по исследованию чувствительности оптимального решения.

Результаты расчета при $t_0 = 20$ часов 50 минут (250 временных шагов модели) представлены на *рис. 1*, где приведены собственные числа Гессиана H_0 согласно формулам (4.1)–(4.3).

Рис. 1. Собственные числа Гессиана H_0 после 250 шагов расчета

Наименьшие собственные числа μ_{kl}, близкие к нулю, соответствуют точкам x, y, лежащим вблизи областей с небольшой глубиной, особенно в местах на склонах впадин (см. *рис. 7*). Аналогичная картина наблюдается, когда $t_0 = 41$ час 40 минут (500 временных шагов модели) (*рис. 2*), хотя можно заметить отличия на *рис. 1* и *2*. Таким образом, оптимальное решение оказывается чувствительным к погрешностям наблюдений в точках поверхности вблизи этих областей, и устойчивость задачи о восстановлении потоков тепла на поверхности может ухудшаться в этих точках.

Для проверки теоретических выводов были проведены численные эксперименты с алгоритмом усвоения для возмущенной поверхностной температуры $\tilde{T}_{\text{obs}} = T_{\text{obs}} + \varepsilon\delta T_{\text{obs}}$, $\varepsilon = const > 0$. Полученные в результате усвоения потоки $\tilde{Q}$ сравнивались с невозмущенными потоками Q.

На *рис. 3-4* представлены значения $\delta Q = \tilde{Q} - Q$ для случая, когда алгоритм усвоения включался в моменты времени: $t_0 = 20$ часов 50 мин (*рис. 3*), $t_0 = 41$ час 40 мин (*рис. 4*) при ε=0,01, δT_{obs}=T_{obs}. Из *рис. 3-4* видно, что наибольшая ошибка в оптимальном

решении δQ наблюдается вблизи тех участков расчетной области, где происходит изменение глубины Балтийского моря (см. *рис. 7*) , что соответствует в целом полученным ранее *рис. 1-2*.

Рис. 2. Собственные числа Гессиана H_0 после 500 шагов расчета

Рис. 3. Разность невозмущенного и возмущенного потоков при расчете на 250 шагов

Рис. 4. Разность невозмущенного и возмущенного потоков при расчете на 500 шагов

Рис. 5. Сингулярные числа оператора $H^{-1}R$ после 250 шагов расчета

На *рис. 5-6* представлены сингулярные числа, которые определяют коэффициент чувствительности r_2 (Parmuzin, Shutyaev, 2013).

Рис. 6. Сингулярные числа оператора $H^{-1}R$ после 500 шагов расчета

Рис. 7. Топография Балтийского моря

Проведенные исследования позволяют решать задачу по определению подобластей, в которых оптимальное решение наиболее чувствительно к ошибкам наблюдений при вариационном усвоении данных, в случае, когда значения ошибок заранее не известны.

Численные эксперименты подтверждают также, что в данной задаче необходимо введение регуляризатора с параметром $\alpha > 0$, что сделает задачу определения оптимального решения устойчивой по отношению к ошибкам наблюдений.

Заключение

В настоящей работе рассмотрены численные алгоритмы исследования чувствительности решения задачи вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря, полученных со спутника, с целью восстановления потоков тепла на поверхности. Уравнение для погрешностей оптимального решения через ошибки данных наблюдений связано с Гессианом задачи. Это уравнение приводит к определению коэффициентов чувствительности как норм операторов отклика, которые характеризуют степень влияния ошибок данных наблюдений на оптимальное решение задачи вариационного усвоения.

Численные эксперименты для модели динамики Балтийского моря показали, что задача о восстановлении потоков тепла на поверхности моря может быть неустойчивой в точках, лежащих вблизи областей с небольшой глубиной. Необходимо введение регуляризатора с параметром α, чтобы сделать задачу определения потоков устойчивой по отношению к ошибкам наблюдений. Предложенная методология позволяет определять подобласти, в которых оптимальное решение наиболее чувствительно к ошибкам наблюдений при вариационном усвоении данных.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00609, в рамках которого проводились следующие исследования: постановка задачи о чувствительности оптимального решения для модели динамики Балтийского моря, разработка алгоритма, проведение численных расчетов) и РФФИ (проект 14-01-31195-мол_а, "Исследование и разработка эффективных алгоритмов интерполяции гидрофизических данных наблюдений океанов и морей". В рамках этого проекта была произведена интерполяция данных наблюдений на сетку модели для проведения эксперимента).

Литература

1. *Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.* Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // ЖВМ и МФ. 2008. Т.48. №8. С.1371–1391.
2. *Алексеев В.В., Залесный В.Б.* Численная модель крупномасштабной динамики океана // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1993. С. 232-253.
3. *Дианский Н.А., Багно А.В., Залесный В.Б.* Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. № 4. С. 537-556.
4. *Захарова Н.Б., Лебедев С.А.* Интерполяция оперативных данных буев ARGO для ассимиляции данных в модели циркуляции Мирового океана // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. Т. 7. № 4. С. 104–111.
5. *Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 352 с.
6. *Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.* Computation of the optimal solution error covariance in variational data assimilation problems with nonlinear dynamics // Journal of Computational Physics. 2011. Vol. 230. pp.79–7943.
7. *Karagali I., Hoyer J., Hasager C. B.* SST diurnal variability in the North Sea and the Baltic Sea // Remote Sensing of Environment. 2012. V. 121. P. 159-170. doi: 10.1016/j.rse.2012.01.016
8. *Parmuzin E.I., Agoshkov V.I.* Numerical solution of the variational assimilation problem for sea surface temperature in the model of the B1ack Sea dynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2012. Vol. 27 (1). P. 69–94.
9. *Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.* The study of solution sensitivity for the variational observation data assimilation problem in the Black Sea dynamics model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. Vol. 28. No. 1. P. 37–52.
10. *Shutyaev, V.P., Le Dimet, F.-X., Gejadze, I.Yu., Copeland, G.J.M.* Optimal solution error covariance in highly nonlinear problems of variational data assimilation // Nonlinear Processes in Geophysics. 2012. Vol. 19. P. 177-84.
11. *Zakharova N.B., Agoshkov V.I., Parmuzin E.I.,* The new method of ARGO buoys system observation data interpolation // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2013. Vol. 28. No. 1. P. 67-84.
12. *Zalesny V.B., Gusev A.V., Chernobay S.Yu., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytkönen J.,* The Baltic Sea circulation modelling and assessment of marine pollution // Russ. J. Numer. Analysis and Math. Modelling. 2014. Vol. 29. Issue 2. P. 129–138.

Sensitivity of the optimal solution of a variational data assimilation problem for the Baltic Sea thermodynamics model

V.P. Shutyaev[1], S.A. Lebedev[2,3], E.I. Parmuzin[1], N.B. Zakharova[1]

[1]Institute of Numerical Mathematics RAS, Moscow 119333, Russia
E-mails: parm@inm.ras.ru, shutyaev@inm.ras.ru
[2]Geophysical Center RAS, Moscow 119296, Russia
E-mail: lebedev@wdcb.ru
[3]Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia

The most versatile and promising technology for solving problems of monitoring and analysis of the natural environment is a four-dimensional variational data assimilation of observation data. In such problems, not only the development and justification of algorithms for numerical solution of variational data assimilation problems but the properties of the optimal solution play an important role. Currently, the question about the sensitivity of the solutions to the errors of these observations remains underexplored.

In this work, the algorithms are formulated to study the sensitivity of the optimal solution with respect to the observation data errors in a variational data assimilation problem with the aim to restore the heat fluxes using the sea surface temperature data for the time-dependent system of thermodynamic equations. The satellite data of the sea surface temperature used to construct the observation data field that is used in the data assimilation procedure. The results of numerical experiments applied to the numerical model of the Baltic Sea thermodynamics are presented.

Keywords: mathematical modeling, satellite observation data, variational data assimilation, optimal control, adjoint equation, sensitivity to the observation error.

References

1. Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P. Numerical algorithm for variational assimilarion of sea surface temperature data, *Comp. Math. and Math. Physics,* 2008, V.48, No. 8, pp. 1293–1312.
2. Alekseev V.V., Zalesny V.B. Numerical model of large-scale ocean dynamics, *Vychislitelnye processy i sistemy* (Computational processes and systems), Moscow: Nauka, 1993, pp. 232-253.
3. Diansky N.A., Bagno A.V., Zalesny V.B. Sigma model of global ocean circulation and its sensitivity to vairations in wind stress, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics,* 2002, Vol. 38, No. 4, pp. 477-494.
4. Zakharova N.B., Lebedev S.A. ARGO floats data interpolation for data assimilation in World ocean circulation models, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa,* 2010, Vol. 7, No. 4, pp. 104–111.
5. Marchuk G.I., Dymnikov V.P., Zalesny V.B. *Mathematical models in geophysical fluid dynamics and numerical methods for their implementation*, Leningrad: Gidrometeoizdat, 1987, 352 p.
6. Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V. Computation of the optimal solution error covariance in variational data assimilation problems with nonlinear dynamics, *Journal of Computational Physics,* 2011, Vol. 230, pp. 79–94.
7. Karagali I., Hoyer J., Hasager C. B. SST diurnal variability in the North Sea and the Baltic Sea, *Remote Sensing of Environment,* 2012, Vol. 121, pp. 159-170.
8. Parmuzin E.I., Agoshkov V.I. Numerical solution of the variational assimilation problem for sea surface temperature in the model of the B1ack Sea dynamics, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2012, Vol. 27, No. 1, pp. 69–94.
9. Parmuzin E.I., Shutyaev V.P. The study of solution sensitivity for the variational observation data assimilation problem in the Black Sea dynamics model, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling,* 2013, Vol. 28, No. 1, pp. 37–52.
10. Shutyaev, V.P., Le Dimet, F.-X., Gejadze, I.Yu., Copeland, G.J.M. Optimal solution error covariance in highly nonlinear problems of variational data assimilation, *Nonlinear Processes in Geophysics,* 2012, Vol. 19, pp. 177-84.
11. Zalesny V.B., Gusev A.V., Chernobay S.Yu., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytkönen J., The Baltic Sea circulation modelling and assessment of marine pollution, *Russ. J. Numer. Analysis and Math. Modelling*, 2014, Vol. 29, No. 2, pp. 129–138.
12. Zakharova N.B., Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., The new method of ARGO buoys system observation data interpolation, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling,* 2013, Vol. 28, No. 1, pp. 67-84.