

Распознавание текстур на цифровых изображениях методами вычислительной топологии

Н.Г. Макаренко^{1,2}, Ф.А. Уртьев¹, И.С. Князева¹, Д.Б. Малкова³,
И.Т. Пак², Л.М. Каримова²

¹Главная астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mails: ng-makar@mail.ru; urtiev@gmail.com; iknyazeva@gmail.com

²Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы, Казахстан
E-mail: klyailya@mail.ru; pak.it@mail.ru

³Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: dasha.m91@gmail.com

В работе обсуждается распознавание текстур на цифровых изображениях методами вычислительной топологии. Основная идея заключается в использовании логики признаков, основанной на топологической фильтрации. Упорядоченные по фотометрической мере – уровню серого – пиксели изображения сканируются по высоте. Каждый локальный минимум порождает компоненту связности. Она исчезает, если в ее локальной окрестности появляется близкий по величине максимум. При увеличении уровня кластеры, порожденные первичными компонентами, сливаются. Процесс заканчивается, когда получается один глобальный кластер. Число компонент связности измеряется топологическим инвариантом – числом Бетти-нуль. Продолжительность жизни компоненты, или ее персистентность, измеряется разностью двух уровней. Первый маркирует ее появление, второй – слияние с соседним кластером. Слияние отдельных компонент сопровождается появлением «дыр» внутри комплекса кластеров. Их количество измеряется числом Бетти-1, а персистентность – разностью уровней исчезновения и появления дыры. Мы показываем как распределения персистентных чисел Бетти можно использовать для распознавания текстур на цифровых изображениях.

Ключевые слова: сегментация изображений, топологическая фильтрация, комплекс Чеха, персистентные числа Бетти, распознавание образов.

Введение

В рамках таксономии, заложенной Карлом Линнеем в знаменитой *Systema naturae* (1736 г.), сегментация изображений заключается в разбиении растровой сцены на непересекающиеся классы текстур. Для такого разбиения необходима логика признаков, которая придает смысл процедуре кластеризации (Гренандер, 1983). Обычно предпочтение отдается аналитическому контексту, т.е. принципам делимости и независимости (Цопф, 1966), которые лежат в основе большинства практических алгоритмов (см., например, Ester, et al., 1996; Rui and Wunsch, 2005; Luxburg, 2007).

Оливер Селффридж, один из пионеров машинного распознавания, заметил что «образ эквивалентен системе правил его распознавания» (Цопф, 1966). Великолепную иллюстрацию этого тезиса можно найти в эссе Хосе Луиса Борхеса¹ «Аналитический язык Джона Уилкинса» (1952). Автор цитирует китайскую энциклопедию «Небесная империя благодетельных знаний», в которой приводится разбиение животных на 14 классов. Согласно Борхесу, животные делятся на: а) принадлежащих Императору, б) набальзамированных, в) прирученных, г) сосунков, д) сирен, е) сказочных, ж) отдельных собак, з) включенных в эту классификацию, и) бегущих как сумасшедшие, к) бесчисленных, л) нарисованных тончайшей кистью из верблюжьей шерсти, м) прочих, н) разбивших цветочную вазу, о) похожих издали на мух.

Пример Борхеса согласуется с тезисом Селффриджа, однако эту классификацию невозможно реализовать с помощью универсальной иерархической системы – пандемониума

¹ Мишель Фуко (1994) посвятил этому эссе свою книгу «Археология гуманитарных наук».

Селфдрилджа (Selfridge, 1959). Пандемониум является аналогом машины Тьюринга в задачах распознавания и состоит из автономных агентов – демонов, которые выполняют элементарные функции. Нижний уровень системы заполняют *демоны входных данных*. На самом верхнем уровне находится *демон решения*, который и определяет выход всей системы. Ниже демона решения располагается группа *демонов понимания*, каждый из которых соответствует одной из узанных категорий признаков. Все прочие, демоны-вычислители, обрабатывая визуальную информацию от демонов данных, вырабатывают признаки и передают их демонам понимания. Принятие решения в пандемониуме получается взвешиванием набора признаков, полагая, что они образуют статистический ансамбль.

Спустя полвека, идея взвешивания признаков в сегментации изображений была использована в работе Шеня (Shen, 2006). В ней предлагался мягкий вариант функционала Мамфорда-Шаха, в котором сегментация доставляла минимум сумме энергии Дирихле изображения и общей длине границ сегментов, содержащих различные текстуры (Mumford and Shah, 1989). В мягком варианте этого функционала рассматривалась смесь паттернов, так что каждый пиксель принадлежал к каждому паттерну смеси с некоторой вероятностью. Применение этой схемы к HR (*high resolution*) изображениям сталкивается с значительными вычислительными трудностями, аналогичными, по сути, численным проблемам другого известного подхода к моделированию изображений – MRF (*Markov Random Field*).

Модели MRF появились в пионерской работе (Geman and Geman, 1984), в которой задача текстурной сегментации впервые приобрела строгую математическую форму. Авторы свели проблему к поиску скрытого марковского поля, которое реализуется с наибольшей апостериорной вероятностью. Это оптимизационная задача чрезвычайной сложности, которая решается лишь в некоторых частных случаях авторегрессионных или гауссовых полей. Для общего случая был предложен метод *имитации отжига*, как вариант алгоритма *Метрополиса – Хастинга*, который ранее успешно применялся для решения разных теоретически безнадежных задач (Винклер, 2002). Имитация отжига не определяет однозначно минимум функционала, но при удачной генерации случайного поля улучшает первоначальную оценку, понижая некоторый параметр, имеющий смысл температуры. Эксперименты с MRF привели к серии интересных результатов в области моделирования и генерации марковских случайных полей (Li, 2009). К сожалению, проблема собственно сегментации изображений потеряла при этом свою специфику: аналитическая строгость убила практическую пригодность результатов в соответствии с известным принципом *rigor mortis*.

1. Quickstart в алгебраическую топологию

Подход, который мы предлагаем в этой работе, основан на идеях алгебраической топологии. Его истоки можно усмотреть в цепном правиле установления близости точек в пространстве признаков, которое было рассмотрено Гренандером (1983), в задаче об изопериметрической кластеризации. А именно, две точки в пространстве признаков соединяются ребром, если

расстояние между ними в подходящей метрике не превышает заданного малого числа ε . На формальном языке речь идет здесь о понятии так называемой ε -связной цепи Кантора. Ее можно представить себе как последовательность неэквилидистантных точек, в которых число линейно связных компонент зависит от выбранного пространственного разрешения. Иначе говоря, мы объединяем две точки в одну компоненту, если наше зрение не разделяет их на шкале $\leq \varepsilon$. Применение ε -связности к выделению эквивалентных текстур на изображениях арктического льда было описано в работе (Robins et al., 2004), а ее вариант, в форме емкостей Шоке, с успехом использовался для получения устойчивых оценок гильдеровских экспонент при мультифрактальной сегментации HR-изображений (Макаренко и др., 2008, 2014).

В алгебраической топологии цепная близость приводит к понятию *нерва* топологического покрытия точечного множества (Edelsbrunner and Harer, 2009). Пусть $S = \{v_i\}_{i=1}^N$ – выборка N точек из R^2 . Декорируем каждую точку диском $B(v_i, \varepsilon)$ с центром в v_i и радиусом ε . Структура состоящая из простейших (*simplicissima*) элементов – вершин, ребер и треугольных граней – называется *симплициальным комплексом*, если его смежные элементы пересекаются в точке, либо имеют общее ребро. Будем синхронно увеличивать радиусы дисков. Пересечение полученных элементов дилатации приводит к симплициальному комплексу, который называют *комплексом Чеха* (Carlsson, 2009):

$$K(S, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^N B(v_i, \varepsilon). \quad (1)$$

Для получения графического представления *нерва*, соединим соседние центры ребром, если соответствующие им смежные диски пересекаются. Кроме того, условимся, что пересечение трех смежных дисков порождает грань, т. е. «закрашенный» треугольник. С ростом радиусов комплекс упрощает свою структуру и вырождается в одну «закрашенную» грань. Вариацию форм, построенных на облаке точек при изменении масштаба, в алгебраической топологии называют *фильтрацией* (Edelsbrunner and Harer, 2009). Напомним, что дилатация диска множества B на величину ε или сложение по Минковскому $B \oplus \varepsilon$ является одной из основных операций в математической морфологии (Serra, 1982). Как и раньше, декорируем каждую точку дискретного множества S диском радиуса ε . Объединение этих дисков называют параллельным телом $S \oplus \varepsilon$ для S или покрытием Минковского. *Теорема о нерве* утверждает, что комплекс Чеха (1) для множества S и его покрытие Минковского $S \oplus \varepsilon$ гомотопны друг другу (Edelsbrunner and Harer, 2009):

$$K(S, \varepsilon) \sim S \oplus \varepsilon. \quad (2)$$

Иначе говоря, объединение дисков для покрытия Минковского можно непрерывной деформацией «сжать» к симплициальному комплексу Чеха; заметим, что гомотопия допускает «слипание» точек. Очевидно, что $K(S, \varepsilon_1) \subseteq K(S, \varepsilon_2)$ для $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, так что фильтрация порождает вложенную последовательность комплексов, на которой можно определить алгебраические объекты – группы гомологий. Грубо говоря, эти группы описывают «дыры», т. е. мерные

циклы, которые не являются границами $k+1$ -мерных граней. Так, две точки, соединенные ребром, эквивалентны, потому что их можно совместить сдвигом по ребру. Действительно, граница ∂ ребра $[a, b]$ определяется как разность двух точек $\partial[a, b] = b - a$. Отсюда непосредственно следует эквивалентность $a \sim b$ точек, отличающихся на границу $b = a + \partial[a, b]$. С другой стороны, граница «закрашенного» треугольника образует цикл, который можно «стянуть в точку» движением по грани. Таким образом, независимыми объектами комплекса в R^2 являются ε -различимые компоненты (нульмерные дыры). Они образуют нульмерную группу гомологий H_0 . Рангом этой группы, т. е. числом различных элементов, называют числом Бетти β_0 . Группу H_1 образуют одномерные циклы вокруг дыр. Ее ранг называют числом Бетти β_1 .

На языке распознавания образов, при построении фильтрации мы меняем свою толерантность к определению родственных отношений между признаками от самой малой, когда смежные точки не пересекаются своими окрестностями – дисками, до самой большой, когда точка родственна или похожа на все точки пространства признаков, т. е. включена в глобальную конечную грань. Очевидно, что в этой процедуре времена жизни каждой точки, до включения ее в ребро, и каждой дыры, до ее исчезновения (закрашивания), являются различными. Продолжительность жизни, или *персистентность*, можно измерить в радиусах дилатации дисков покрытия, от рождения до уничтожения компоненты связности или цикла. Время жизни изображают обычно множеством горизонтальных отрезков – *баркодов*, параллельных оси изменения радиуса (Carlsson, 2009). Удобнее представлять баркоды в форме *диаграммы персистентности*, облака точек на плоскости, координатами каждой из которых является начало и конец баркода. Все точки лежат выше диагонали, которой соответствует нулевое время жизни (Carlsson et al., 2006; Ghrist, 2008). Изложенная техника относится к методам вычислительной топологии. Так называют компьютерный вариант алгебраической топологии, науки которая активно развивается в последнее время (Edelsbrunner and Harer, 2009; Zomorodian, 2005; Kaczynski, 2004).

Описанную выше схему фильтрации можно положить в основу новых дескрипторов для распознавания текстур для цифровых изображений. Основой является при этом значение контраста или уровень яркости в пикселе. Нерв строится сканированием топографии фотометрической поверхности по высоте. Распределение чисел Бетти по уровням предлагается в качестве дескриптора текстуры.

Очевидны три преимущества предлагаемого подхода. Первым из них является простота признаков – ими являются значения фотометрической меры в пикселях. Вторым – свойство мультиразрешения: в пространстве признаков анализируются все масштабы. Наконец, третьим преимуществом служит инвариантный характер дескрипторов: числа Бетти не зависят от метрики.

Целью настоящей статьи является практическая реализация фильтрации для цифровых изображений природных ландшафтов. Мы приводим первые результаты по гомологическому распознаванию ландшафтов и обсуждаем возможное развитие предложенных идей. Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 мы описываем алгоритм фильтрации на примере модельного изображения. В разделе 3 приведены результаты численных экспериментов. Заключение резюмирует основные выводы и намечает пути дальнейших исследований.

2. Алгоритм вычисления чисел Бетти

Для того чтобы облегчить понимание, мы практически не используем терминологию групп гомологий. Читатель может познакомиться с техникой алгебраической топологии по книгам (Edelsbrunner and Harer, 2009; Zomorodian, 2005) или по обзору (Edelsbrunner, Morozov, 2012). Ради простоты опишем алгоритм (Макаренко Н.Г., и др. 2013), на примере анализа черно-белого изображения размером 6x6 пикселей, содержащего 256 градаций серого (рис. 1).

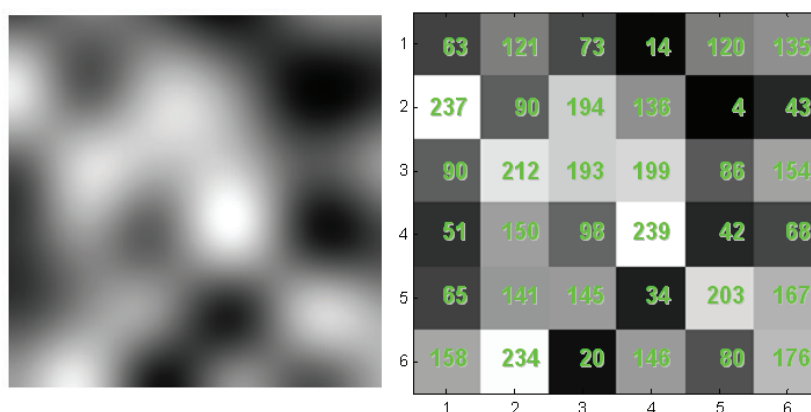


Рис. 1. Тестовое сглаженное изображение (слева);
справа – растр с значениями уровня серого

Представим, что на рис. 1 слева изображен горный ландшафт с заснеженными вершинами. Справа приведен его растр с численными значениями интенсивностей. Пусть каждый пиксель, который не принадлежит границе, имеет окрестность Мура, т. е. 8 соседей. Упорядочим по возрастанию интенсивности все пиксели и будем подниматься вертикально вверх «от подножья гор к вершинам», руководствуясь списком высот. Заметим, что достаточно проходить не все 256 уровней серого, а лишь те, на которых появляются новые вершины. При появлении новой вершины в окрестности уже существующей (отмеченной) вершины мы соединяем их ребром, которое добавляем в фильтрацию. Значения функции на ребре определим как $f[ab] = \max\{f[a], f[b]\}$. Как только в фильтрации появляются три соседние точки, соединяем их треугольником, значение функции на треугольнике определим как $f[abc] = \max\{f[a], f[b], f[c]\}$. В результате получится фильтрация, состоящая из вершин, ребер и треугольников, упорядоченных по возрастанию функции и по размерности симплекса в случае равных значений функции. При одинаковых значениях в фильтрации приоритет получает та вершина, которая находится на изображении выше и левее. На основе полученной фильтрации можно вычислять числа Бетти. Ради простоты будем использовать латиницу для чисел Бетти: $B_0 \equiv \beta_0$, $B_1 \equiv \beta_1$. Каждая новая вершина добавляет новую компоненту связности ($B_0 = B_0 + 1$), а ребро, в том случае, если оно соединяет разные компоненты, наоборот, убивает компоненту ($B_0 = B_0 - 1$). Появление треугольника означает появление дыры B_1 . В процессе вычисления можно определить время жизни (персистентность) каждой из компонент B_0 , измеряя его разностью высот уровней на появления компоненты

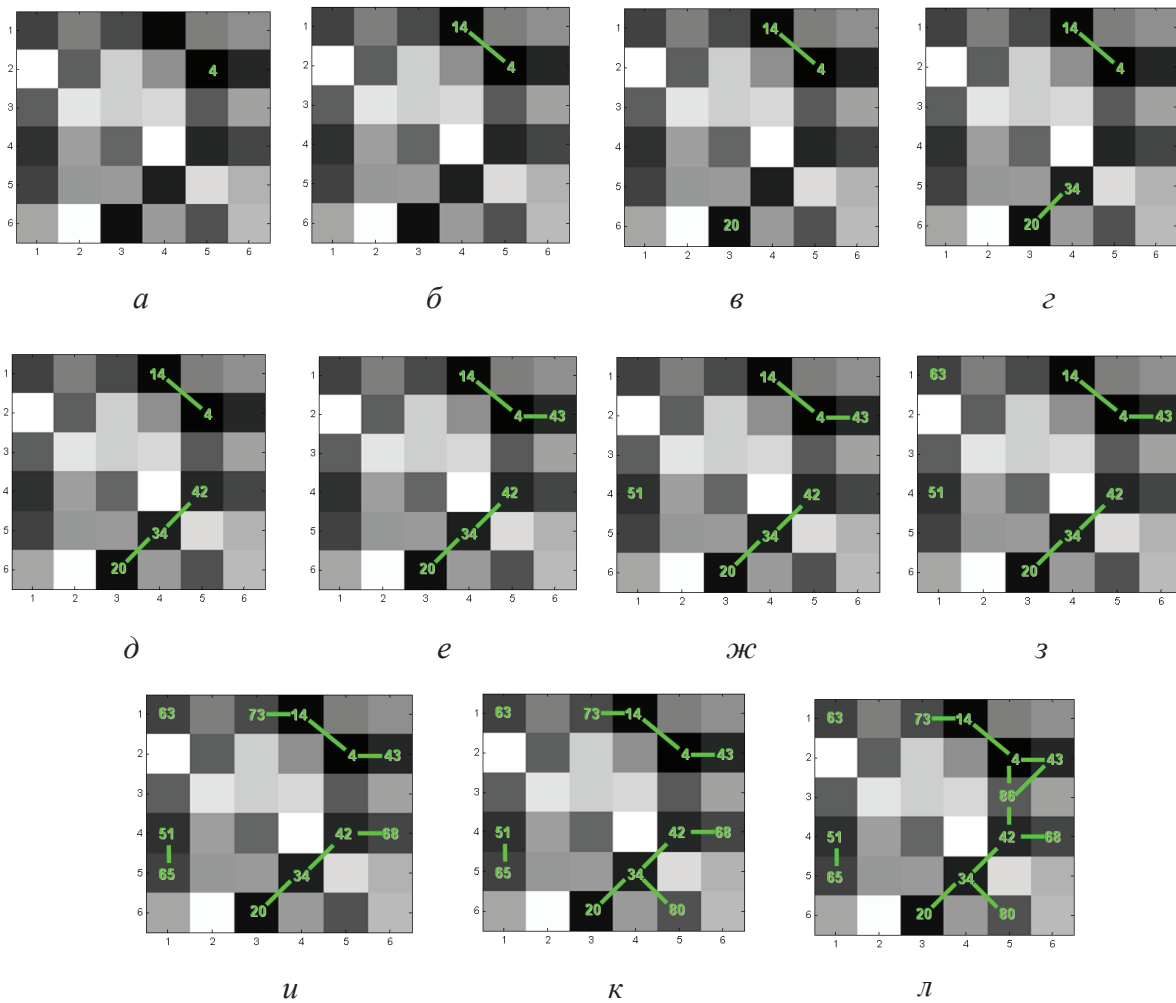


Рис. 2. Алгоритм вычисления чисел B_0

и ее слияния с уже существующим кластером. Иллюстрация алгоритма дана на рис. 2. При сканировании по высоте первая вершина появляется на уровне 4 (рис. 2а). В список вносятся ее уровень как момент рождения компоненты B_0 . Следующая по величине вершина с уровнем 14 не дает новой компоненты (рис. 2б), т. к. она является соседней по Муру с более ранней вершиной, на уровне 4. Мы записываем в список фильтрации образовавшееся ребро (4-14). Следующая по уровню интенсивность 20 порождает новую компоненту (рис. 2в), поскольку она не граничит ни с какой из существующих компонент. Она заносится в список с моментом ее рождения 20. Следуя той же стратегии, движемся по панелям 2г-2к, исследуя время рождения и смерти компонент. На панели рис. 2л с $B_0 = 3$ при вершине 86 образуется первый «треугольник» (4-43-86). Мы записываем координату его рождения и приписываем ему индивидуальный номер.

Для подсчета количества дыр, или B_1 , и их времени жизни нам будет нужна та же фильтрация, только проходить ее нужно в обратном порядке, сверху вниз, и добавить один внешний элемент «outside». В процессе обратного прохождения при появлении каждого треугольника добавляется дыра $B_1 = B_1 + 1$; при появлении ребра, которое является смежным для двух треугольников, ограничивающих разные дыры, компонента умирает $B_1 = B_1 - 1$. В случае появления ребра на границе дыра также погибает. Формально мы

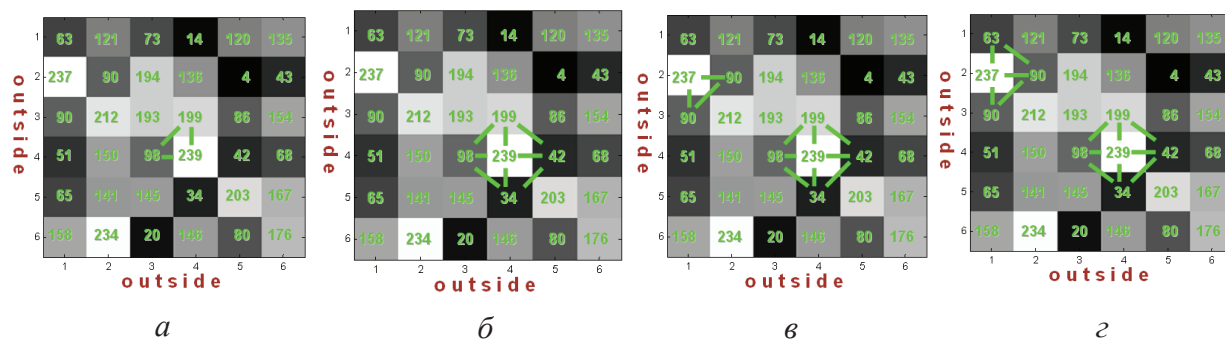


Рис. 3. Алгоритм вычисления чисел $B1$

считаем, что она соединяется с внешним треугольником «outside». В этом процессе, конечно, возникают и дыры, образованные треугольниками и многоугольниками, с ребрами не принадлежащими границам изображения. По аналогии с компонентами, мы можем определить персистентность каждой дыры $B1$.

Иллюстрация этого этапа алгоритма дана на рис. 3. Начнем спускаться от максимального значения 256 вниз по списку уже существующих треугольников. На уровне 239 появляется 4 треугольника в следующей последовательности: вначале треугольник (199-98-239), который был последним в фильтрации снизу вверх (рис. 3а).

Затем вокруг точки 239 образуются еще три треугольника (рис. 3б). Так как все они имеют общие ребра, на уровне 239 мы имеем всего одну дыру, т. е. $B1 = 1$. На уровне 237 (рис. 3в) в фильтрации появляется новый треугольник (237-90-90). Однако, на этом же уровне появляется ребро (237-90), которое сливает треугольник с наружным окружением – *outside*. Оно является более старшим, и треугольник становится частью окружения *outside* и не дает вклада в $B1$. На этом же уровне (рис. 3г) появляется соседний треугольник (237-90-63), который имеет общую грань с треугольником (237-90-90), поэтому также не вносит вклада в компоненту $B1$. Продолжая движение вниз, мы получим полную фильтрацию для дыр. На выходе алгоритм записывает в отдельные текстовые файлы координаты рождения и смерти компонент $B0$ и $B1$. Они позволяют построить диаграмму персистентности. Кроме того, количество компонент связности и дыр для каждого уровня сохраняется в отдельный файл.

3. Результаты

Для численных экспериментов была использована база HR (*High-Resolution*) изображений природных объектов, доступная на сайте <http://www.cfar.umd.edu/~fer/website-texture/texture.htm>. Описание и сравнение облаков точек, т. е. диаграмм персистентности, требует вычислительно-сложных вероятностных метрик либо кусочно-линейных конструкций построенных над диаграммой – так называемых ландшафтов (Bubenik, 2014). Мы не используем их здесь, ограничиваясь простейшими дескрипторами, которыми являются распределения числа компонент и дыр по уровням. На рис. 4-8 приведены пары оригинальных изображений камней

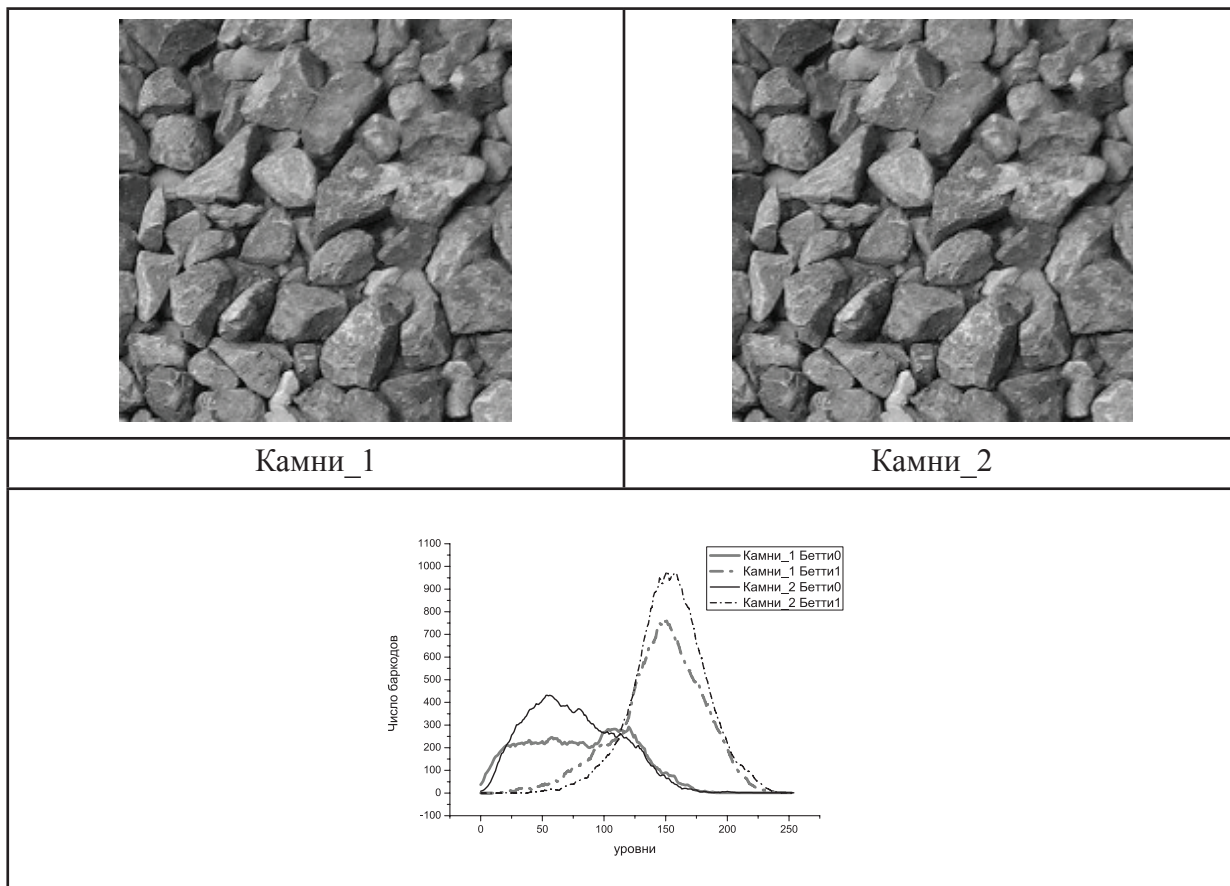


Рис. 4. Два фрагмента камней разного размера (вверху).
Распределение компонент В0 и В1 (нижняя панель) по уровням

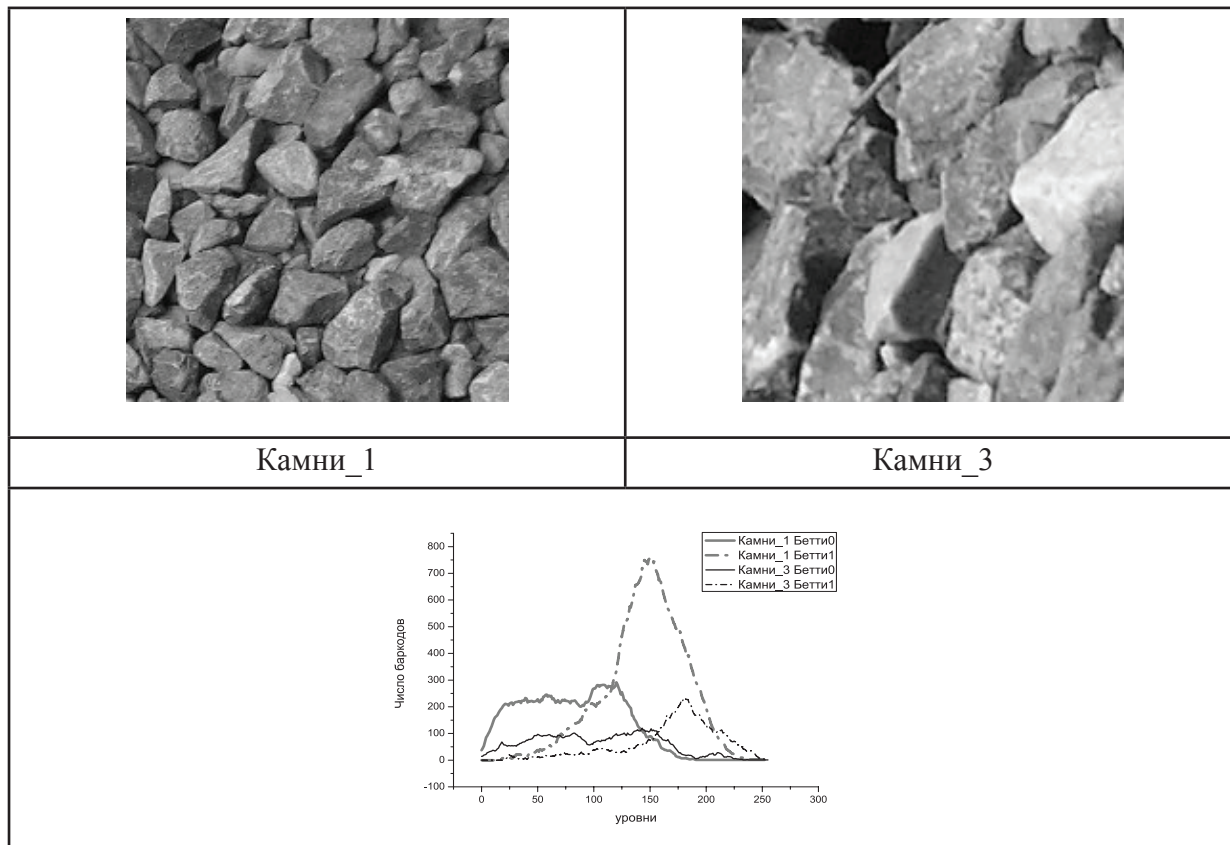


Рис. 5. Распределения чисел Бетти для оригинала и его увеличенного фрагмента

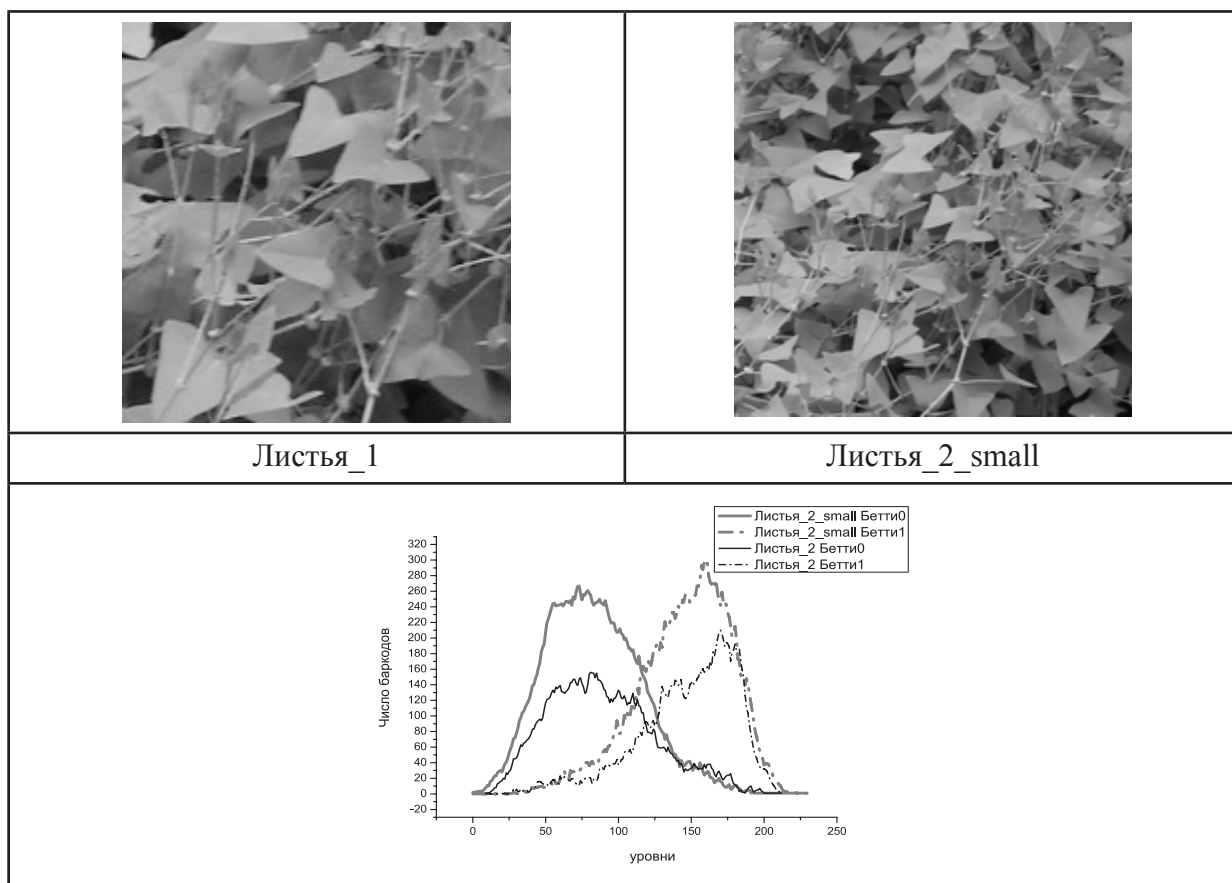


Рис. 6. Распределения чисел Бетти для оригинала (справа) и его увеличенного фрагмента (слева). Поведение кривых отличаются масштабом

и листьев с различными по размерам элементами. Для каждого изображения получено распределение чисел Бетти для числа компонент B_0 и числа дыр B_1 в зависимости от уровня.

Результаты вычисления гомологий для двух типов камней показаны на рис. 4. Соответствующие кривые для чисел Бетти имеют похожую форму. Отношение максимумов кривых для левого изображения $(\max B_1/\max B_0)_l = 2,59$, а для правого $(\max B_1/\max B_0)_r = 2,27$. На рис. 5 приведены аналогичные результаты, где оригинал сравнивается с собственным увеличенным фрагментом. Форма кривых по-прежнему сохраняется, однако изменились масштабные отношения максимальных значений: $(\max B_1/\max B_0)_l = 2,59$, для левой панели и $(\max B_1/\max B_0)_r = 1,94$ для правой панели.

На рис. 6 приведены результаты оценок чисел Бетти для двух типов листьев. Соответствующие кривые для чисел Бетти смещены, имеют разный масштаб, но похожи по форме. Отношение максимумов кривых для левого изображения рис. 6 $(\max B_1/\max B_0)_l = 1,19$, а для правого $(\max B_1/\max B_0)_r = 1,34$.

Для сравнения на рис. 7 и 8 приведены результаты для различных объектов малых (рис. 7) и крупных элементов (рис. 8) камней и листьев. Несмотря на относительное сходство кривых, отношения для их максимумов $(\max B_1/\max B_0)_l = 1,15$ и $(\max B_1/\max B_0)_r = 2,59$ отличается в 2,2 раза для рис. 7 и в 1,6 раза для рис. 8: $(\max B_1/\max B_0)_l = 1,94$ и $(\max B_1/\max B_0)_r = 1,19$.

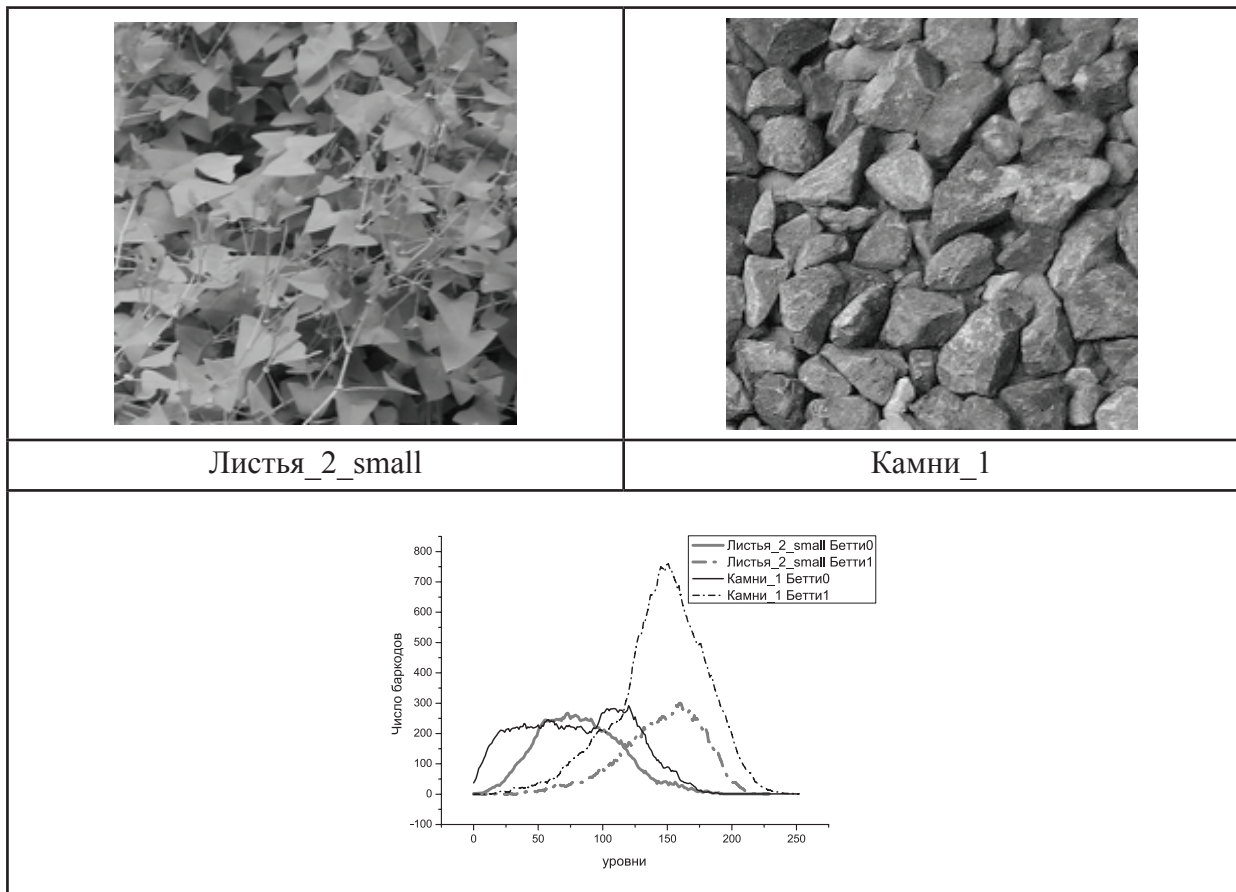


Рис. 7. Распределения чисел Бетти для листьев и камней

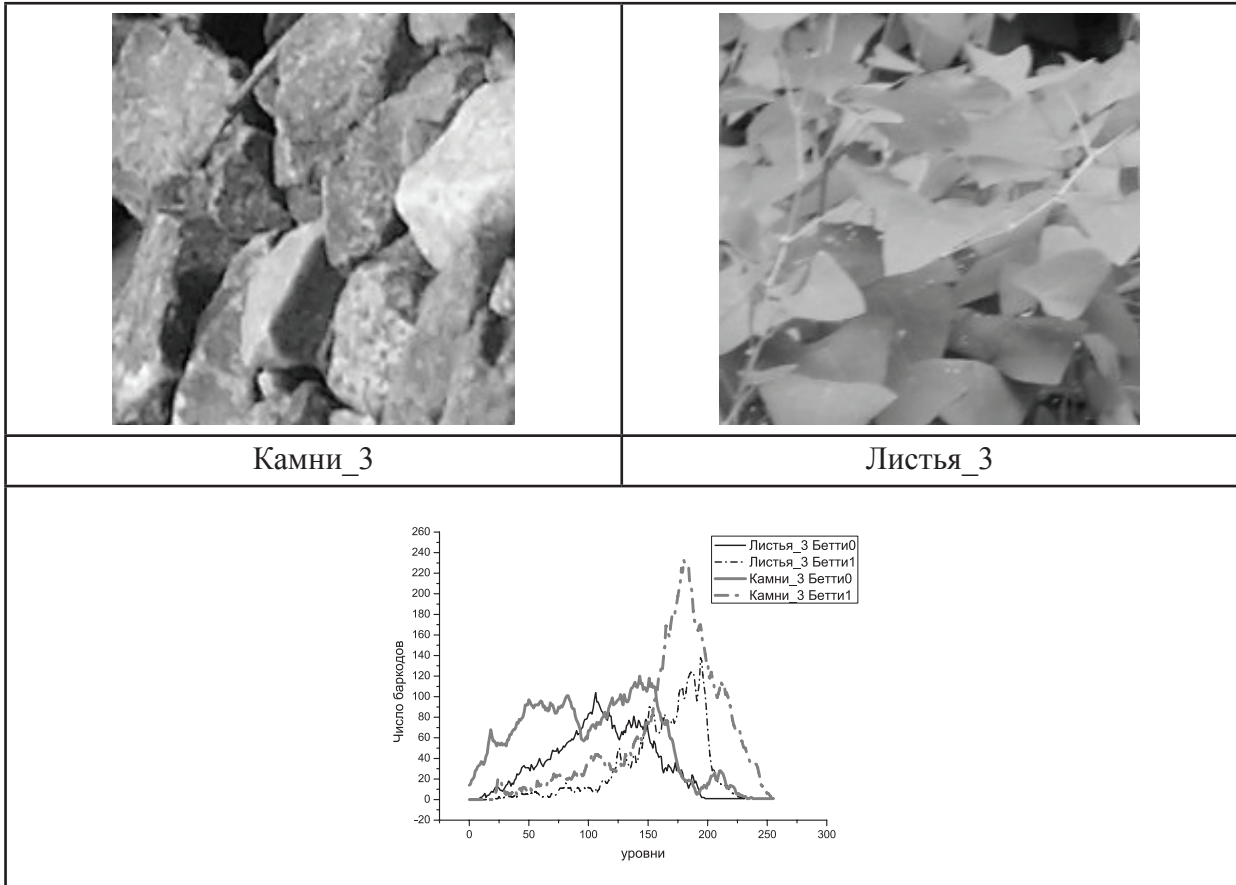


Рис. 8. Распределения чисел Бетти для больших листьев и камней

Мы приводим здесь лишь часть результатов по сделанным компьютерным экспериментам. Предварительные результаты показывают, дескрипторы, основанные на топологических характеристиках, качественно демонстрируют свойства масштабной инвариантности (рис. 5, 6) и позволяют различать разные сцены (рис. 7, 8). Гомологический подход к распознаванию обладает свойством мультимасштабности и опирается на естественные признаки. Лежащий в его основе процесс фильтрации выделяет устойчивые структуры методами, не связанными с выбором метрики.

Заключение

В статье обсуждается способ распознавания текстур цифровых изображений, основанный на вычислительной топологии. Для цифрового изображения пространством признаков является уровень серого, т. е. цифровая функция $I(\mathbf{x})$ заданная на пикселях $\mathbf{x} \equiv (x, y) \in Z \times Z$, образующих растр. Пусть $X_t = \{\mathbf{x} | I(\mathbf{x}) \geq t, a \leq t \leq b\}$ – множество суперинтервалов. Рассмотрим фильтрацию $\{X_t\}_{t=a}^b$ как вложенную последовательность пространств, таких, что $X_{t_1} \subset X_{t_2}$, если $t_1 < t_2$. Алгебраическая структура или гомологии на каждом из X_t определяются топологией окрестности Мура (8 соседей для пикселя) и правилами построения комплекса Чеха: два пикселя на каждом X_t соединяются ребром, если они принадлежат одной окрестности. Когда параметр t увеличивается, гомологии изменяются, т. е. добавляются или сливаются вместе отдельные компоненты, образуются и затем заполняются дыры. Персистентные гомологии отслеживаются временем жизни (баркодом) компоненты. Длина баркода является разностью двух уровней: t_1 , на котором появилась новая компонента, и t_2 , на котором она исчезла. Если концы баркода использовать как декартовы координаты точки на плоскости, мы получим облако точек, лежащих выше диагонали, которой соответствует нулевое время жизни. На языке теории Морса, новая компонента связности порождается уединенным минимумом и исчезает при появлении соседнего смежного максимума. Седловые точки могут привести к увеличению компонент связности, когда t увеличивается за счет возникновения вершины выше перевала, либо их уменьшению при слиянии двух соседних вершин, при уменьшении t .

Предложенный алгоритм изучает локальную структуру топографии яркости или контраста при изменении разрешения. Его преимуществом является независимость от масштаба и анализ первичных данных, с естественным шагом дискретизации, который задается отношениями частичного или строгого порядка на множестве отсчетов. Наконец, идея персистентности позволяет выделить существенные элементы текстурных паттернов, которым соответствуют точки, удаленные от диагонали диаграммы персистентности.

В качестве дескрипторов текстуры в статье рассматриваются распределения компонент связности (число $B0$) и «дыр» (число $B1$) в зависимости от уровня. Численные

эксперименты с изображениями из базы данных привели к следующим предварительным выводам:

- распределение чисел Бетти по уровням различно для разных объектов, камней и листьев;
- при изменении масштаба кривые для одинаковых объектов сохраняют форму, изменяя максимальную амплитуду,
- отношение максимумов чисел Бетти ($B1/B0$) позволяет различить объекты в тех случаях, когда поведения кривых для чисел Бетти различных объектов качественно похожи.

Очевидно, что приведенные выводы нуждаются в тестировании на выборках большого объема и разнообразия. Дальнейшие эксперименты должны включать эффективные меры для сравнения диаграмм персистентности и альтернативные статистики на случайных полях.

Работа выполнена при поддержке грантов 2308/ГФ3, 3326/ГФ4 КН МОН РК и РФФИ 14-32-50755 мол-нр.

Литература

1. Борхес Х.Л. Аналитический язык Джона Уилкинса. // Борхес Х. Л. Собрание сочинений. СПб.: Амфора, 2005. Т.2. С. 416-420.
2. Винклер Г. Анализ изображений, случайные поля и динамические методы Монте-Карло. Математические основы: Пер. с англ. Новосибирск: СО РАН, филиал Тео, 2002. 343 с.
3. Гренандер У. Лекции по теории образов. 3 Регулярные структуры. М.: Мир, 1983. 432 с.
4. Макаренко Н.Г., Круглун О.А., Макаренко И.Н., Каримова Л.М. Мультифрактальная сегментация данных дистанционного зондирования // Исследование Земли из космоса. 2008. № 3. С. 18-26.
5. Макаренко Н.Г., Каримова Л.М., Круглун О.А. Скейлинговые свойства цифровых изображений земных ландшафтов // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2014. Т. 11. № 2. С. 26-37.
6. Макаренко Н.Г., Малкова Д.Б., Мячин М.Л., Князева И.С., Макаренко И.Н. Диагностика магнитной динамики активных областей Солнца методами вычислительной топологии // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18. № 2. С. 79-93.
7. Фуко М. Слова и вещи. Археология гуманитарных наук: Пер. с фр. СПб.: А-сид, 1994. 408 с.
8. Цонф Г. Отношение и контекст. В кн.: Принципы самоорганизации. Пер. с англ. М.: Мир, 1966. С. 399-427.
9. Bubenko P. Statistical topological data analysis using persistence landscapes // 2014, arXiv:1207.6437 [math.AT].
10. Carlsson G. Topology and data // Bull. of the Amer. Mathem. Soc. 2009. Vol. 46(2), P. 255-308.
11. Carlsson E., Carlsson G., Silva Vin De. An algebraic topological method for feature identification // Intern. J. of Computational Geometry & Applications 2006. Vol. 16 (04), P. 291-314.
12. Edelsbrunner H., Harer J., Computational Topology, An Introduction. American Mathematical Society. 2009. 241 p.
13. Edelsbrunner H., Morozov. D. Persistent Homology: Theory and Practice // European Congress of Mathematics, Krakow, 2-7 July, 2012, Europ. Math. Soc. 2012. P. 31-50.
14. Ester M., Kriegel H-P., Sander J., Xu X. A Density-Based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise // KDD-96 Proceedings. 1996. P. 226-231.
15. Geman S., Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and Bayesian restoration of images // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol. PAMI-6.1984. No. 6. P. 721-741.
16. Ghrist R. Barcodes: The persistent topology of data // Bull. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 45(1) P. 61-75.
17. Kaczynski T., Mischaikow K., Mrozek M. Computational Homology. Springer 2004. 482 p.
18. Luxburg U. Von. A tutorial on spectral clustering // Stat. Comput. 2007. Vol. 17. P. 395-416.
19. Li Stan Z. Markov Random Field Modeling in Image Analysis. Springer. 2009. 357 p.
20. Mumford D., Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems // Comm. Pure Appl. Math. 1989. No. 42. P. 577-685.
21. Robins V., Abernethy J., Rooney N., Bradley E. Topology and Intelligent Data Analysis // Journ. Intelligent Data Analysis. 2004. Vol.8. No. 5. P. 505-515.
22. Rui Xu R., Wunsch II D. Survey of Clustering Algorithms. // IEEE Trans. on Neural Networks. 2005. Vol.16. No. 3. P. 645-678.
23. Shen J. A Stochastic -variational model for soft Mumford-Shah segmentation // Intern. J. of Biomedical Imaging. 2006. Vol. 2006. Article ID 92329. P. 1-14.
24. Selfridge O.G. Pandemonium: A Paradigm for Learning // Mechanisation of Thought Processes. National Phys. Labor. Symp. No. 10. London: Her Majesty's Stationery office. 1959. P. 513-530.
25. Serra J. Image Analysis and Mathematical Morphology. New-York: Academic Press. 1982. 610 p.
26. Zomorodian A.J. Topology for computing. Cambridge Univ. Press. 2005. 243 p.

Texture recognition in digital images by computational topology methods

N.G. Makarenko ^{1,2}, F.A. Urtiev ¹, I.S. Knyazeva ¹, D.B. Malkova ³,
I.T. Park ², L.M. Karimova ²

¹Central Astronomical Observatory RAS, Saint-Petersburg, Russia
E-mails: ng-makar@mail.ru, urtiev@gmail.com, iknyazeva@gmail.com

²Institute of Information and Computing Technologies
Ministry of Education and Science of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: klyailya@mail.ru, pak.it@mail.ru

³P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
E-mail: dasha.m91@gmail.com

In this paper we discuss the recognition of textures of digital images with the help of methods of computation topology. The main idea is to use the logic of attributes based on a topological filtration. Pixels sorted by photometric measure are scanned by ascending levels of gray. Each local minimum generates a connected component. It disappears if a similar in magnitude maximum appears in its local neighborhood. When the level increases, the clusters generated by the primary components merge. The process ends when it turns one global cluster. The number of connected components is measured by the topological invariant – Betti-zero. The life span of the components or its persistence is measured by the difference of the two levels. The first one marks appearance of the component, the second – a merging with neighboring clusters. Merging of the individual components is accompanied by the appearance of «holes» within the complex clusters. The amount of Holes is measured by Betti-1 number and the persistence by the difference between the levels of cancellation and the appearance of the Hole. We show how the distribution of persistent Betti numbers can be used for texture recognition in digital images.

Keywords: image segmentation, topological filtration, the Cech complex, persistent Betti numbers, pattern recognition.

References

1. Borges J.L., *Analiticheskii yazyk Dzhona Uilkinsa* (The Analytical Language of John Wilkins), Saint-Petersburg: Amphora, 2005, pp. 416–420.
2. Grenander U., *Lektsii po teorii obrazov. 3 Regulyarnye struktury* (Regular Structures Lectures in Pattern Theory. Volume III), Moscow: Mir, 1983, 432 p.
3. Makarenko N.G., Kruglun O.A., Makarenko I.N., Karimova L.M., Mul'tifraktal'naya segmentatsiya dannykh distantsionnogo zondirovaniya (Multifractal segmentation of data of remote sensing), *Issledovanie Zemli iz kosmosa*, 2008, No. 3, pp. 18-26.
4. Makarenko N.G., Karimova L.M., Kruglun O.A., Skeilingovye svoystva tsifrovyykh izobrazhenii zemnykh landshaftov (Scaling properties of digital images of Earth landscape), *Sovremennyye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2014, Vol. 11, No. 2, pp. 26-37.
5. Makarenko N.G., Malkova D.B., Machin M.L., Knyazeva I.S., Makarenko I.N., Diagnostika magnitnoi dinamiki aktivnykh oblastei Solntsa metodami vychislitel'noi topologii (Diagnostics of magnetic dynamics of active areas of the Sun by methods of computing topology), *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, 2013, Vol. 18, No. 2, pp. 79-93.
6. Foucault M., *Slova i veshchi. Arkheologiya gumanitarnykh nauk* (Les mots et les choses. Une archeologie des sciences humaines), SPb. Accad., 1994, 408 p.
7. Winkler G., *Analiz izobrazhenii, sluchainyye polya i dinamicheskiye metody Monte-Karlo. Matematicheskiye osnovy* (Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods. A Mathematical Introduction), Novosibirsk: SO RAN, Teo, 2002, 343 p.
8. Zopf G W., In: *Printsipy samoorganizatsii* (Principles of self-organisation), Moscow: Mir, 1966, pp. 399-427.
9. Bubenik P. *Statistical topological data analysis using persistence landscapes*, 2014, available at: <http://xxx.lanl.gov/arXiv:1207.6437> [math.AT]
10. Carlsson G., Topology and data, *Bull. of the Amer. Mathem. Soc.*, 2009, Vol. 46(2), pp. 255-308.
11. Carlsson E., Carlsson G., Silva Vin De, An algebraic topological method for feature identification, *Intern. J. of Computational Geometry & Applications*, 2006, Vol. 16 (04), pp. 291-314.
12. Edelsbrunner H., Harer J., *Computational Topology. An Introduction*, American Mathematical Society, 2009, 241 p.
13. Edelsbrunner H., Morozov D., Persistent Homology: Theory and Practice, *European Congress of Mathematics*, Krakow, 2-7 July, 2012, Europ. Math. Soc., 2012, pp. 31-50.
14. Ester M., Kriegel H-P., Sander J., Xu X., A Density-Based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise, Proc. *2nd Intern. Conf. Knowledge Discovery and Data Mining - KDD-96*, 1996, pp. 226-231.
15. Geman S., Geman D., Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and Bayesian restoration of images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1984, Vol. PAMI-6, No. 6, pp. 721-741.
16. Ghrist R., Barcodes: The persistent topology of data, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2008, Vol. 45(1), pp. 61-75.

17. Kaczynski T., Mischaikow K., Mrozek M., *Computational Homology*, Springer, 2004, 482 p.
18. Luxburg U. von, A tutorial on spectral clustering, *Stat. Comput.*, 2007, Vol. 17. pp. 395–416.
19. Li Stan Z., *Markov Random Field Modeling in Image Analysis*, Springer, 2009, 357 p.
20. Mumford D., Shah J., Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems, *Comm. Pure Appl. Math.* 1989, No. 42, pp. 577–685.
21. Robins V., Abernethy J., Rooney N., Bradley E., Topology and Intelligent Data Analysis, *J. Intelligent Data Analysis*, 2004, Vol. 8, No. 5, pp. 505–515.
22. Rui Xu R., Wunsch II D., Survey of Clustering Algorithms., *IEEE Trans. on Neural Networks*, 2005, Vol. 16, No. 3, pp. 645-678.
23. Shen J., A Stochastic-variational model for soft Mumford –Shah segmentation, *Intern. J. of Biomedical Imaging*, 2006, Vol. 2006, Article ID 92329, pp. 1–14.
24. Selfridge O.G., Pandemonium: A Paradigm for Learning, *Mechanisation of Thought Processes*. National Phys. Labor. Symp. No. 10. London: Her Majesty's Stationery office. 1959, pp. 513-530.
25. Serra J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, New-York, 1982, 610p.
26. Zomorodian A.J., *Topology for computing*, Cambridge Univ.Press, 2005, 243 p.