

## О связи формы трубообразного облака торнадо и его интенсивности

П.Б. Руткевич<sup>1</sup>, П.П. Руткевич<sup>2</sup>, Н.Ю. Комарова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Институт космических исследований РАН, Москва, 117342, Россия*

*E-mails: pbrutkevich@gmail.com, nata.komarova@asp.iki.rssi.ru*

<sup>2</sup>*Institute of High Performance Computing, A\*STAR, Singapore,*

*E-mail: pbrutkevich@gmail.com*

Рассмотрена задача о развитии вихревого возмущения типа трубообразного облака торнадо в аксиально-симметричной геометрии с учётом силы Кориолиса. В модели учитывается зависимость вертикального профиля температуры от вертикальной скорости, которая параметризует выделение скрытой теплоты конденсации влаги, всегда присутствующей в атмосфере. Таким образом, рассматривается нелинейная задача, имеющая предельный переход к задаче об обычной конвекции или о внутренних волнах в зависимости от знака вертикального градиента температуры. Модель трубообразного облака торнадо обеспечивается вертикальной неоднородностью радиуса колонны вихря, что в первом приближении сводится к вихрю конической формы. Динамика решения строится на основе задачи Коши с выбранными начальными условиями. Получено, что в такой постановке задача имеет линейные устойчивые решения (внутренние волны), когда вертикальный линейный профиль температуры устойчивый, и линейные неустойчивые решения (конвекция), когда вертикальный линейный профиль температуры неустойчивый. Однако наличие нелинейности может обеспечивать неустойчивые решения, даже если вертикальный линейный профиль температуры устойчивый.

**Ключевые слова:** трубообразное облако, скрытая теплота конденсации, задача Коши, неустойчивые решения

*Одобрена к печати: 05.10.2016*

*DOI: 10.21046/2070-7401-2016-13-6-159-171*

Хорошо известно, что перед возникновением смерча образуется так называемое трубообразное облако, или облако-воронка, или конденсационная воронка, которая вытягивается и формирует смерч (Bluestein, 1994, 2008; Tanamachi et al., 2006). Многочисленные наблюдения этого явления как с земли, так и из космоса (Atkins et al., 2014; Bluestein, 2005; Clark et al., 2000; Cooley, 1978; Houze, 2010; Tanamachi et al., 2006), указывают на то, что энергетическим источником этого явления природы следует считать выделение скрытой теплоты конденсации водяного пара, который всегда в том или ином количестве присутствует в атмосфере. Вначале такое облако имеет ярко выраженную коническую структуру, поэтому естественно начать рассмотрение задачи о формировании трубообразного облака смерча с исследования воронки смерча конической формы. Выделение скрытой теплоты конденсации водяного пара, очевидно, приведёт к конвективным движениям воздуха в атмосфере, которые при наличии силы Кориолиса могут становиться вращательными.

Таким образом, рассмотрим задачу о нелинейной конвекции в аксиально симметричной постановке. Будем считать, что нелинейность связана с условиями подогрева, поскольку известно, что вертикальные адиабатические градиенты температуры в атмосфере для сухого и влажного воздуха отличаются. Система уравнений в приближении Буссинеска для несжимаемого газа имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nabla P_1}{\rho_0} - g \beta T_1 \vec{e}_z + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{f} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \chi \Delta T_1 + \bar{v} \nabla T = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{v}$  – скорость воздуха в смерче;  $\rho_0$  – плотность воздуха;  $P_1$  – поправка к давлению;  $T_1$  – поправка к температуре,  $T_1 \ll T_0$ ;  $T_0$  – температура воздуха;  $\beta$  – коэффициент теплового расширения;  $\bar{e}_z$  – единичный вектор, направленный вертикально вверх;  $\bar{\Omega}$  – параметр Кориолиса;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $\chi$  – температуропроводность;  $T = T_0(z) + T_1$ ;  $T_0(z) = A_T \bar{e}_z$ ;  $\bar{e}_r$  – единичный радиальный вектор; вектор  $\bar{f}$

$$\bar{f} = -\bar{e}_r \frac{v_\theta^2}{r} + \bar{e}_z \frac{v_\theta v_r}{r}, \quad (4)$$

описывает центробежные нелинейные слагаемые.

Адиабатический профиль насыщенного влажного воздуха отличается от адиабатического профиля «сухого» воздуха. Для определения этого профиля как функции высоты заметим, что термодинамическая система насыщенного влажного воздуха описывается пятью параметрами – давлением  $P$  и плотностью  $\rho$  сухого воздуха, упругостью насыщенного пара  $E$ , плотностью пара  $\rho_v$  и температурой смеси  $T$ . В случае термодинамического равновесия на эти параметры должны быть наложены три условия, ограничивающие размерность пространства параметров задачи до двух. Это уравнение состояния сухого воздуха, рассматриваемого как идеальный газ  $P = \rho RT$ , уравнение состояния водяного пара, также рассматриваемого как идеальный газ  $E = \rho_v R_v T$ , где  $R$  – газовая постоянная «сухого» воздуха и  $R_v$  – газовая постоянная водяного пара, и уравнение Клапейрона-Клаузиуса:

$$dE = \frac{EL}{R_v T^2} dT, \quad (5)$$

где  $L$  – скрытая теплота конденсации,  $L = 2\,500\,000$  Дж/кг (Ландау, Лифшиц, 1986; Матвеев, 2000; Emanuel, 1994). Уравнение (5) описывает межфазное равновесие в насыщенном влажном воздухе. Уравнение состояния водяного пара можно представить как уравнение для отношения смеси  $q = \rho_v/\rho$ :

$$q = \frac{R}{R_v} \cdot \frac{E}{P}. \quad (6)$$

Уравнение состояния для сухого воздуха и уравнение состояния для отношения смеси также удобно представить в дифференциальной форме:

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}, \quad \frac{dq}{q} = \frac{dE}{E} - \frac{dP}{P}. \quad (7)$$

Количество тепла  $dQ$ , подводимое к элементу объема влажного воздуха, в условиях отсутствия диссипации расходуется на увеличение его внутренней энергии  $dU = c_v dT$ , совершение работы против сил давления  $PdV$  и испарение капель, т.е. на увеличение количества пара  $Ldq$  (Ландау, Лифшиц, 1986; Матвеев, 2000; Emanuel, 1994):

$$dQ = TdS = c_V dT + PdV + Ldq, \quad (8)$$

где  $c_V$  – теплоёмкость «сухого» воздуха при постоянном объёме.

Уравнение теплового баланса насыщенного влажного воздуха имеет вид (Ландау, Лифшиц, 1986; Матвеев, 2000; Emanuel, 1994):

$$\rho \left( c_V \frac{dT}{dt} + P \frac{dV}{dt} + L \frac{dq}{dt} \right) = 0. \quad (9)$$

Уравнение (8) и вышеуказанные термодинамические условия описывают равновесную термодинамику насыщенного водяным паром воздуха, и с их помощью можно вычислить все его термодинамические параметры. Таким образом, добавляя условие равенства нулю дифференциала энтропии, получим систему четырёх алгебраических уравнений для пяти дифференциалов  $dP$ ,  $d\rho$ ,  $dT$ ,  $dE$ ,  $dq$ . Из этих уравнений можно определить отношение каких-либо двух дифференциалов, например, отношение дифференциала давления воздуха к дифференциалу плотности воздуха, что равно квадрату скорости звука. В случае системы (5), (7), (9) получаем квадрат термодинамической скорости звука в насыщенном водяным паром воздухе (Ландау, Лифшиц, 1986; Emanuel, 1994; Rutkevich, 1998, 2002).

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{RTK}{\frac{c_V}{c_P} - \frac{Lq}{c_P T} + \frac{L^2 q}{c_P R_v T^2}}, \quad K = 1 + \frac{L^2 q}{c_P R_v T^2}, \quad (10)$$

где  $c_P$  — теплоёмкость «сухого» воздуха при постоянном давлении.

Принимая во внимание уравнение статики  $dP/dz = -g\rho$ , получим обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка для вертикального распределения всех пяти термодинамических параметров:

$$\gamma_P = \frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dz} = -\frac{g}{RT}, \quad (11)$$

$$\gamma_\rho = \frac{d\rho}{\rho dz} = -gc^{-2}, \quad (12)$$

$$\gamma_T = \frac{dT}{dz} = -\frac{g}{Rc_P K} \left( R + \frac{Lq}{T} \right), \quad (13)$$

$$\gamma_q = \frac{dq}{q dz} = -\frac{g}{RTK} \left( \frac{R}{R_v} \frac{L}{c_P T} - 1 \right), \quad (14)$$

$$\gamma_E = \frac{dE}{Edz} = -\frac{gL}{R_v c_P T^2 K} \left( 1 + \frac{Lq}{RT} \right). \quad (15)$$

Уравнения (11)–(15) имеют естественный предельный переход к случаю абсолютно сухой атмосферы, откуда немедленно следуют распределения термодинамических параметров, справедливые в «сухом» воздухе.

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\zeta\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\zeta\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad \theta = 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\zeta, \quad (16)$$

где  $\kappa = c_p/c_v$  – показатель адиабаты;  $\zeta = gz/RT_0$  – безразмерная вертикальная координата; безразмерная температура  $\theta = T/T_0$ .

Уравнения (11)–(15) описывают основное состояние для адиабатической постановки задачи. Когда нет внешнего подогрева – нет и конвекции. Уравнения (11)–(15) представляют собой систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, и непосредственное интегрирование системы уравнений для температуры и влажности в аналитическом виде невозможно. Для построения приближенного аналитического решения системы (11)–(15) заметим, что из этих пяти уравнений только два, для температуры и для плотности пара (13) и (14), представляют собой систему, а остальные уравнения позволяют вычислить вертикальные распределения остальных термодинамических параметров, если распределения для температуры и плотности пара уже определены.

Упростим уравнение (14), учитывая, что безразмерная температура в облаке изменяется незначительно по сравнению с температурой на нижней границе облака и её можно приближённо положить константой  $T(z) = T_0$  и решать упрощённое уравнение для плотности пара:

$$\frac{dq}{qd\zeta} = -\frac{\frac{R}{R_v} \frac{L}{c_p T_0 \theta} - 1}{1 + \frac{L^2 q}{c_p R_v T_0^2}}. \quad (17)$$

Интегрирование уравнения (17) при учёте вышеуказанного упрощающего предположения даёт зависимость высоты от влажности насыщенного паром воздуха:

$$-\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) + A\left(\frac{q}{q_0} - 1\right) = B\zeta, \quad (18)$$

где введены обозначения для безразмерных параметров  $A$  и  $B$ :

$$A = \frac{L^2 q_0}{c_p R_v T_0^2}, \quad B = \left(\frac{R}{R_v} \frac{L}{c_p T_0} - 1\right). \quad (19)$$

Решение уравнения (18) можно определить с помощью специальной функции Ламберта  $W(z)$ . Таким образом, для отношения смеси  $q(\zeta)$  как функции безразмерной высоты  $\zeta$  получаем:

$$q(\zeta) = q_0 \frac{W(Ae^{A-B\zeta})}{A}. \quad (20)$$

Для любого комплексного  $x$  функция Ламберта  $W(x)$  определяется функциональным уравнением:  $x = W(x)e^{W(x)}$ . Эта функция является также решением дифференциального уравнения (Дубинов и др., 2006; Corless et al., 1996; Valluri et al., 2000).

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}. \quad (21)$$

Отметим некоторые свойства функции Ламберта:

$$W(0) = 0, \quad W(e) = 1, \quad W\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{i\pi}{2}, \quad W\left(-\frac{1}{e}\right) = -1,$$

$$W\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = -\ln 2, \quad \int W(x) dx = x \left( W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)} \right) + C.$$

Асимптотики функции Ламберта:

$$W(x)|_{x \rightarrow \infty} = \ln x - \ln \ln x, \quad W(x)|_{x \rightarrow -1/e} = \sqrt{2(ex+1)} - 1.$$

Рассмотрим уравнение для безразмерной температуры  $\theta(\zeta)$  в насыщенном влажном облаке (13). В безразмерных переменных уравнение (13) принимает вид:

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{R}{c_p} \left( 1 + C \frac{q(\zeta)}{q_0} \cdot \frac{1}{\theta} \right) \cdot \left( 1 + A \frac{q(\zeta)}{q_0} \cdot \frac{1}{\theta^2} \right)^{-1}, \quad (22)$$

где  $C = Lq_0/(RT_0)$  с граничным условием,  $\theta_c(\zeta_c)$  – температура нижней границы облачности  $\zeta_c$ .

Учитывая, что искомое влажно-адиабатическое распределение температуры в атмосфере в градусах Кельвина незначительно отличается от сухоадиабатического распределения температуры, представим искомое влажноадиабатическое распределение как сумму сухоадиабатического распределения и поправки  $\varepsilon(\zeta)$ , зависящей от высоты:

$$\theta(\zeta) = \left( 1 - \frac{R}{c_p} \zeta + \varepsilon(\zeta) \right). \quad (23)$$

Подставляем решение для отношения смеси (20) и получаем приближённое уравнение для поправки  $\varepsilon(\zeta)$ :

$$\frac{d\varepsilon(\zeta)}{d\zeta} = \frac{R}{c_p \theta_c} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + W(Ae^{A-B\zeta})} \right\} \quad (24)$$

с граничным условием на нижней границе облака, где воздух можно считать насыщенным  $\varepsilon(\zeta_c)$ . Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varepsilon(\zeta) = \frac{R}{c_p} \frac{1}{\theta_c} \left( \zeta + \frac{1}{B} \ln \frac{W(Ae^{A-B\zeta})}{W(Ae^A)} \right). \quad (25)$$

Таким образом, окончательное выражение для вертикального распределения температуры в насыщенном влажном воздухе принимает вид:

$$\theta(\zeta) = \left( 1 - \frac{R}{c_p} \zeta + \frac{R}{c_p} \frac{1}{\theta_c} \left( \zeta + \frac{1}{B} \ln \frac{W(Ae^{A-B\zeta})}{W(Ae^A)} \right) \right). \quad (26)$$

На рис. 1 приводятся графики вертикального адиабатического распределения массовой доли пара в насыщенном влажном воздухе. Сплошная линия – численное решение уравнений (13), (14), пунктирная линия – кривая, полученная аналитически на основе приближенной формулы (20). На рис. 2 приводятся графики вертикального распределения температуры. Сплошная линия – численное решение уравнений (13), (14), пунктирная линия – влажная адиабата, полученные аналитически на основе приближенной формулы (26). На рис. 3 приводится вертикальная зависимость градиента температуры в насыщенном влажном воздухе.

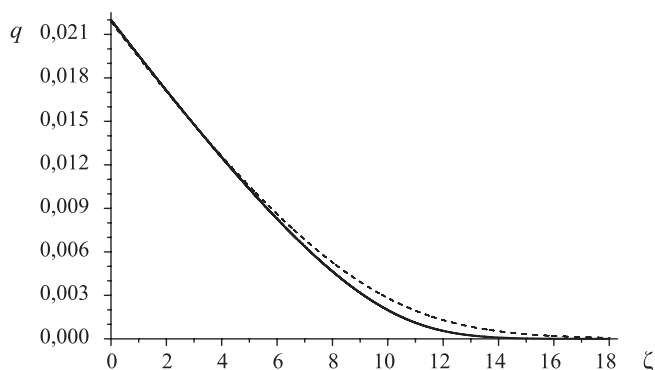


Рис. 1. Вертикальное адиабатическое распределение массовой доли пара в насыщенном влажном воздухе. Сплошная линия – численное решение уравнения (13), (14), пунктирная линия – кривая, полученная аналитически на основе приближенной формулы (20)

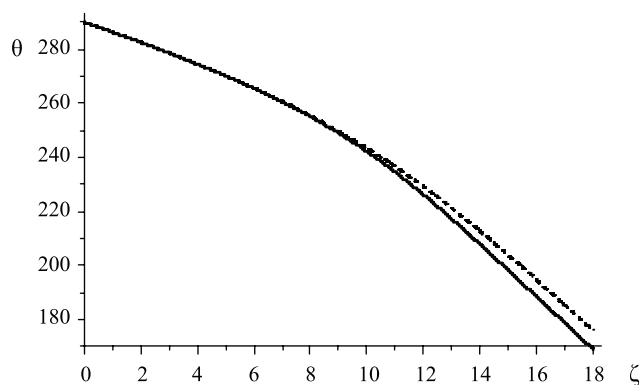


Рис. 2. Вертикальное адиабатическое распределение температуры в насыщенном влажном воздухе. Сплошная линия – численное решение уравнений (13), (14), пунктирная линия – влажная адиабата, полученная аналитически на основе приближенной формулы (26)

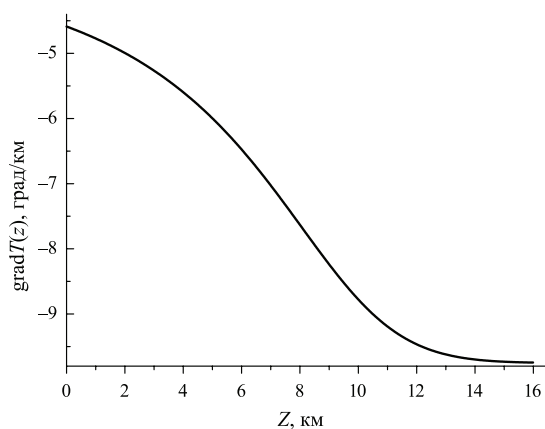


Рис. 3. Вертикальная зависимость градиента температуры в насыщенном влажном воздухе,  $T_0 = 20^\circ$

Учтём феноменологически в вертикальном градиенте температуры зависимость от вертикальной скорости, обусловленную выделением скрытой теплоты конденсации водяного пара в атмосфере, т.е. добавим к градиенту температуры дополнительное слагаемое, зависящее от вертикальной скорости воздуха.

$$\nabla_z T_0(u_z) = (A_T + \alpha u_z). \quad (27)$$

Действительно, поскольку в смерче существуют (сильные) вертикальные потоки воздуха, то при наличии в окружающей среде влаги воздух в восходящем движении быстро насыщается. Таким образом, в восходящих потоках воздух оказывается насыщенным водяным паром, а в нисходящих – остаётся не насыщенным, т.е. появляется зависимость вертикального градиента температуры от знака вертикального потока воздуха. Формула (27) аппроксимирует эту зависимость простейшим образом. В реальных условиях влажной атмосферы такого рода зависимость оказывается гораздо более сложной (см., например, (Ооюта, 1990, 2001)).

Уравнение для температуры (3) принимает, следовательно, вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \chi \Delta T_1 + u_z (A_T + \alpha u_z) = 0. \quad (28)$$

Учитывая несжимаемость воздуха (2), представим соленоидальное поле скорости в виде суммы его полоидальной и тороидальной компонент:

$$\vec{v} = \text{rot rot}_z \vec{e}_z + \text{rot}_z \vec{e}_z \psi. \quad (29)$$

Исследование задачи естественно проводить в предположении аксиальной симметрии, в цилиндрической системе координат угол  $\theta$  становится циклической координатой. Тогда компоненты поля скорости выражаются через потенциалы полоидального  $\phi$  и тороидального  $\psi$  полей следующим образом:

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z}, \quad v_z = -\Delta_\perp \phi, \quad \Delta_\perp \phi = \frac{\partial}{r \partial r} \cdot \frac{\partial (r \phi)}{\partial r}. \quad (30)$$

Перепишем исходную систему уравнений Навье-Стокса (1)–(3) в терминах потенциалов полоидального и тороидального полей скорости (29), (30):

$$\frac{\partial \Delta_\perp \psi}{\partial t} - \nu \Delta_\perp^2 \psi - (2\Omega) \frac{\partial \Delta_\perp \phi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial (v_r v_\theta)}{\partial r} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial (\Delta_\perp^2 \phi)}{\partial t} - \nu \Delta_\perp^3 \phi - \frac{g\beta (A_T + \alpha u_z)}{\chi} \Delta_\perp \phi + 2\Omega \frac{\partial (\Delta_\perp \psi)}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v_\theta^2}{\partial r} = 0. \quad (32)$$

Приведём систему уравнений для потенциалов полоидального и тороидального полей скорости (31), (32) к безразмерному виду. Длину отнесём к среднему радиусу колонны смерча  $r_0$ , время – к  $r_0^2/\nu$ , скорости к  $\nu/r_0$ , температуру отнесём к средней температуре воздуха  $T_0$ . Введём безразмерные параметры: число Рэлея

$$\text{Ra} = \frac{g\beta A_T r^4}{\nu^2}, \quad (33)$$

число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{v}{ur_0} \quad (34)$$

и число Тейлора

$$\text{Ta} = \left( \frac{2\Omega r^2}{v} \right)^2. \quad (35)$$

Обозначим дифференциальный оператор:  $D = \partial_t - \Delta_\perp$ . Тогда систему уравнений (31), (32) запишем несколько проще:

$$D\Delta_\perp\psi - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial\Delta_\perp\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = 0, \quad (36)$$

$$D\Delta_\perp^2\phi - (\text{Ra} + \alpha_1 u_z)\Delta_\perp\phi + \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial(\Delta_\perp\psi)}{\partial z} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial\psi}{\partial r} \right)^2 = 0. \quad (37)$$

Решение системы (36), (37) будем искать в виде разложения в ряд Тейлора по вертикальной координате  $z$ , ограничиваясь линейными слагаемыми:

$$\psi(r, z, t) = \psi_0 + z\psi_1, \quad (38)$$

$$\phi(r, z, t) = \phi_0 + z\phi_1. \quad (39)$$

Запишем систему (36), (37) с учётом разложений (38), (39) и соберем слагаемые при одинаковых степенях  $z$ .

$$\frac{\partial\Delta_\perp\psi_0}{\partial t} - \Delta_\perp^2\psi_0 - D\Delta_\perp\phi_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial\phi_1}{\partial r} \frac{\partial\psi_0}{\partial r} \right] = 0, \quad (40)$$

$$z \left( \frac{\partial\Delta_\perp\psi_1}{\partial t} - \Delta_\perp^2\phi_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial\phi_1}{\partial r} \frac{\partial\psi_1}{\partial r} \right] \right) = 0. \quad (41)$$

$$\frac{\partial\Delta_\perp^2(\phi_0 + z\phi_1)}{\partial t} - \Delta_\perp^3(\phi_0 + z\phi_1) - (\text{Ra}\Delta_\perp(\phi_0 + z\phi_1) - \alpha_1(\Delta_\perp\phi_0 + z\Delta_\perp\phi_1)^2) + \quad (42)$$

$$+ D \frac{\partial\Delta_\perp(\psi_0 + z\psi_1)}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial\psi_0}{\partial r} + \frac{z\partial\psi_1}{\partial r} \right)^2 = 0,$$

$$z \left( \frac{\partial\Delta_\perp^2\phi_1}{\partial t} - \Delta_\perp^3\phi_1 + (\alpha_1(\Delta_\perp\phi_1)^2) + D\Delta_\perp\psi_1 - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial\psi_1}{\partial r} \right)^2 \right) = 0. \quad (43)$$

Далее разложим все искомые функции ( $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ ) в ряды по функциям Бесселя нулевого порядка. Ограничимся только одним членом разложения.

$$\phi(r) = \phi_0 J_0(k_1 r), \quad \psi(r) = \psi_0 J_0(k_1 r). \quad (44)$$

Ещё нужно будет учесть равенство нулю полного потока воздуха в вертикальном направлении. Для этого наилучшим вариантом кажется разложение всех искомым полей по радиусу и учёту более одной гармоники. Это означает, что мы будем учитывать также



и нелинейные слагаемые, но ограничиваться в их разложении только первыми функциям Бесселя.

Требуем равенство нулю суммарного тока вертикальной компоненты скорости:

$$\int_0^1 v_z(r', t) r' dr' = - \int_0^1 r' \Delta_{\perp} \varphi(r', t) dr' = -\varphi(t) r J_1(kr) \Big|_0^R = 0. \quad (45)$$

Уравнение (45) есть уравнение для определения параметра  $k$ , откуда следует, что параметры  $k_n$  отвечают корням функции Бесселя первого порядка. Мы считаем  $k_n = k_1 = 3,8317$ .

Далее, нужно систему (40)–(44) умножить на  $rJ_0(k_1 r)$  и проинтегрировать по безразмерному радиусу от нуля до единицы. При этом нужно учитывать ортогональность функции Бесселя нулевого порядка:

$$\Xi = \int_0^1 J_0^2(k_1 r') r' dr' = \frac{J_0^2(k_1)}{2} = 0,0811076. \quad (46)$$

Получаем нелинейную систему четырёх уравнений для амплитуд  $\Psi_0(t)$ ,  $\Psi_1(t)$ ,  $\Phi_0(t)$ ,  $\Phi_1(t)$  потенциалов тороидальной и полоидальной компонент скорости:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + k_1^2 \right) \Psi_0 + D\Phi_1 - \lambda_1 \Phi_1 \Psi_0 4,108 = 0, \quad (47)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + k_1^2 \right) \Psi_1 + 0,2642 \times \Phi_1 \Psi_0 = 0, \quad (48)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + k_1^2 \Phi_0 \right) + Ra\Phi_0 - k_1^2 D\Psi_1 \Xi - \alpha_1 \Phi_0^2 k_1^2 \frac{0,0286}{\Xi} + \Psi_0 \Psi_1 2k_1 \frac{0,333}{\Xi} = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + k_1^2 \Phi_1 + \frac{Ra}{k_1^2} \Phi_1 - 2k_1 \Psi_1^2 \frac{0,157}{k_1^4 \Xi} + 2\alpha_1 k_1^4 \Phi_0 \Phi_1 \frac{0,0286}{k_1^4 \Xi} = 0. \quad (50)$$

Вначале рассмотрим случай отсутствия силы Кориолиса  $\Omega = 0$  и нелинейной добавки, параметризующей выделение скрытой теплоты конденсации водяного пара в цилиндрической полости  $\alpha = 0$ . Этот случай должен соответствовать обычной конвекции в цилиндрической полости (Гершуни, Жуховицкий, 1972; Матвеев, 2000). Чтобы получить стационарное решение задачи (47), (49), нужно найти такие значения параметров, чтобы динамическое решение задачи (47), (49) оставалось постоянным. Выберем, например, значение параметров следующим образом:  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,  $\beta = 1/273 \text{ 1/К}$ ,  $A = 0,05 \text{ К/м}$ ,  $r_0 = 26,327 \text{ м}$ ,  $v = 2 \text{ м}^2/\text{с}$ . При таких значениях параметров решение (вертикальная скорость) не зависит от времени, а соответствующее число Рэлея равно  $Ra_{\text{прибл}} = 215,565$ . Это число несколько отличается от аксиально-симметрического решения задачи о конвекции в цилиндрической трубе  $Ra = 452,0$  (Гершуни, Жуховицкий, 1972; Матвеев, 2000), но следует иметь в виду, что это последнее есть точное решение задачи, относящееся к точной собственной функции, а в нашей постановке предполагается, что радиальные распределения всех полей представлены одной лишь функцией Бесселя нулевого порядка. То есть собственное значение

в нашей постановке не обязано совпадать с точным собственным значением (Гершуни, Жуховицкий, 1972; Матвеев, 2000). Таким образом, получаем, что в случае отсутствия силы Кориолиса  $\Omega = 0$  и нелинейной добавки  $\alpha = 0$  при некоторых значениях параметров система (47), (49) приближённо описывает стационарное решение задачи о конвекции в цилиндрической полости. Если число Рэлея превышает критическое, то решение будет неустойчивым, если число Рэлея меньше критического, то решение будет устойчивым (рис. 4).

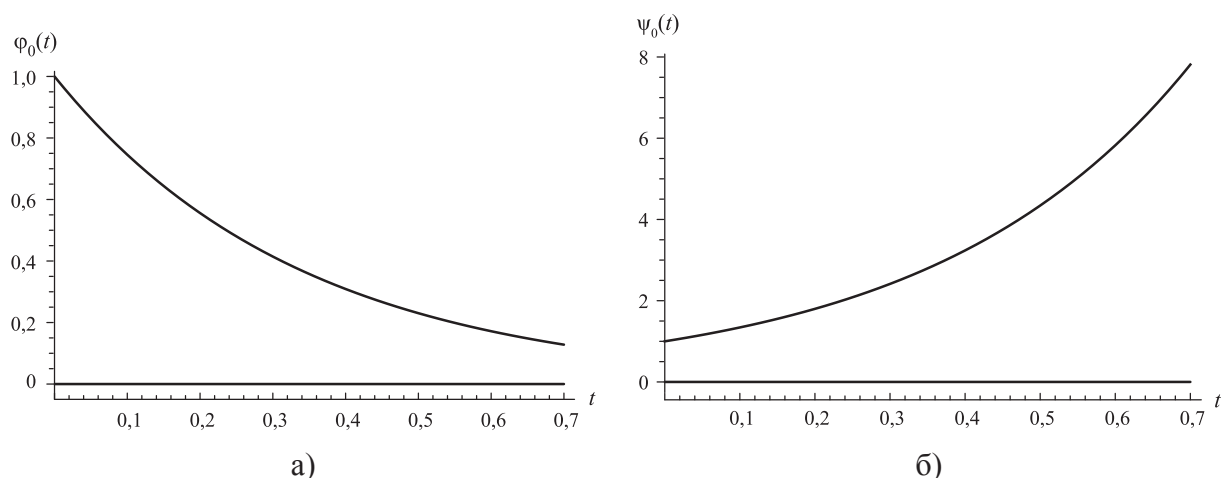


Рис. 4. Зависимость амплитуды потенциала полоидального поля скорости от времени в случае отсутствия силы Кориолиса  $\Omega = 0$  и нелинейной добавки, параметризующей выделение скрытой теплоты конденсации водяного пара  $\alpha = 0$  для числа Рэлея: а) – устойчивого; б) – неустойчивого

Рассмотрим решения системы (47)–(50) в условиях отсутствия нелинейной добавки, параметризующей выделение скрытой теплоты конденсации водяного пара в цилиндрической полости  $\alpha = 0$ , но с учётом силы Кориолиса. Мы должны получить решения, затухающие со временем, поскольку известно, что сила Кориолиса сама по себе не совершает работы и не может приводить к неустойчивости. Для численных расчётов системы (47)–(50) примем численные значения параметров:  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,  $\beta = 1/273 \text{ 1/К}$ ,  $A = 0,001 \text{ К/м}$ ,  $r_0 = 30 \text{ м}$ ,  $\nu = 2 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Omega = 0,001 \text{ 1/с}$ ,  $\alpha = 0$ . В этом случае решение должно быть устойчивым (рис. 5, б).

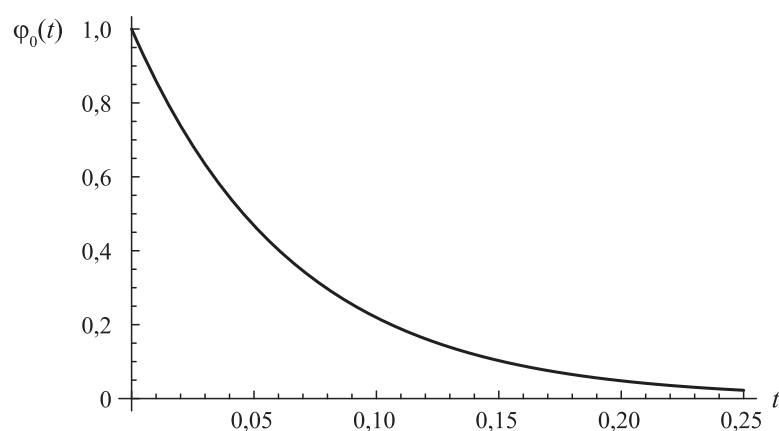


Рис. 5. Зависимость амплитуды потенциала полоидального поля скорости от времени в условиях отсутствия нелинейной неустойчивости

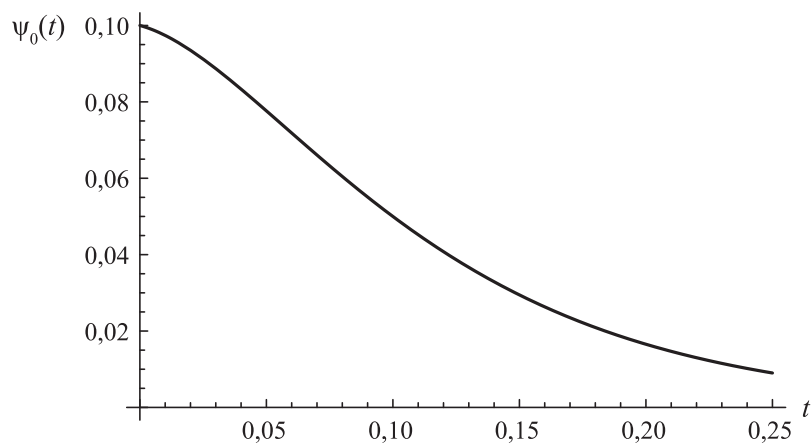


Рис. 6. Зависимость амплитуды потенциала тороидального поля скорости от времени в условиях отсутствия нелинейной неустойчивости

Учтём нелинейную добавку, параметризующую выделение скрытой теплоты конденсации водяного пара  $\alpha = -0,1 \text{ K}/(\text{м}/\text{с})$ . Учёт добавки  $\alpha$  при тех же параметрах приводит к неустойчивости (рис. 7, 8).

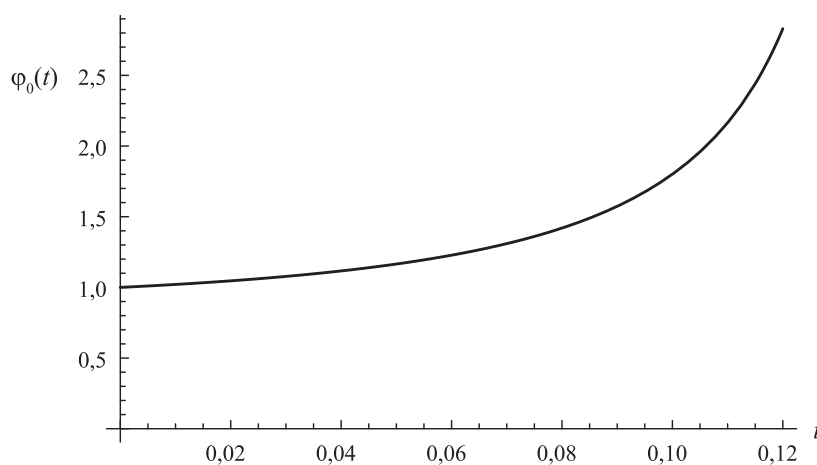


Рис. 7. Зависимость амплитуды потенциала полоидального поля скорости от времени в условиях наличия нелинейной неустойчивости

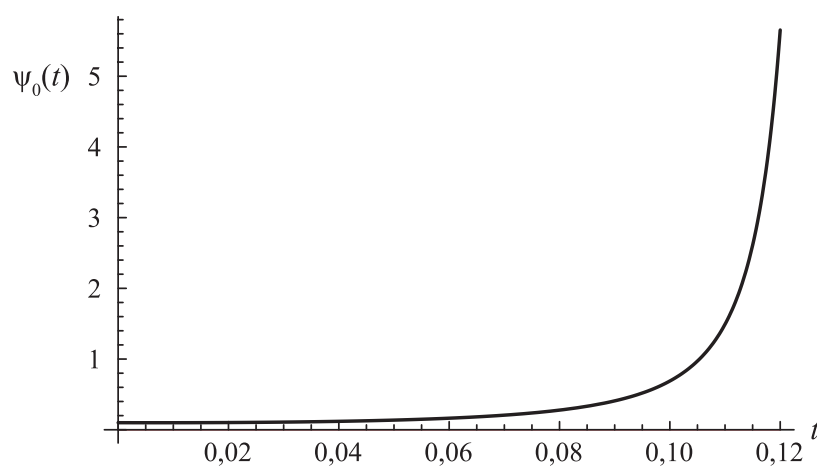


Рис. 8. Зависимость амплитуды потенциала тороидального поля скорости от времени в условиях наличия нелинейной неустойчивости

Таким образом, в работе получено, что учёт выделения скрытой теплоты конденсации водяного пара в атмосфере при вертикальных движениях воздуха приводит к нелинейной неустойчивости. Эта неустойчивость хорошо описывает начальную стадию развития смерча, особенно на этапе появления трубообразного облака.

## Литература

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 320 с.
2. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. Применение функции Ламберта и её применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП «РФЯЦ ВНИИЭФ», 2006. 160 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1986. 586 с.
4. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы. СПб: Гидрометеоздат, 2000. 779 с.
5. Atkins N.T., Glidden E.M., Nicholson T.M. Observations of Wall Cloud Formation in Supercell Thunderstorms during VORTEX2 // Monthly Weather Review. 2014. V. 142. No. 12. P. 4823–4838.
6. Bluestein H.B. High-Based Funnel Clouds in the Southern Plains // Monthly Weather Review. 1994. V. 122. No. 11. P. 2631–2638.
7. Bluestein H.B. More Observations of Small Funnel Clouds and Other Tubular Clouds // Monthly Weather Review. 2005. V. 133. No. 12. P. 3714–3720.
8. Bluestein H.B. A Funnel Cloud in a Convective Cloud Line to the Rear of a Surface Cold Front // Monthly Weather Review. 2008. V. 136. No. 7. P. 2786–2795.
9. Clark T.L., Hall W.D., Kerr R.M., Middleton D., Radke L., Ralph F.M., Neiman P.J., Levinson D. Origins of Aircraft-Damaging Clear-Air Turbulence during the 9 December 1992 Colorado Downslope Windstorm: Numerical Simulations and Comparison with Observations // J. Atmospheric Sciences. 2000. V. 57. No. 8. P. 1105–1131.
10. Cooley J.R. Cold Air Funnel Clouds // Monthly Weather Review. 1978. V. 106. No. 9. P. 1368–1372.
11. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function // Advances Computational Mathematics. 1996. V. 5. P. 329–359.
12. Emanuel K.A. Atmospheric convection. Oxford: Oxford University Press, 1994.
13. Houze Jr. R.A. Clouds in Tropical Cyclones // Monthly Weather Review. 2010. V. 138. No. 2. P. 293–344.
14. Ooyama K.V. A Thermodynamic Foundation for Modeling the Moist Atmosphere // J. Atmospheric Sciences. 1990. V. 47. No. 21. P. 2580–2593.
15. Ooyama K.V. A Dynamic and Thermodynamic Foundation for Modeling the Moist Atmosphere with Parameterized Microphysics // J. Atmospheric Sciences. 2001. V. 58. No. 15. P. 2073–2102.
16. Rutkevich P.B. Hydrodynamic motions of saturated air in terms of equilibrium thermodynamics // Electromagnetic phenomena. 1998. V. 1. No. 4. P. 538–544.
17. Rutkevich P.B. Convective and rotational instability in moist air // Physica A. 2002. V. 315. No. 1–2. P. 215–221.
18. Tanamachi R.L., Bluestein H.B., Moore S.S., Madding R.P. Infrared Thermal Imagery of Cloud Base in Tornadoic Supercells // J. Atmospheric and Oceanic Technology. 2006. V. 23. No. 11. P. 1445–1461.
19. Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. Some applications of the Lambert W function to physics // Canadian J. Physics. 2000. V. 78. P. 823–831.

## On relations between form and intensity of tornado funnel cloud

P.B. Rutkevich<sup>1</sup>, P.P. Rutkevych<sup>2</sup>, N.Yu. Komarova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia  
E-mails: pbrutkevich@gmail.com; nata.komarova@asp.iki.rssi.ru

<sup>2</sup>Institute of High Performance Computing, A\*STAR, Singapore  
E-mail: pbrutkevich@gmail.com

The problem of a vortex perturbation development of a tornado funnel cloud type in axially symmetric geometry with Coriolis force is considered. The model takes into account the vertical profile dependence on the upward velocity field. This dependence parameterizes water latent heat release that always exists in the atmosphere. So, the nonlinear

problem is considered having a limiting process to the usual convection or internal waves depending on the vertical temperature gradient sign. The funnel cloudiness is guaranteed by the vertical inhomogeneity of the vortex column radius, so in the first approximation it comes down to a conical vortex. Solution dynamics is obtained on the basis of Cauchy problem with chosen initial conditions. We demonstrate that in this set up the problem has linear stable solutions (internal waves) when the vertical temperature profile is convectively stable and linear unstable solutions (convection) when the vertical temperature profile is unstable. But the existence of nonlinearity can provide nonlinear solutions even if the vertical temperature profile is convectively stable.

**Keywords:** funnel cloud, latent heat, Cauchy problem, unstable solutions

Accepted: 05.10.2016

DOI: 10.21046/2070-7401-2016-13-6-159-171

## References

1. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M., *Konvektivnaya ustoychivost' neshimaemoy zhidkosti* (Convective Stability of Incompressible Fluids), Moscow: Nauka, 1972, 320 p.
2. Dubinov A.E., Dubinova I.D., Saikov S.K. *Primenenie funktsii Lamberta i ee primeneniye v matematicheskikh zadachakh fiziki* (Precise Solution of the Problem of Propagation of the Combustion Wave), Sarov: FGUP "RFYaTs VNIIEF", 2006, 160 p.
3. Landau L.D., Lifshits E.M., *Teoreticheskaya fizika. Tom 5. Statisticheskaya fizika. Ch. 1* (Theoretical physics. Vol. 5. Statistical Physics. Part 1), Moscow: Nauka, 1986, 586 p.
4. Matveev L.T., *Fizika atmosfery* (Physics of Atmosphere), Saint Petersburg: Gidrometeoizdat, 2000, 779 p.
5. Atkins N.T., Glidden E.M., Nicholson T.M., Observations of Wall Cloud Formation in Supercell Thunderstorms during VORTEX2, *Monthly Weather Review*, 2014, Vol. 142, No. 12, pp. 4823–4838.
6. Bluestein H.B., A Funnel Cloud in a Convective Cloud Line to the Rear of a Surface Cold Front, *Monthly Weather Review*, 2008, Vol. 136, No. 7, pp. 2786–2795.
7. Bluestein H.B., High-Based Funnel Clouds in the Southern Plains, *Monthly Weather Review*, 1994, Vol. 122, No. 11, pp. 2631–2638.
8. Bluestein H.B., More Observations of Small Funnel Clouds and Other Tubular Clouds, *Monthly Weather Review*, 2005, Vol. 133, No. 12, pp. 3714–3720.
9. Clark T.L., Hall W.D., Kerr R.M., Middleton D., Radke L., Ralph F.M., Neiman P.J., Levinson D., Origins of Aircraft-Damaging Clear-Air Turbulence during the 9 December 1992 Colorado Downslope Windstorm: Numerical Simulations and Comparison with Observations, *J. Atmospheric Sciences*, 2000, Vol. 57, No. 8, pp. 1105–1131.
10. Cooley J.R., Cold Air Funnel Clouds, *Monthly Weather Review*, 1978, Vol. 106, No. 9, pp. 1368–1372.
11. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E., On the Lambert W function, *Advances Computational Mathematics*, 1996, Vol. 5, pp. 329–359.
12. Emanuel K.A., *Atmospheric convection*, Oxford: Oxford University Press, 1994.
13. Houze Jr. R.A., Clouds in Tropical Cyclones, *Monthly Weather Review*, 2010, Vol. 138, No. 2, pp. 293–344.
14. Ooyama K.V., A Thermodynamic Foundation for Modeling the Moist Atmosphere, *J. Atmospheric Sciences*, 1990, Vol. 47, No. 21, pp. 2580–2593.
15. Ooyama K.V., A Dynamic and Thermodynamic Foundation for Modeling the Moist Atmosphere with Parameterized Microphysics, *J. Atmospheric Sciences*, 2001, Vol. 58, No. 15, pp. 2073–2102.
16. Rutkevich P.B., Convective and rotational instability in moist air, *Physica A*, 2002, Vol. 315, No. 1–2, pp. 215–221.
17. Rutkevich P.B., Hydrodynamic motions of saturated air in terms of equilibrium thermodynamics, *Electromagnetic phenomena*, 1998, Vol. 1, No. 4, pp. 538–544.
18. Tanamachi R.L., Bluestein H.B., Moore S.S., Madding R.P., Infrared Thermal Imagery of Cloud Base in Tornadic Supercells, *J. Atmospheric and Oceanic Technology*, 2006, Vol. 23, No. 11, pp. 1445–1461.
19. Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M., Some applications of the Lambert W function to physics, *Canadian J. Physics*, 2000, Vol. 78, pp. 823–831.