Метод сокращения времени передачи многоразрядных цифровых изображений с беспилотных летательных аппаратов

Е.П. Петров, Н.Л. Харина, Е.Д. Ржаникова

Вятский государственный университет, Киров, 610000, Россия E-mail: eppetrov@mail.ru

Большой объем информации в системах ДЗЗ передается с мини или микро беспилотных летательных аппаратов с ограниченными энергетическими ресурсами. Одним из основных требований является передача многоразрядных цифровых изображений (МЦИ) высокого разрешения в реальном масштабе времени без искажений. Применение известных методов компрессии МЦИ, требующих большое количество вычислений на борту летательного аппарата, недопустимо из-за ограниченных энергетических ресурсов. В работе предлагается прямая передача МЦИ многопозиционными фазоманипулированными (МФМ) сигналами, недостатком которых являются потери помехоустойчивости приема на 3дБ при каждом делении фазы МФМ сигналов на два. Предложен метод компенсации потерь помехоустойчивости приема МФМ сигналов, реализующий статистическую избыточность, обусловленную корреляцией между пикселями МЦИ. Исследования показали, что при делении фазы МФМ сигналов на 4 время передачи МЦИ сокращается в два раза без потерь помехоустойчивости, а при делении фазы на 8 – в три раза с компенсацией потерь помехоустойчивости, близкой к допустимой. Дальнейшее сокращение времени передачи МЦИ делением фазы МФМ сигналов на 16 и более нецелесообразно из-за невозможности компенсации потерь помехоустойчивости, ограниченной конечной величиной статистической избыточности в МЦИ. Наибольшая компенсация потерь помехоустойчивости за счет применения МФМ сигналов достигается при малых отношениях «сигнал/шум» по мощности не более -3дБ на входе радиоприемного устройства

Ключевые слова: математические модели цифровых изображений, мини беспилотный летательный аппарат, многоразрядные цифровые изображения, цепи Маркова с несколькими состояниями, алгоритм двумерной нелинейной фильтрации, многопозиционные фазоманипулированные сигналы

Одобрена к печати: 13.01.2017 DOI: 10.21046/2070-7401-2017-14-1-71-79

Введение

При разработке систем дистанционного зондирования Земли (Д33) широко используются методы помехоустойчивого кодирования, позволяющие значительно повысить качество и достоверность передаваемой по радиоканалу информации (Золотарев, Овечкин, 2004). Использование методов предобработки (сжатия), таких как JPEG, JPEG2000, фрактальный и рекурсивный алгоритмы (Гонсалес, Вудс, 2005), позволяют без визуальных потерь сжать передаваемую информацию в 2–3 раза. Однако при построении систем на мини и микро беспилотных летательных аппаратах (МБЛА) с ограниченными временными и энергетическими ресурсами использование перечисленных методов сжатия многоразрядных цифровых изображений (МЦИ) трудно реализуемо, так как все они базируются на спектральных или вейвлет-преобразованиях, которые требуют значительных временных и энергетических ресурсов. Поэтому для решения задачи сокращения времени передачи МЦИ без искажений в реальном масштабе времени требуются методы с минимальными вычислительными затратами.

Предлагается метод сокращения времени передачи МЦИ в ДЗЗ на МБЛА – передача МЦИ без предобработки многопозиционными фазоманипулированными (МФМ) или многочастотными (МЧМ) сигналами, без искажений МЦИ на борту МБЛА. При этом необходимо помнить, что при передаче МЦИ МФМ сигналами помехоустойчивость приема МЦИ снижается по мощности на 3дБ при каждом делении на два фазы МФМ сигналов. Увеличение мощности передатчика на борту МБЛА для компенсации потерь помехоустойчивости приема МФМ сигналов практически исключено из-за ограниченных энергетических ресурсов.

В работе предлагается метод компенсации потерь помехоустойчивости, вызванных применением МФМ сигналов, не требующий дополнительных энергетических затрат на борту МБЛА и не вносящий дополнительную избыточность. Метод основан на эффективной реализации статистической избыточности (СИ) оригинала МЦИ, обусловленной пространственной и междуразрядной корреляциями пикселей в МЦИ. Сложность решения данной задачи заключается в поиске и разработке метода преобразования МЦИ для передачи МФМ сигналами и метода эффективной реализации СИ оригинала МЦИ. По своим статистическим характеристикам МЦИ, полученные средствами ДЗЗ, хорошо аппроксимируются двумерными цепями Маркова с несколькими состояниями. Для разработки указанных методов целесообразно выбрать в качестве математической основы теорию условных марковских процессов с дискретными аргументами (Стратонович, 1960; Амиантов, 1971; Кемени, Снелл, Кнепп, 1987).

Постановка задачи

Для реализации СИ МЦИ требуется разработать математические модели (ММ) преобразованных МЦИ, адекватные реальным МЦИ (Петров, Трубин, Харина, 2005), и на их основе алгоритмы нелинейной фильтрации МЦИ, обеспечивающие полную или частичную компенсацию потерь помехоустойчивости приема МЦИ, переданных МФМ сигналами при наличии белого гауссовского шума (БГШ) (Петров, Трубин, Харина, 2005; Петров, Харина, Ржаникова, 2013).

Математическая модель МЦИ, состоящих из ГРЦИ

Пусть оригинал *g*-разрядного МЦИ состоит из $g(g \ge 8)$ разрядных двоичных изображений (РДИ) (*рис. 1*), ММ которых является двумерной цепью Маркова с двумя равновероятными ($p_1 = p_2$) состояниями (Петров, Трубин, Харина, 2005). Будем полагать, что РДИ соответствует минимальной градации яркости МЦИ, для передачи которой применяются бинарные фазоманипулированные (ФМ) сигналы. Преобразуем МЦИ, состоящие из РДИ, в МЦИ, состоящие из групповых разрядных цифровых изображений (ГРЦИ). Для этого объединим в МЦИ *k* соседних РДИ в ГРЦИ с 2^k градациями яркости. Например, если ГРЦИ состоит из двух соседних РДИ, то 8-разрядное МЦИ будет состоять из четырех ГРЦИ (*рис. 2*) (Петров, Харина, Ржаникова, 2013), при этом время передачи МЦИ сократится в два раза. ММ ГРЦИ с двумя РДИ является цепью Маркова с 2^k = 4 состоя-

ниями. Если увеличить число РДИ в ГРЦИ, то время прямой передачи МЦИ сократится в число раз, равное числу РДИ в ГРЦИ, а ММ ГРЦИ будет являться цепью Маркова с $2^k = 8$ состояниями. Преобразование МЦИ, состоящего из РДИ, в МЦИ, состоящее из ГРЦИ, не требует вычислительных операций и не искажает оригинал МЦИ на борту МБЛА.

Для демонстрации метода сокращения времени прямой передачи оригинала МЦИ будем полагать, что ГРЦИ состоит из двух РДИ (*puc. 2*).



Рис. 1. Представление МЦИ в виде набора РДИ



Рис. 2. Объединение двух РДИ в ГРЦИ

По аналогии с ММ РДИ, являющейся двумерной цепью Маркова с двумя равновероятными $(p_1 = p_2)$ состояниями, ММ ГРЦИ является двумерной цепью Маркова (Петров, Харина, Ржаникова, 2013) (*puc. 3*), каждый пиксель которого формируется на основе суперпозиции двух одномерных ортогональных цепей Маркова с N = 4 равновероятными $(p_1 = p_2 = p_3 = p_4)$ состояниями $M_i (i \in N)$ и матрицами вероятностей перехода из состояния M_i в состояние $M_j (i, j \in N)$ (*рис. 4*) по горизонтали ¹П и по вертикали ²П соответственно:

$${}^{1}\Pi = \left\| {}^{1}\pi_{ij} \right\|_{4\times4}, \quad {}^{2}\Pi = \left\| {}^{2}\pi_{ij} \right\|_{4\times4}, \tag{1}$$

удовлетворяющих условию нормировки $\sum_{i=1}^{N} {}^{k} \pi_{ij} = 1, j \in N, k = \overline{1, 2}$ и стационарности

 $p_i = \sum_{j=1}^{N} p_j^{\ k} \pi_{ji}^*; i \in N, \ k = \overline{1,2}, \$ где $\ ^k \pi_{ji}^* -$ элементы транспонированных матриц (1).

Если условная зависимость пикселей на ММ ГРЦИ (*puc. 3*) определена от левого верхнего сегмента ММ ГРЦИ, то пиксель $M_{i,j}$ ($i \in m, j \in n$) зависит только от случайных элементов некоторого подмножества $\Lambda_{i,j}$ этого сегмента (*puc. 3*), называемого окрестностью. Лучшим образом удовлетворяющее условию каузальности является конфигурация окрестности (*puc. 4*) $\Lambda_{i,j} = \{M_{i,j-1}, M_{i-1,j}, M_{i-1,j-1}\}$ (Петров, Харина, Ржаникова, 2013).

Вероятность состояния пикселя v₄ (*puc. 4*) полностью определяется матрицей вероятностей перехода (Петров, Трубин, Харина, 2005):

$$\Pi = \begin{vmatrix} \pi_{iii} & \pi_{iji} & \pi_{iki} & \pi_{ili} & \pi_{jii} & \pi_{jii} & \pi_{jii} & \pi_{jki} & \pi_{jli} & \pi_{kii} & \pi_{kii} & \pi_{kii} & \pi_{kli} & \pi_{lii} & \pi_{lji} & \pi_{lki} & \pi_{lli} \\ \pi_{iij} & \pi_{ijj} & \pi_{ikj} & \pi_{ilj} & \pi_{jij} & \pi_{jij} & \pi_{jkj} & \pi_{jlj} & \pi_{kij} & \pi_{kjj} & \pi_{kkj} & \pi_{klj} & \pi_{lij} & \pi_{ljj} & \pi_{lkj} & \pi_{llj} \\ \pi_{iik} & \pi_{ijk} & \pi_{ikk} & \pi_{ilk} & \pi_{jik} & \pi_{jkk} & \pi_{jlk} & \pi_{jlk} & \pi_{kik} & \pi_{kik} & \pi_{kkk} & \pi_{klk} & \pi_{lik} & \pi_{lik} & \pi_{llk} \\ \pi_{iil} & \pi_{ijl} & \pi_{ikl} & \pi_{ill} & \pi_{jil} & \pi_{jjl} & \pi_{jkl} & \pi_{jll} & \pi_{kil} & \pi_{kjl} & \pi_{kll} & \pi_{kll} & \pi_{lil} & \pi_{ljl} & \pi_{lll} \\ \end{vmatrix}$$

Элементы матрицы П (2) связаны с элементами матриц (1) следующими соотношениями:

$$\pi_{iii} = \frac{{}^{1}\pi_{ii} \cdot {}^{2}\pi_{ii}}{{}^{3}\pi_{ii}}, \quad \pi_{iij} = \frac{{}^{1}\pi_{ij} \cdot {}^{2}\pi_{ij}}{{}^{3}\pi_{ii}}, \quad \pi_{iik} = \frac{{}^{1}\pi_{ik} \cdot {}^{2}\pi_{ik}}{{}^{3}\pi_{ii}}, \quad \pi_{iil} = \frac{{}^{1}\pi_{il} \cdot {}^{2}\pi_{il}}{{}^{3}\pi_{ii}}, \quad \pi_{iil} = \frac{{}^{1}\pi_{il} \cdot {}^{2}\pi_{il}}{{}^{3}\pi_{ii}}, \quad \pi_{iil} = \frac{{}^{1}\pi_{il} \cdot {}^{2}\pi_{il}}{{}^{3}\pi_{ii}}, \quad \pi_{iil} = \frac{{}^{1}\pi_{il} \cdot {}^{2}\pi_{il}}{{}^{3}\pi_{il}}, \quad \pi_{ill} = \frac{{}^{1}\pi_{il} \cdot {}^{2}\pi_{ll}}{{}^{3}\pi_{ll}}, \quad \pi_{ill} = \frac{{}^{1}\pi_{il} \cdot {}^{3}\pi_{ll}}{{}^{3}\pi_{ll}}, \quad \pi_{il} = \frac{{}^$$

где ${}^{3}\pi_{ii}$ – элементы дополнительной матрицы ${}^{3}\Pi = {}^{1}\Pi \times {}^{2}\Pi'$.

Для оценки адекватности математической модели построено 1000 искусственных изображений размером 2000 × 2000 с заданными значениями матриц вероятностей перехода по горизонтали и вертикали и получены их оценочные значения. Погрешность усредненных вычисленных оценок матриц вероятностей перехода не превышает 0,21%. Оценки элементов матриц являются не смещенными и асимптотически стремятся к истинным значениям с увеличением статистики (Петров, Харина, Ржаникова, 2013).

Синтез алгоритма двумерной нелинейной фильтрации ГРЦИ из двух и трех РДИ

Систему уравнений двумерной нелинейной фильтрации МЦИ, состоящего из ГРЦИ с двумя РДИ, передаваемых МФМ сигналами, представим в виде (Петров, Харина, Ржаникова, 2015):

$$u_{1(k+1)}(v_{4}) = \left[f\left(M_{1}(v_{4})\right) - f\left(M_{4}(v_{4})\right) \right] + u_{1(k)}(v_{1}) + z_{1}\left(u(v_{1}), {}^{1}\pi_{ij}\right) + u_{1(k)}(v_{2}) + z_{1}\left(u(v_{2}), {}^{2}\pi_{ij}\right) - u_{1(k)}(v_{3}) - z_{1}\left(u(v_{3}), {}^{3}\pi_{ij}\right) \right] \\ u_{2(k+1)}(v_{4}) = \left[f\left(M_{2}(v_{4})\right) - f\left(M_{4}(v_{4})\right) \right] + u_{2(k)}(v_{1}) + z_{2}\left(u(v_{1}), {}^{1}\pi_{ij}\right) + u_{2(k)}(v_{2}) + z_{2}\left(u(v_{2}), {}^{2}\pi_{ij}\right) - u_{2(k)}(v_{3}) - z_{2}\left(u(v_{3}), {}^{3}\pi_{ij}\right) \right] \\ u_{3(k+1)}(v_{4}) = \left[f\left(M_{3}(v_{4})\right) - f\left(M_{4}(v_{4})\right) \right] + u_{3(k)}(v_{1}) + z_{3}\left(u(v_{1}), {}^{1}\pi_{ij}\right) + u_{3(k)}(v_{2}) + z_{3}\left(u(v_{2}), {}^{2}\pi_{ij}\right) - u_{3(k)}(v_{3}) - z_{3}\left(u(v_{3}), {}^{3}\pi_{ij}\right) \right]$$

$$(3)$$

где $u_j(v_4) = \ln\left[\frac{p_j(v_4)}{p_4(v_4)}\right] (j = \overline{1,3}); \quad p_j(v_4)(j = \overline{1,4}) -$ апостериорная вероятность со-

стояния дискретного параметра МФМ сигнала в пикселе v_4 ММ ГРЦИ (*рис. 4*); $f(M_j(v_4)) - f(M_4(v_4))(j = \overline{1,3})$ – разность логарифмов функции правдоподобия состояний дискретного параметра МФМ сигнала в пикселе v_4 ГРЦИ; $z_j(\cdot)$ – нелинейная функция вида:

$$z_{j}\left(u(v_{l}), {}^{l}\pi_{ij}\right) = \ln\left[\frac{\sum_{i=1, i\neq j}^{3} \left\{\exp\left(u_{i}(v_{l}) - u_{j}(v_{l})\right)^{l}\pi_{ij}\right\} + \exp\left(-u_{j}(v_{l})\right)^{l}\pi_{4j} + \pi_{jj}}{\sum_{i=1}^{3} \left\{\exp\left(u_{i}(v_{l})\right)^{l}\pi_{i4}\right\} + \pi_{44}}\right], \left(j, l = \overline{1, 3}\right). \quad (4)$$

Вся априорная информация о статистической зависимости состояний цепи Маркова сосредоточена в слагаемых вида (4), где ${}^{l}\pi_{ij}(i, j = \overline{1,3}, l = \overline{1,3})$ – элементы МВП пикселей МЦИ по горизонтали ¹П, вертикали ²П и диагонали ³П соответственно.

В качестве критерия различения состояний элементов МЦИ примем критерий максимума логарифма отношения апостериорных вероятностей $u_j(v_4)$, в соответствии с которым если $u_j(v_4) > u_i(v_4)$, $i, j = \overline{1,3}$; $i \neq j$, то принимается решение о состоянии элемента изображения $v_4 = M_j$; если все значения $u_j(v_4) \le 0$ ($j = \overline{1,3}$), то принимается решение о состоянии элемента изображения $v_4 = M_4$.

Анализ результатов исследования метода сокращения времени передачи МЦИ

Для демонстрации предложенного метода проведено цифровое моделирование процесса нелинейной фильтрации реального и искусственного МЦИ с одинаковыми статистическими характеристиками, состоящих из ГРЦИ с двумя РДИ при отношении «сигнал/ шум» по мощности сигнала на входе нелинейного фильтра – 6 дБ. На *рис. 5а,е* показаны исходные 8-разрядные МЦИ размером 2000×3000 пикселей, представленные набором из четырех ГРЦИ, каждое из которых включает по два соседних РДИ. На *рис. 56,д* представлены искаженные МЦИ, на *рис. 5в,е* — восстановленные МЦИ. В качестве оценки качества взят критерий среднеквадратической ошибки (СКО).



а) исходное реальное МЦИ



б) искаженное реальное МЦИ, СКО=4815



в) восстановленное реальное МЦИ, СКО=1175



г) исходное искусственное МЦИ



д) искаженное искусственное МЦИ, СКО=4796



е) восстановленное искусственное МЦИ, СКО=1257

Рис. 5. Пример нелинейной фильтрации реального и искусственного МЦИ, переданных МФМ сигналами

Для сравнения полученных результатов проведено цифровое моделирование алгоритма двумерной нелинейной фильтрации 8-разрядных МЦИ, передаваемых бинарными ФМ сигналами. Результаты фильтрации для тестового МЦИ (*puc. 5a*) приведены на *puc. 6* – искаженное (*puc. 6a*) и восстановленное (*puc. 6б*) МЦИ.



а) искаженное МЦИ, СКО=4362 б) восстановленное МЦИ, СКО=1194 Рис. 6. Пример нелинейной фильтрации реального МЦИ, переданного бинарными сигналами

Анализ результатов показывает, что, несмотря на снижение помехоустойчивости, возникающее вследствие применения МФМ сигналов, потери помехоустойчивости полностью скомпенсированы за счет реализации статистической избыточности МЦИ. Время передачи сократилось в два раза по сравнению с прямой передачей МЦИ бинарными ФМ сигналами. Потери помехоустойчивости приема МЦИ, состоящих из ГРЦИ, полностью скомпенсированы реализацией статистической избыточности МЦИ.

Для оценки эффективности и целесообразности объединения в ГРЦИ трех соседних РДИ проведено моделирование двумерной нелинейной фильтрации МЦИ, состоящих из ГРЦИ, передаваемых МФМ сигналами с делением фазы на восемь, и независимых РДИ (Петров, Харина, Ржаникова, 2015), передаваемых бинарными ФМ сигналами при одинаковом отношении «сигнал/шум» на входе приемного устройства (0 дБ). В качестве исходного взято 9-разрядное МЦИ размером 3072×2048 пикселей (http://imagecompression.info/ test images/), состоящее из трех ГРЦИ, включающих по три соседних РДИ (*puc.* 7).



Рис. 7. Исходное 9-разрядное МЦИ

На *рис. 8а,б* показаны фрагменты искаженного и восстановленного изображений, передаваемых МФМ сигналами. Результаты нелинейной фильтрации для тестового изображения, передаваемого бинарными ФМ сигналами, представлены на *рис. 8в,г.* Для оценки качества восстановления используется метрика СКО. *Рис. 8а,в* показывают снижение помехоустойчивости от деления фазы МФМ сигналов на 6 дБ на входе нелинейного фильтра, на *рис. 8б,с* можно видеть, что потери помехоустойчивости удалось полностью скомпенсировать нелинейной фильтрацией МФМ сигналов.



а) искаженное МЦИ, СКО=20045





в) искаженное МЦИ, СКО=3712



б) восстановленное МЦИ, СКО=1327 г) восстановленное МЦИ, СКО=1294 Рис. 8. Пример нелинейной фильтрации 9-разрядного ЦИ

Время передачи МЦИ, состоящих из ГРЦИ с тремя РДИ, сократилось в три раза с полной компенсацией потерь помехоустойчивости приема МЦИ, переданных МФМ сигналами.

Сокращение времени передачи МЦИ МФМ сигналами существенно зависит от степени корреляции между РДИ в МЦИ, т.е. чем больше корреляция между РДИ, тем больше компенсация потерь в помехоустойчивости приема МЦИ МФМ сигналами и тем меньше времени требуется для передачи оригинала МЦИ за счет объединения большого числа РДИ в ГРЦИ. Наибольшая компенсация потерь помехоустойчивости за счет применения МФМ сигналов достигается при малых отношениях «сигнал/шум» по мощности не более -3дБ на входе радиоприемного устройства.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию №2014/61.

Литература

- 1. Амиантов И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи. М.: Сов. радио, 1971. 416 с.
- 2. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
- 3. Золотарев В.В., Овечкин Г.В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы. М.: Горячая линия Телеком, 2004. 126 с.
- 4. Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.У. Счетные цепи Маркова. М.: Наука Гл. ред. ФМЛ, 1987. 416 с.
- Петров Е.П., Трубин И.С., Харина Н.Л. Математическая модель двумерного цифрового полутонового изображения марковского типа // Вестник ВНЦ Верхне-Волжского отделения АТН РФ, серия «Проблемы обработки информации», Нижний Новгород. 2005. № 1 (6). С. 41–46.

- 6. Петров Е.П., Харина Н.Л., Ржаникова Е.Д. Математическая модель цифровых полутоновых изображений на основе цепей Маркова с несколькими состояниями // Нелинейный мир. 2013. Т. 11. № 7. С. 487-492.
- 7. Петров Е.П., Харина Н.Л., Ржаникова Е.Д. Нелинейная обработка многоразрядных цифровых полутоновых изображений в системах дистанционного зондирования Земли // Нелинейный мир. 2015. Т. 13. № 6. C. 18–23.
- Стратонович Р.Л. Условные процессы Маркова // Теория вероятностей и ее применение. 1960. Т. 5. № 2. 8. C. 172–195.

Method of reducing transmission time of high-resolution digital images from unmanned aerial vehicles

E.P. Petrov, N.L. Kharina, E.D. Rzhanikova

Vyatka State University, Kirov 610000, Russia *E-mail: eppetrov@mail.ru*

Large amount of information in remote sensing systems is transferred with mini or micro unmanned aerial vehicles with limited energy resources. One of the main requirements is the distortionless transmission of high-resolution multi-bit digital images (MDI) in a real time scale. The use of well-known MDI compression methods requiring large amount of computation on board the aircraft is virtually impossible due to the limited energy resources. In this paper the transmission of MDIs by multiposition phase-shift keyed (MPSK) signals is proposed. Its disadvantage is a decrease of receiving noise immunity by 3 dB at each division of a phase of MPSK signals in two. A method of compensation of noise immunity losses of MPSK signals receiving is proposed. This method is based on effective utilizing of statistical redundancy caused by MDI pixels correlation. The research has shown that the use of quadrature phase-shift keyed (QSPK) signals reduces the MDI transmission time twice without the noise immunity losses compared to BPSK signals. The use of 8-PSK signals allows to reduce the MDI transmission time by three times and to compensate for the noise stability losses almost completely. The application of higher-order PSK signals to reduce the MDI transmission time is inadvisable due to the impossibility of the compensation of noise immunity losses because of limited amount of statistical redundancy in MDIs. The greatest compensation of noise stability losses due to application of MPSK signals is reached at low signal-to-noise ratio less than -3dB at the input of radio receiver.

Keywords: mathematical models of digital images, mini unmanned aerial vehicle, multi-bit digital image, the Markov chain with multiple states, the algorithm of two-dimensional nonlinear filtering, multiposition phase-shift keyed signals

> Accepted: 13.01.2017 DOI: 10.21046/2070-7401-2017-14-1-71-79

References

- Amiantov I.N., Izbrannye voprosy statisticheskoi teorii svyazi (Selected Questions of the Statistical Theory of 1 Communication), Moscow: Sov. radio, 1971, 416 p.
- Gonsales R., Vuds R., Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii (Digital Image Processing), Moscow: Tekhnosfera, 2
- 2005, 1072 p. Zolotarev V.V., Ovechkin G.V., *Pomekhoustoichivoe kodirovanie. Metody i algoritmy* (Error-Correction Coding. 3 Methods and Algorithms), Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2004, 126 p.
- 4 Kemeni Dzh., Snell Dzh., Knepp A.U., Schetnye tsepi Markova (Countable Markov Chains), Moscow: Nauka, 1987, 416 p.
- Petrov E.P., Trubin I.S., Kharina N.L., Matematicheskaya model' dvumernogo tsifrovogo polutonovogo 5. izobrazheniya markovskogo tipa (Mathematical Model of Two-dimensional Digital Halftone Images of Markovian Type), Vestnik VNTs Verkhne-Volzhskogo otdeleniya ATN RF, seriya "Problemy obrabotki informatsii", Nizhnii Novgorod, 2005, No. 1 (6), pp. 41-46.
- Petrov E.P., Kharina N.L., Rzhanikova E.D., Matematicheskaya model' tsifrovykh polutonovykh izobrazhenii na 6 osnove tsepei Markova s neskol'kimi sostoyaniyami (Mathematical Model of Digital Halftone Images Based on Markov Chains with Several States), Nelineinyi mir, 2013, Vol. 11, No. 7, pp. 487–492.
- 7. Petrov E.P., Kharina N.L., Rzhanikova E.D., Nelineinaya obrabotka mnogorazryadnykh tsifrovykh polutonovykh izobrazhenii v sistemakh distantsionnogo zondirovaniya Zemli (Non-linear Processing of Multi-bit Digital Halftone Images in Systems of Remote Sensing of the Earth), Nelineinyi mir, 2015, Vol. 13, No. 6, pp. 18-23.
- 8 Stratonovich R.L., Uslovnye protsessy Markova (Conditional Markovian Processes), Teoriya veroyatnostei i ee primenenie, 1960, Vol. 5, No. 2. pp. 172-195.