

Численное решение задачи вариационной ассимиляции данных об уровне на жидкой (открытой) границе в модели гидротермодинамики Балтийского моря

Т. О. Шелопут

*Институт вычислительной математики имени Г. И. Марчука РАН
Москва, 119333, Россия
E-mail: sheloput@phystech.edu*

В настоящей работе приведены результаты численного решения задачи вариационной ассимиляции данных об уровне на жидкой (открытой) части границы в модели гидротермодинамики Балтийского моря. Под жидкими границами акватории подразумеваются границы раздела морей и океанов, а также проходящие по проливам, устьям рек и т. д. Задание граничных условий на жидких границах является важной проблемой современной геофизики. Одним из существующих методов, которые можно применить для учёта жидких границ в моделях, является использование вариационной ассимиляции данных наблюдений, в том числе информации об уровне. Так, имея данные наблюдений в некоторый момент времени, можно поставить обратную задачу о восстановлении потоков через открытую границу. В работе приведена постановка задачи вариационной ассимиляции данных об уровне на жидкой границе, сформулирован итерационный алгоритм её решения, а также некоторые выводы о сходимости алгоритма и разрешимости исходной задачи. Подробно рассмотрены результаты применения алгоритма к решению задачи моделирования гидротермодинамики Балтийского моря, а также вопрос о доступности данных наблюдений. Для ассимиляции были использованы данные спутниковой альтиметрии и наблюдений за уровнем моря на равномерных постах.

Ключевые слова: вариационная ассимиляция данных, жидкие границы, спутниковая альтиметрия, Балтийское море, численные методы, итерационные алгоритмы, методы сопряжённых уравнений, граничные условия, математическая модель

Одобрена к печати: 29.10.2018

DOI: 10.21046/2070-7401-2018-15-7-15-23

Введение

В настоящее время одним из бурно развивающихся направлений науки и технологий является математическое моделирование и создание систем мониторинга и прогнозирования отдельных акваторий (внутренних и окраинных морей, заливов, открытых акваторий океанов), Мирового океана и прибрежных территорий. Актуальность данной тематики обоснована необходимостью оценки антропогенных воздействий на морские территории, а также последствий таких воздействий, оперативного прогноза распространения загрязнения (например, нефтяного пятна) по поверхности моря, решения задач морской навигации, построения прогноза погоды и т. д. Для корректного воспроизведения физических явлений в отдельных акваториях требуются более мелкие масштабы пространственных сеток и учёт специфики рассматриваемой зоны. Для решения этих задач создаются региональные модели.

Разработчики региональных моделей неизбежно сталкиваются с проблемой постановки граничных условий на жидких границах. От задания этих условий напрямую зависит полученный результат как при долгосрочных расчётах, так и в задачах оперативного прогноза.

Существуют различные приближения, которые можно применить для задания граничных условий на жидких границах. Иногда используется приближение материальной границы: жидкая граница считается подвижной и на ней задаётся условие непротекания. В некоторых региональных моделях (в частности, в модели ROMS) используются адаптивные граничные условия (Marchesiello et al., 2001). В данном случае жидкая граница зафиксирована, и в каждой её точке в каждый момент времени по направлению фазовой скорости определяется принадлежность этой точки к «активной границе», т. е. в такой точке требуется явное задание

вычисляемого параметра (температуры, солёности, баротропной составляющей скорости), или же к «пассивной границе», для которой необходимо использование граничных условий типа «излучения», позволяющих возмущениям изнутри области свободно проходить через границу. От проблемы жидкой границы можно избавиться, проведя расчёт по всей акватории Мирового океана: на грубой сетке — вне рассматриваемой акватории, на более мелкой — внутри, при этом существенно возрастает размерность задачи, однако отсутствуют жидкие границы. Иногда результаты расчётов по всей акватории Мирового океана на грубой сетке используются в качестве граничных условий на жидкой границе. Развитием данных идей является «метод вложенных сеток» — с обратной связью, с неполной обратной связью и без обратной связи (Кубряков, 2004). Ещё одним распространённым приёмом является использование осреднённых данных о потоках через жидкую границу (Чернов, Толстик, 2014) или задание потоков с помощью данных наблюдений. Например, для задания баротропного потока через жидкую границу можно воспользоваться данными спутниковой альтиметрии (Мысленков, 2011). Одним из существующих методов, которые можно применить для учёта жидких границ в моделях, является использование *вариационной ассимиляции данных наблюдений*, в том числе *спутниковой альтиметрии*. Так, имея данные наблюдений в некоторый момент времени, можно поставить обратную задачу о восстановлении потоков через жидкую границу.

Задача ассимиляции данных об уровне, в особенности спутниковой альтиметрии, в задачах моделирования морей и океанов является актуальной (Ngodock et al., 2016), но её решение сопряжено с рядом проблем. Во-первых, для достижения приемлемой точности данных требуется применение целого ряда процедур обработки (Лебедев, 2016; Pujol et al., 2016), которые, в свою очередь, могут занять много времени, из-за чего данные поступают с задержкой. Во-вторых, ассимиляция «вдольтрековых» данных может повлечь появление «шума» в полученном решении (Ngodock et al., 2016).

В настоящей работе предложена постановка задачи ассимиляции данных спутниковой альтиметрии для восстановления граничных функций на жидких границах, для решения которой был предложен итерационный алгоритм, а также приведены результаты численных экспериментов для акватории Балтийского моря. Постановка и исследование задачи основаны на результатах работ (Agoshkov, 2005, 2017). В исследовании (Agoshkov, 2017) для аппроксимации модели по времени был использован метод расщепления, что позволило рассматривать задачу ассимиляции данных для нелинейной модели гидротермодинамики на каждом интервале по времени, решая последовательно более простые задачи ассимиляции, привлекая соответствующие изменяющимся переменным данные наблюдений; этот подход был использован и в настоящей работе.

Постановка и алгоритм решения задачи ассимиляции данных об уровне на жидкой границе

Модель гидротермодинамики Балтийского моря представлена системой уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики. Полная система уравнений вместе с граничными и начальными условиями приведена в работах (Agoshkov, 2017; Agoshkov, Sheloput, 2017).

Для аппроксимации модели по времени используется метод расщепления по физическим процессам, который позволяет представить решение целой нелинейной системы последовательными решениями более простых подзадач. Пусть на всём рассматриваемом интервале времени $[0, t_j]$ введена сетка: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j$. На каждом интервале времени (t_{j-1}, t_j) , $j = 1, \dots, J$ последовательно решаются следующие задачи (шаги метода расщепления):

ШАГ 1. Задача о распространении тепла в моделируемой трёхмерной области (акватории моря) для температуры вместе с соответствующей системой граничных условий и начальным условием. После этого на последующих шагах метода расщепления на интервале времени (t_{j-1}, t_j) температура T не изменяется, а $T(t_j)$ берётся в качестве начального состояния при решении задач на интервале (t_j, t_{j+1}) .

ШАГ 2. Задача конвекции-диффузии для солёности при соответствующих граничных и начальном условиях. После этого солёность S на последующих шагах метода расщепления на интервале времени (t_{j-1}, t_j) не изменяется, а $S(t_j)$ берётся в качестве начального состояния при решении задач на интервале (t_j, t_{j+1}) .

ШАГ 3. Задача об отыскании вектора скорости $\bar{u} = (u, v)^T$ и уровня моря ξ , которая представляет собой последовательное выполнение следующих процедур:

- а) решение системы уравнений мелкой воды в области Ω для отыскания баротропной составляющей скорости \bar{U} и уровня ξ со следующим граничным условием:

$$\bar{U} \cdot \bar{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \xi = m_{w,op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j);$$

- б) нахождение бароклинной составляющей скорости \bar{u}_{bc} . Далее $\bar{u}^{(1)} = \bar{U}|_{t=t_j} + \bar{u}_{bc}|_{t=t_j}$ принимается в качестве начального приближения для следующей задачи;
- в) нахождение поправки к скорости и решение задачи конвекции-диффузии. В результате получаем $\bar{u}^{(2)}$.

После этого $(\bar{u}^{(2)}, \xi)$ принимается в качестве приближения к компонентам (\bar{u}, ξ) точного решения на интервале времени (t_{j-1}, t_j) . При этом решения систем для баротропной и бароклинной составляющих не зависят друг от друга, а решение задач (б, в) должно осуществляться последовательно после завершения их вычисления.

Пусть далее функция d_s является дополнительной неизвестной (управлением), которую необходимо определить посредством процедуры ассимиляции данных. Пусть также на некоторой части границы $\partial\Omega$ на интервале времени (t_{j-1}, t_j) имеются данные наблюдений ξ_{obs} за уровнем моря. Обозначим через $\chi_{\xi, \partial\Omega}$ характеристическую функцию множества, где задана ξ_{obs} . Переформулируем задачу как задачу оптимального управления. Для этого введём функционал:

$$J_{\alpha,j} = \frac{\alpha}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\partial\Omega} m_{w,op} \sqrt{gH} \cdot (d_s - d_s^{(0)})^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\partial\Omega} \chi_{\xi, \partial\Omega} \sqrt{gH} \cdot (\xi - \xi_{obs})^2 d\Gamma dt.$$

Теперь задача формулируется следующим образом: найти функцию d_s , доставляющую минимум функционалу $J_{\alpha,j}$, и вектор состояния $(\bar{u}, \xi, T, S)^T$, являющийся решением систем уравнений, полученных после применения метода расщепления, при данном d_s и $t \in (t_{j-1}, t_j)$.

Задачу оптимального управления можно решать в следующем порядке: выполнение задач Шага 1, Шага 2 метода расщепления; задачи оптимального управления, т. е. отыскания d_s , доставляющего минимум функционалу $J_{\alpha,j}$, такого, что d_s, ξ являются решениями (а); задачи (а) с полученным d_s ; нахождение бароклинной составляющей и решение задач (б, в).

Исследование и решение задачи оптимального управления осуществляется после перехода к полудискретному виду (Agoshkov, 2005; Demytyeva et al., 2014), который получается дискретизацией системы уравнений мелкой воды по времени по неявной схеме. Для теоретического исследования дискретизованная система была сведена к эллиптической третьей краевой задаче для ξ (Agoshkov, 2005), после чего были получены условия однозначной и плотной разрешимости (в частности, если данные наблюдений заданы на жидкой границе, задача однозначно и плотно разрешима).

Задачу минимизации функционала $J_{\alpha,j}$ можно решать, например, с помощью метода градиентного спуска, который будет иметь вид следующего итерационного процесса (для системы, сведённой к полудискретной форме):

$$\begin{cases} \frac{\bar{U}_k}{\tau} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \bar{U}_k - g \cdot \text{grad} \xi_k = \tilde{f} \text{ в } \Omega, \\ \frac{\xi_k}{\tau} - \text{div}(H \bar{U}_k) = (\bar{F})_3 \text{ в } \Omega, \\ H \bar{U}_k \cdot \bar{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \cdot \xi_k = m_{w,op} \sqrt{gH} \cdot (d_s)_k \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\hat{U}_k}{\tau} - \begin{bmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{bmatrix} \hat{U}_k + g \cdot \text{grad} \hat{\xi}_k = 0 \text{ в } \Omega, \\ \frac{\hat{\xi}_k}{\tau} + \text{div} (H \hat{U}_k) = 0 \text{ в } \Omega, \\ -H \hat{U}_k \cdot \bar{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \cdot \hat{\xi}_k = m_{w,op} \sqrt{gH} \cdot (\xi_k - \xi_{obs}) \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

$$(d_s)_{k+1} = (d_s)_k + \tau_k m_{w,op} \sqrt{gH} \left(\alpha \left((d_s)_k - d_s^{(0)} \right) + \hat{\xi}_k \right), \quad (3)$$

где k — номер итерации. Параметр итерационного процесса можно вычислять, пользуясь

следующей формулой (Agoshkov, 2016):
$$\tau_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_{\Gamma_{obs}} \sqrt{gH} (\xi - \xi_{obs})^2 d\Gamma}{\int_{\Gamma_{op}} gH \hat{\xi}^2 d\Gamma}.$$

Как известно из теории задач оптимального управления (Агошков, 2016), вследствие однозначной и плотной разрешимости задачи при достаточно малом $\alpha > 0$ и достаточно большом k функции $\xi_k(\alpha)$ и $(d_s)_k(\alpha)$ могут быть приняты как приближённое решение исходной задачи.

Результаты численных экспериментов

Итерационный алгоритм (1)–(3) был реализован в качестве подключаемого модуля модели гидротермодинамики Балтийского моря, разработанной в ИВМ РАН (Zalesny et al., 2014). Ассимиляция данных наблюдений происходит на том шаге по времени, на котором эти данные имеются, на остальных шагах она отсутствует и расчёт проходит в обычном режиме.

Отдельного внимания заслуживает вопрос о доступности реальных данных наблюдений. Как было показано, если данные наблюдений заданы на всей жидкой границе, задача однозначно и плотно разрешима и итерационный процесс сходится к решению. Однако на практике доступны лишь следующие сведения об уровне: данные спутниковой альтиметрии и данные наблюдений на уровнемерных постах. В работе была использована информация из DUACS DT2014 (Data Unification and Altimeter Combination System, Delayed Time mode) об аномалиях уровня и динамической топографии, полученная по данным спутниковой альтиметрии. Данные поступают со спутников Jason-3, Sentinel-3A, HY-2A, Saral/AltiKa, Cryosat-2, Jason-2, проходят несколько этапов обработки (фильтрацию длинных волн, коррекцию полей в областях пересечения траекторий и т.д. (см. (Pujol et al., 2016)) и попадают в открытый доступ спустя несколько месяцев после даты измерений.

Из всего массива спутниковых данных для алгоритма (1)–(3) пригодны только те, которые являются измерениями на жидкой границе. Анализ данных показал, что таких измерений мало (1–2 за сутки). Помимо прочего, треки спутников никогда не проходят непосредственно по жидкой границе, а только лишь пересекают её в некоторой точке. Таким образом, имеется одно-два измерения уровня за сутки в каких-то определённых точках на жидкой границе, координаты которых зависят от времени.

Что касается данных наблюдений с уровнемерных постов, их получают в фиксированных точках вблизи берега (на измерительных прибрежных станциях) с определённой, заранее известной частотой. В работе были использованы данные центра INSTAC (In Situ Thematic Assembly Centre). Центр собирает сведения, предоставляемые организациями — членами BOOS (Baltic Operational Oceanographic System). Затем данные проходят первичную обработку — автоматические тесты (обнаружение пиков и т.д.) и статистические тесты. По сомнительным данным осуществляется визуальный контроль со стороны экспертов, в результате проверок они помечаются «флажками контроля». Информация обновляется ежедневно и содержит сведения с 2007 г. Из всего массива данных наблюдений с уровнемерных постов, как уже было указано, для алгоритма (1)–(3) пригодны только те, которые являются измерениями

на «жидкой» границе. В работе были использованы данные с уровнемерного поста Skagen (Дания) и Göteborg-Torshamnen (Швеция, институт SMHI).

Для получения данных в узлах сетки модели на жидкой границе в настоящей работе была использована обычная квадратичная интерполяция. Можно однозначно утверждать, что имеющихся точек с данными наблюдений слишком мало для получения сколько-нибудь близкой к реальному уровню аппроксимации. Однако в дальнейших работах планируется использовать более подходящий метод интерполяции разреженных данных, основанный на анализе временных рядов уровня по результатам измерений и моделирования.

Итак, рассмотрим результаты численных экспериментов. Был проведён расчёт на 14 дней с 01.03.2017 по 14.03.2017. В открытом доступе (на сайте <http://marine.copernicus.eu/>) представлены два набора данных спутниковой альтиметрии: обработанные данные по спутниковым трекам (1) и результат применения метода оптимальной интерполяции для построения уровня на сетке (2) (Pujol et al., 2016). Массивы данных (1) использовались для процедуры ассимиляции, а (2) — для сравнения с результатами расчётов. Данные (1) устроены достаточно просто: по каждому спутнику представлен массив, в котором зафиксированы координаты точки измерения, время и наблюдаемый уровень моря. Данные (2) представляют собой значения уровня моря на сетке $1/4 \times 1/4^\circ$ — по одному в сутки. Было проведено сравнение данных (2), среднесуточного уровня по результатам расчёта модели до внедрения блока ассимиляции и среднесуточного уровня по результатам расчёта модели с ассимиляцией. Результаты представлены на *рис. 1 и 2*.

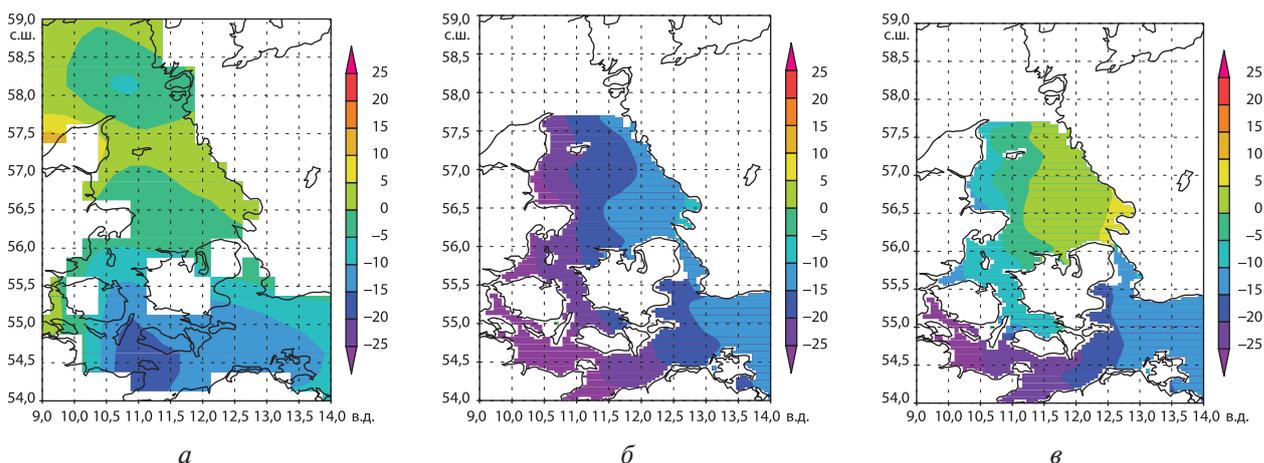


Рис. 1. Уровень моря среднесуточный (см) при $T = 3$ дня (03.03.2017): *а* — данные наблюдений (спутниковые, DUACS DT2014); *б* — расчёт без ассимиляции; *в* — расчёт с использованием ассимиляции

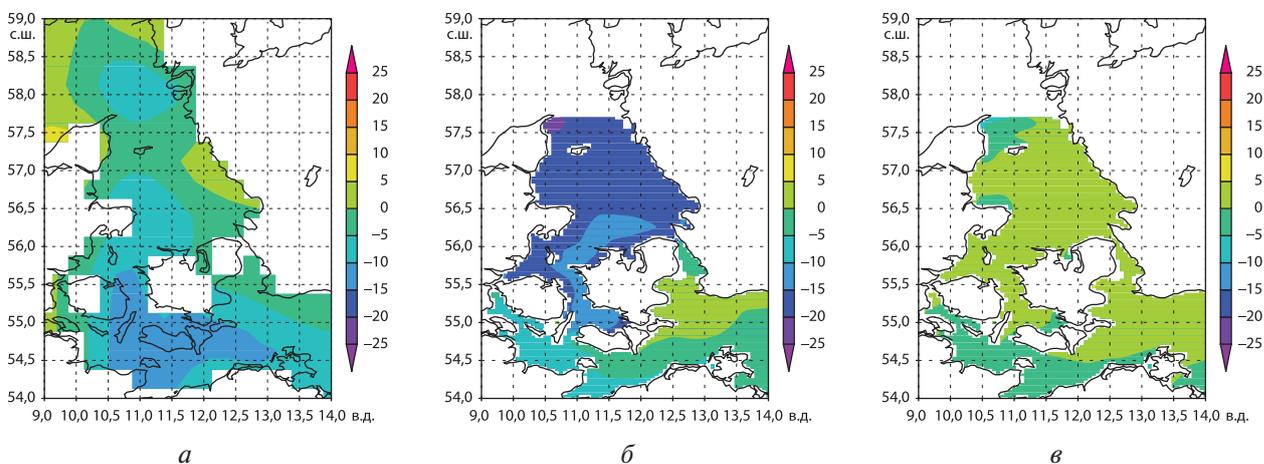


Рис. 2. Уровень моря среднесуточный (см) при $T = 4$ дня (04.03.2017): *а* — данные наблюдений (спутниковые, DUACS DT2014); *б* — расчёт без ассимиляции; *в* — расчёт с использованием ассимиляции

Из рисунков ясно, что внесённые в модель модификации преимущественно затрагивают поле уровня моря от жидкой границы до островов Дании и что результаты расчёта с использованием ассимиляции в среднем ближе к данным спутниковых измерений, чем результат расчёта модели без модификаций (с условием непротекания, $\bar{U} \cdot \bar{n} = 0$). Однако, поскольку ассимиляция проводилась всего 1–2 раза в сутки и способ интерполяции данных наблюдений является «грубым», качественно *рис. 1а, в* и *рис. 2а, в* не совпадают. На *рис. 3* (см. с. 20) для сравнения приведён среднесуточный уровень всего Балтийского моря по результатам расчётов с ассимиляцией (см. *рис. 3а*), без блока ассимиляции (см. *рис. 3б*) и данные со спутников (см. *рис. 3в*). На *рис. 4* показано влияние ассимиляции уровня на температуру на жидкой границе.

К особенностям алгоритма (1)–(3) относятся следующие характеристики. Алгоритм сходится достаточно быстро — за 10–15 итераций достигается приемлемая точность. Поскольку данные наблюдений заданы в определённые моменты времени $\{t_k^{obs}\}$, ассимиляция проводится на тех временных интервалах (t_{j-1}, t_j) , которые содержат хотя бы один t_k^{obs} . Если таких интервалов мало, длительность расчёта с использованием блока ассимиляции почти совпадает с длительностью обычного расчёта. Однако малое количество данных является главным фактором, с которым связано снижение эффективности предложенного алгоритма.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФ (проект № 14-11-00609, в рамках которого были проведены численные эксперименты) и РФФИ (проект № 16-01-00548, в рамках которого проведено исследование сформулированных задач).

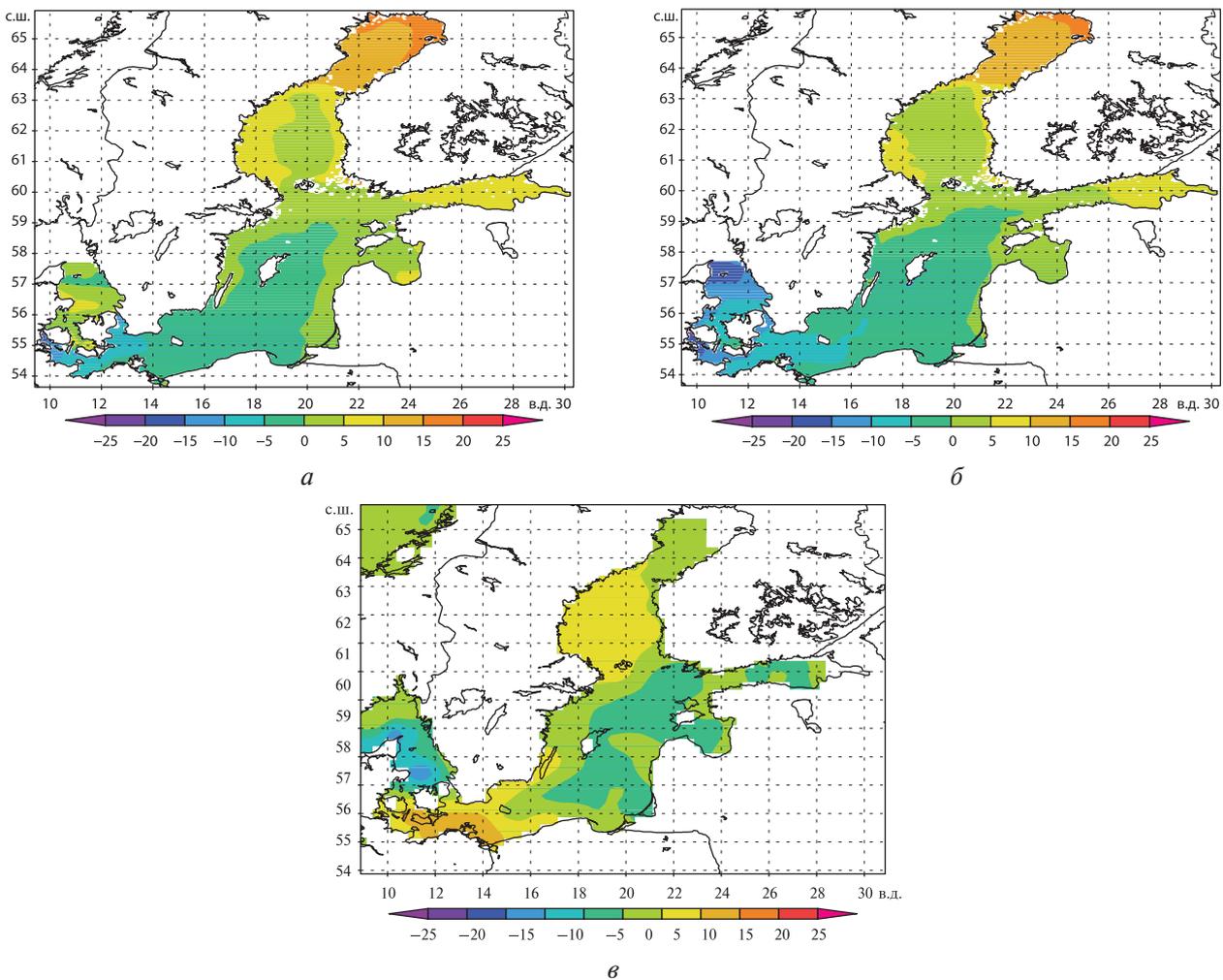


Рис. 3. Уровень моря среднесуточный (см) на 10.03.2017: а — расчёт по модели с ассимиляцией; б — расчёт по модели без блока ассимиляции; в — по данным со спутников

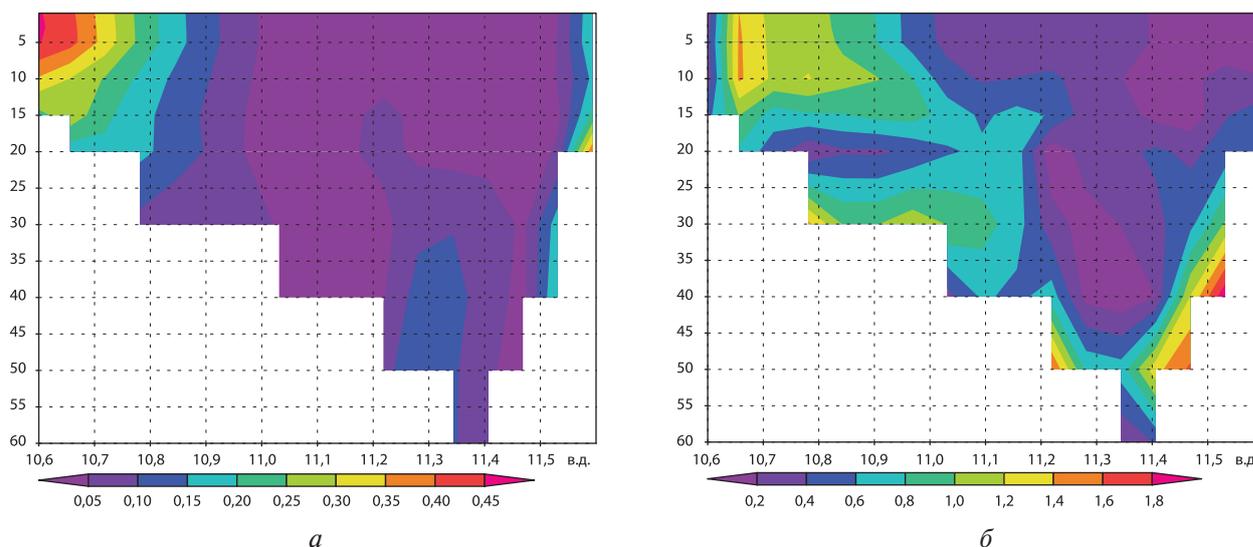


Рис. 4. Модуль разности температуры ($^{\circ}\text{C}$), разрез по глубине, по $\Gamma_{\omega, \text{жидк}}$ (жидкой границе):
 а — 48 ч от начала расчёта; б — 6 сут от начала расчёта

Литература

1. Агошков В. И. Методы оптимального управления и сопряжённых уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2016. 244 с.
2. Кубряков А. И. Применение технологии вложенных сеток при создании системы мониторинга гидрофизических полей в прибрежных районах Черного моря // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика». 2004. Вып. 11. С. 31–50.
3. Лебедев С. А. Методика обработки данных спутниковой альтиметрии для акваторий Белого, Баренцева и Карского морей // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2016. Т. 13. № 6. С. 203–223.
4. Мысленков С. А. Использование спутниковой альтиметрии для расчета переноса вод в Северной Атлантике // Труды ГУ «Гидрометцентр России». 2011. Вып. 345. С. 119–125.
5. Чернов И. А., Толстиков А. В. Численное моделирование крупномасштабной динамики Белого моря // Труды Карельского научного центра РАН. 2014. Т. 4. С. 137–142.
6. Agoshkov V. I. Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2005. V. 20. No. 1. P. 1–18.
7. Agoshkov V. I. Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with ‘liquid’ boundaries // Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2017. V. 32. No. 2. P. 73–90.
8. Agoshkov V. I., Sheloput T. O. The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with ‘liquid’ boundaries // Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2017. V. 32. No. 3. P. 147–164.
9. Demytyeva E. V., Karepova E. D., Shaidurov V. V. Assimilation of observation data in the problem of surface wave propagation in a water area with an open boundary // Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014. V. 29. No. 1. P. 13–23.
10. Marchesiello P., McWilliams J. C., Shchepetkin A. Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models // Ocean Modelling. 2001. V. 3. P. 1–20.
11. Ngodock H., Carrier M., Smith S., Martin P., Muscarella P., Jacobs G., Souopgui I. On the direct assimilation of along-track sea-surface height observations into a free-surface ocean model using a weak constraints four-dimensional variational (4D-Var) method // Quarterly J. Royal Meteorological Society. 2016. V. 142. P. 1160–1170.
12. Pujol M.-I., Faugère Y., Taburet G., Dupuy S., Pelloquin C., Ablain M., Picot N. DUACS DT2014: the new multi-mission altimeter data set reprocessed over 20 years // Ocean Science. 2016. V. 12. P. 1067–1090.
13. Zalesny V. B., Gusev A. V., Chernobay S. Yu., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytkönen J. The Baltic Sea circulation modelling and assessment of marine pollution // Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014. V. 29. No. 2. P. 129–138.

Numerical solution of the problem of variational assimilation of the sea level on the liquid (open) boundary in the Baltic Sea hydrothermodynamics model

T. O. Sheloput

Marchuk Institute of Numerical Mathematics RAS, Moscow 119333, Russia
E-mail: sheloput@phystech.edu

This paper presents the results of a numerical solution of the problem of variational assimilation of the sea level on the liquid (open) part of the boundary in the Baltic Sea hydrothermodynamics model. By liquid boundaries of the water area boundaries between seas and oceans, boundaries passing through straits, estuaries, etc. are meant. The problem of imposing boundary conditions on liquid boundaries is an important problem of modern geophysics. One of the existing methods that can be applied to account for liquid boundaries in models is the use of variational assimilation of observations, including sea level. So, having the observations at certain moment, one can pose the inverse problem of restoring flows at the open boundary. The formulation of the problem of variational assimilation of the sea level at the open boundary is given in the paper, an iterative algorithm for solving the problem and some conclusions about the convergence of the algorithm and the solvability of the original problem are formulated. The results of applying the algorithm to the solution of the problem of the Baltic Sea hydrothermodynamics simulation and the questions of the availability of observational data are considered in detail. For the assimilation procedure, satellite altimetry data were used, as well as *in-situ* sea level observations.

Keywords: variational data assimilation, open boundaries, satellite altimetry, Baltic Sea, numerical methods, iterational algorithms, methods of adjoint equations, boundary conditions, mathematical model

Accepted: 29.10.2018

DOI: 10.21046/2070-7401-2018-15-7-15-23

References

1. Agoshkov V.I., *Metody optimal'nogo upravleniya i sopryazhennykh uravnenii v zadachakh matematicheskoi fiziki* (Methods of optimal control and adjoint equations in problems of mathematical physics), Moscow: IVM RAN, 2016, 244 p.
2. Kubryakov A.I., *Primenenie tekhnologii vlozhennykh setok pri sozdanii sistemy monitoringa gidrofizicheskikh polei v pribrezhnykh raionakh Chernogo morya* (Application of nested mesh technology for creation of a monitoring system for hydrophysical fields in the coastal regions of the Black Sea), *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoi i shel'fovoi zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa* (Ecological safety of coastal and shelf zones and complex use of shelf resources). Sevastopol: NPC "EHKOSI-Gidrofizika", 2004, Vol. 11, pp. 31–50.
3. Lebedev S.A., *Metodika obrabotki dannykh sputnikovoi al'timetrii dlya akvatorii Belogo, Barentseva i Karskogo morei* (Processing method of satellite altimetry data for the White, Barents and Kara Seas), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2016, Vol. 13, No. 6, pp. 203–223.
4. Myslenkov S.A., *Ispol'zovanie sputnikovoi al'timetrii dlya rascheta perenosa vod v Severnoi Atlantike* (Using satellite altimetry to calculate the transport of waters in the North Atlantic), *Trudy GU "Gidrometsentr Rossii"*, 2011, Vol. 345, pp. 119–125.
5. Chernov I.A., Tolstikov A.V., *Chislennoe modelirovanie krupnomasshtabnoi dinamiki Belogo morya* (Numerical modeling of a large-scale dynamics of the White Sea), *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN*, 2014, Vol. 4, pp. 137–142.
6. Agoshkov V.I., *Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem*, *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2005, Vol. 20, No. 1, pp. 1–18.
7. Agoshkov V.I., *Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with 'liquid' boundaries*, *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2017, Vol. 32, No. 2, pp. 73–90.

8. Agoshkov V.I., Sheloput T. O., The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with 'liquid' boundaries, *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2017, Vol. 32, No. 3, pp. 147–164.
9. Dementyeva E. V., Karepova E. D., Shaidurov V.V., Assimilation of observation data in the problem of surface wave propagation in a water area with an open boundary, *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2014, Vol. 29, No. 1, pp. 13–23.
10. Marchesiello P., McWilliams J. C., Shchepetkin A., Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models, *Ocean Modelling*, 2001, Vol. 3, pp. 1–20.
11. Ngodock H., Carrier M., Smith S., Martin P., Muscarella P., Jacobs G., Souopgui I., On the direct assimilation of along-track sea-surface height observations into a free-surface ocean model using a weak constraints four-dimensional variational (4D-Var) method, *Quarterly J. Royal Meteorological Society*, 2016, Vol. 142, pp. 1160–1170.
12. Pujol M.-I., Faugère Y., Taburet G., Dupuy S., Pelloquin C., Ablain M., Picot N., DUACS DT2014: the new multi-mission altimeter data set reprocessed over 20 years, *Ocean Science*, 2016, Vol. 12, pp. 1067–1090.
13. Zalesny V.B., Gusev A. V., Chernobay S. Yu., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytönen J., The Baltic Sea circulation modelling and assessment of marine pollution, *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2014, Vol. 29, No. 2. pp. 129–138.