

Вариационная ассимиляция спутниковых данных поверхностной концентрации взвешенного вещества в Азовском море

В. С. Кочергин, С. В. Кочергин, С. В. Станичный

*Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь, 299011, Россия
E-mail: vskocher@gmail.com*

Спутниковые данные позволяют получать последовательную информацию о состоянии поверхности моря и изменении пространственных структур, определяемых по концентрации рассеивающей взвеси в оптическом диапазоне. Основной проблемой при этом являются помехи создаваемые, например, облачностью. Часто такие помехи полностью или частично прерывают поступление информации с поверхности моря. Поэтому задача восстановления отсутствующих в некоторые промежутки времени данных (gap filling) является важной и актуальной. Такая задача может быть решена различными способами, в том числе на основе вариационной ассимиляции данных измерений, которая реализуется за счёт идентификации входных параметров модели. Сама модель переноса пассивной примеси выступает в роли пространственно-временного интерполянта, и получаемое решение на используемом интервале времени является согласованным с математической моделью и с данными измерений в силу минимизации функционала качества прогноза. На конкретных данных показана работоспособность вариационного алгоритма идентификации, произведено сравнение полученных результатов с последовательными спутниковыми изображениями сканера MODIS. Результаты показали хорошую согласованность данных численного моделирования со спутниковой информацией в силу минимизации функционала качества прогноза; за счёт модельной пространственно-временной интерполяции полученные поля концентрации охватывают всю акваторию Азовского моря на временном интервале интегрирования модели.

Ключевые слова: спутниковые данные, концентрация пассивной примеси, модель переноса, Азовское море, сопряжённые уравнения

Одобрена к печати: 11.03.2020

DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-2-40-48

Введение

При изучении динамики распространения примесей необходима достоверная информация, которая может быть получена на основе методов дистанционного зондирования. Использование математических моделей (Иванов, Фомин, 2008; Фомин, 2002; Blumberg, Mellor, 1987; Zalesny et al., 2012) и методов усвоения данных измерений (Марчук, 1982; Marchuk, Penenko, 1978; Shutyaev et al., 2018) позволяет идентифицировать входные параметры модели и повышает достоверность прогнозируемых величин. Вариационные алгоритмы усвоения данных измерений основаны на минимизации квадратичного функционала качества прогноза, характеризующего отклонения модельного решения от измеренных значений поля концентрации. При этом модель переноса пассивной примеси, выступая в качестве ограничений на вариации входных параметров, является, по сути, пространственно-временным интерполянтом. При поиске оптимального распределения входных параметров численного моделирования решаются сопряжённые задачи, которые позволяют строить градиенты функционала качества в пространстве параметров. Процедура идентификации позволяет определять различные входные параметры — это и мощности потоков взвешенного вещества на поверхности и дне, и начальное поле концентрации. В данной работе в качестве входного параметра было выбрано последнее. Такое совместное использование спутниковых данных, моделей переноса пассивной примеси и вариационных методов ассимиляции данных измерений представляет интерес для определения пространственной структуры взвешенного вещества на заданном интервале времени. При реализации алгоритма осуществляется интегрирование основной,

сопряжённой задач и задачи в вариациях. Вариационная задача решается для определения итерационного параметра при осуществлении градиентного спуска. При помощи динамической модели в σ -координатах для акватории Азовского моря (Фомин, 2002) насчитываются поля течений, коэффициенты турбулентной диффузии при восточном ветровом воздействии, которое преобладало в наблюдаемый период времени. Серия спутниковых снимков, характеризующих поверхностную концентрацию взвешенного вещества в Азовском море, даёт представление о динамических процессах, происходящих в бассейне. Поэтому в работе производится сравнение модельных оценок с информацией о концентрации взвешенного вещества, полученной по спутниковым изображениям.

Модель переноса

В качестве модели переноса пассивной примеси в Азовском море рассмотрим следующее уравнение в σ -координатах:

$$\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma: \frac{\partial C}{\partial n} &= 0, \\ \sigma = 0: \frac{\partial C}{\partial \sigma} &= Q_S(x, y), \quad \sigma = -1: \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Q_B(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и начальными данными:

$$C(x, y, \sigma, 0) = C_0(x, y, \sigma), \quad (3)$$

где C — концентрация примеси; U, V, W — компоненты поля скорости; A_H и K_H — коэффициенты турбулентной диффузии в горизонтальном и вертикальном направлениях; $D(x, y)$ — динамическая глубина; σ — вертикальная координата ($\sigma = 0$ на поверхности, $\sigma = -1$ на дне); $Q_S(x, y), Q_B(x, y)$ — переменные мощности источника на поверхности и на дне; Γ — граница области M ; M — область интегрирования модели, $M_t = M \times [0, T]$.

Вариационный алгоритм усвоения данных измерений.

Задача усвоения данных измерений $C^{\text{изм}}$ состоит в минимизации квадратичного функционала:

$$I_0 = \frac{1}{2} \left(P \left(RC_T - C_T^{\text{изм}} \right), P \left(RC_T - C_T^{\text{изм}} \right) \right)_{M_t}, \quad (4)$$

где P — оператор восполнения нулями поля невязок прогноза при отсутствии данных измерений; R — оператор проектирования в точки наблюдений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация выражения (4) эквивалентна поиску экстремума следующего функционала:

$$\begin{aligned} I = I_0 + & \left(\frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right)_{M_t} + \\ & + \left(\frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma} + \left(C \Big|_{t=0} - C_0, C^* \Big|_{t=0} \right)_M + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_S(x, y), C^* \right)_{s_t^0} + \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_B(x, y), C^* \right)_{s_t^{-1}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $s_t^0 = s^0 \times [0, T]$; $s_t^{-1} = s^{-1} \times [0, T]$; s^0 — поверхность моря; s^{-1} — дно.

Записывая вариацию функционала (5) и интегрируя по частям с учётом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в σ -координатах:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0, \tag{6}$$

получим в случае идентификации мощности источника:

$$\delta I = \left(\delta Q_S(x, y), C^* \right)_{s_t^0} + \left(\delta Q_B(x, y), C^* \right)_{s_t^{-1}}, \tag{7}$$

а при инициализации начального поля имеем:

$$\delta I = \left(\delta C_0, C^* \right)_M, \tag{8}$$

где C^* — множители Лагранжа, которые выбираются из решения следующей сопряжённой задачи:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \frac{K}{D} \cdot \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = \\ = -P(RC - C^{изм}), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Gamma: \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0: \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \quad \sigma = -1: \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \tag{10}$$

$$t = T: C^* = 0. \tag{11}$$

В случае, когда данные измерений имеются на конечный момент времени T , в выражении (9) задаём правую часть равной нулю, а при $t = T$ в отношении (11) используется условие:

$$t = T: C^* = P(C^{изм} - RC). \tag{12}$$

Из условия стационарности функционала $\delta I = 0$ и определения градиента функционала имеем:

$$\nabla_{Q_S} I = \int_0^T C^*(x, y, 0, t) dt, \tag{13}$$

$$\nabla_{Q_B} I = \int_0^T C^*(x, y, -1, t) dt, \tag{14}$$

$$\nabla_{C_0} I = C^*(x, y, \sigma, 0). \tag{15}$$

Далее осуществляется итерационный спуск в направлении соответствующего градиента функционала. При идентификации начального распределения концентрации следующее приближение ищется итерационно по формуле:

$$C_0^{n+1} = C_0^n + \tau \nabla_{C_0} I, \tag{16}$$

где τ — итерационный параметр, который определяется с учётом решения задачи в вариациях, исходя из минимума функционала (4) по формуле:

$$\tau = \frac{\left(P(RC_T - C_T^{изм}), PR\delta C_T \right)_M}{\left(PR\delta C_T, PR\delta C_T \right)_M}. \tag{17}$$

Здесь δC — решение задачи в вариациях:

$$\frac{\partial D\delta C}{\partial t} + \frac{\partial DU\delta C}{\partial x} + \frac{\partial DV\delta C}{\partial y} + \frac{\partial W\delta C}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D\delta C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D\delta C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot \frac{K}{D} \cdot \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma}, \tag{18}$$

$$\Gamma: \frac{\partial \delta C}{\partial n} = 0, \tag{19}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma = 0: \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} = 0, \\ \sigma = -1: \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

с начальными данными:

$$\delta C(x, y, \sigma, 0) = -C^*(x, y, \sigma, 0). \quad (21)$$

Далее осуществляется спуск по формуле (16).

Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты проводились с динамической моделью (Фомин, 2002) для акватории Азовского моря. Были получены поля течений и коэффициенты турбулентной диффузии при различном ветровом воздействии, которые использовались в качестве входных параметров при интегрировании модели переноса пассивной примеси на срок 5 сут. При этом шаг по времени $\Delta t = 240$ с, шаг по пространству $\Delta x = 0,78$ км, $\Delta y = 1,125$ км. По вертикали в модели используется расчётная сетка в σ -координатах с 15 горизонтами. Динамические поля, полученные по данной модели, использовались в работах (Кочергин, 2012; Кочергин и др., 2012; Kochergin, Kochergin, 2015) для реализации тестовых расчётов по идентификации мощностей источников постоянной и переменной мощности.

Алгоритм вариационной идентификации мощности источника подробно описан в публикации (Kochergin, Kochergin, 2015). Результаты расчётов показали надёжную работу алгоритмов и хорошую сходимость итерационных процессов поиска оптимальных значений параметров. В работе (Кочергин и др., 2017) на тестовом примере произведена апробация алгоритма и проведено сравнение полученных результатов со спутниковыми данными. На *рис. 1, 2* (см. с. 44) представлены снимки поверхности Азовского моря (<http://worldview.earthdata.nasa.gov/>), из которых по яркости регистрируемого излучения можно судить о динамических процессах, происходящих в акватории Азовского моря. Данная динамика сформировалась под воздействием ветров (<http://dvs.net.ru/mp/data/201507vw.shtml>) северо-восточного и восточного направления со значениями около 10 м/с. По направлению распространения продуктов горения от источников на суше также можно судить о направлении ветра. Помехи, создаваемые продуктами горения, вносят свой вклад в зашумление данных и образование пропусков в них. Из *рис. 1, 2* видно, что в структуре поля концентрации взвешенного вещества при данном ветровом воздействии просматриваются не только банки Еленина и косы Долгой, но и банка Песчаных островов, Ахтарская банка, банка в районе Обиточной косы, Железинская банка и область интенсивного взмучивания вдоль Арабатской стрелки. Значения концентрации получены на основе работы (Кременчуцкий и др., 2014). Следует отметить, что высокая концентрация в прибрежной зоне Арабатской стрелки и Косы Долгой привело к пропускам в данных концентрации.

На *рис. 1* видно, что в процессе интенсивного ветрового воздействия в пространственной структуре концентрации взвешенного вещества на поверхности Азовского моря проявляются практически все особенности рельефа дна. При ветровом воздействии восточных направлений в полной мере проявляется бенч у западного берега косы Долгой. Интересна конфигурация концентрации взвешенного вещества при восточном ветровом воздействии у косы Долгой, которая практически совпадает с пространственной структурой донных отложений смешанного типа осадков (алеврито-илисто-песчаных). Результаты численного моделирования переноса пассивной примеси в Азовском море показали, что подобная конфигурация в поле концентрации получается при интенсивном ветровом воздействии восточного направления. Следует отметить пониженную концентрацию взвешенных веществ в районе косы Обиточной, Бердянской и других кос северного побережья Азовского моря.



Рис. 1. Композитное изображение в псевдоцветах MODIS AQUA, контрасты на море определяются изменением концентрации взвешенного вещества; 16 октября 2015 г.



Рис. 2. Композитное изображение в псевдоцветах MODIS AQUA, контрасты на море определяются изменением концентрации взвешенного вещества; 18 октября 2015 г.

Максимальная концентрация на снимках наблюдается в прибрежной зоне северной части Арабатской стрелки. Начальное поле концентрации на 16 октября будем считать неизвестным, а информацию за 17 и 18 октября усвоим в модели переноса за счёт идентификации начального распределения примеси. В результате работы описанной выше процедуры было получено начальное поле концентрации, изображённое на рис. 3. На нём видны основные пространственные особенности, присущие полю концентрации, изображённому на рис. 1. Для повышения адекватности модели данным измерениям, по всей вероятности, необходимо

учесть эффекты взмучивания и осаждения, иметь в наличии качественные данные о ветровом воздействии с достаточным пространственным разрешением.

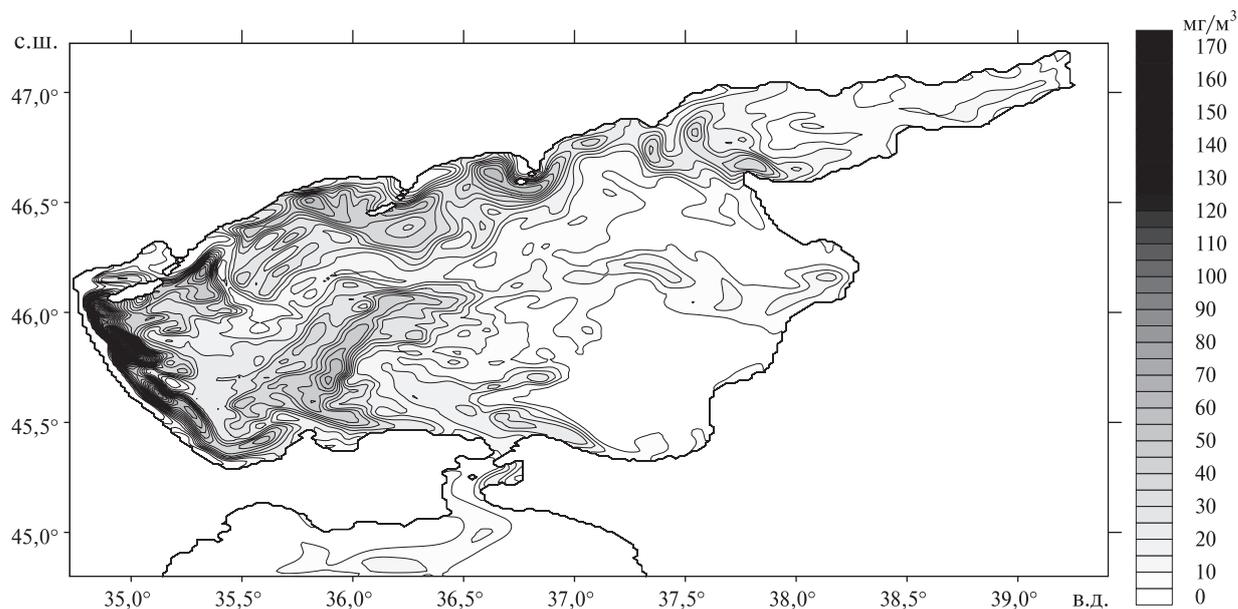


Рис. 3. Начальное поле концентрации взвешенного вещества ($\text{мг}/\text{м}^3$) 16 октября 2015 г. ($\sigma = 0$)

Рисунок 4 характеризует поверхностное поле концентрации взвешенного вещества, полученного в результате моделирования с начальными данными, изображёнными на рис. 3. Поле, показанное на рис. 4, хорошо согласуется с данными рис. 2 в силу минимизации квадратичного функционала качества прогноза. Следует отметить, что данные за 17 октября охватывали небольшую часть восточной акватории моря с сравнительно небольшими значениями концентрации. Данные для района Арабатской стрелки отсутствовали из-за рассеивающего эффекта. Поэтому о динамике концентрации для данного периода можно судить по результатам численного моделирования с учётом усваиваемой информации за другие даты.

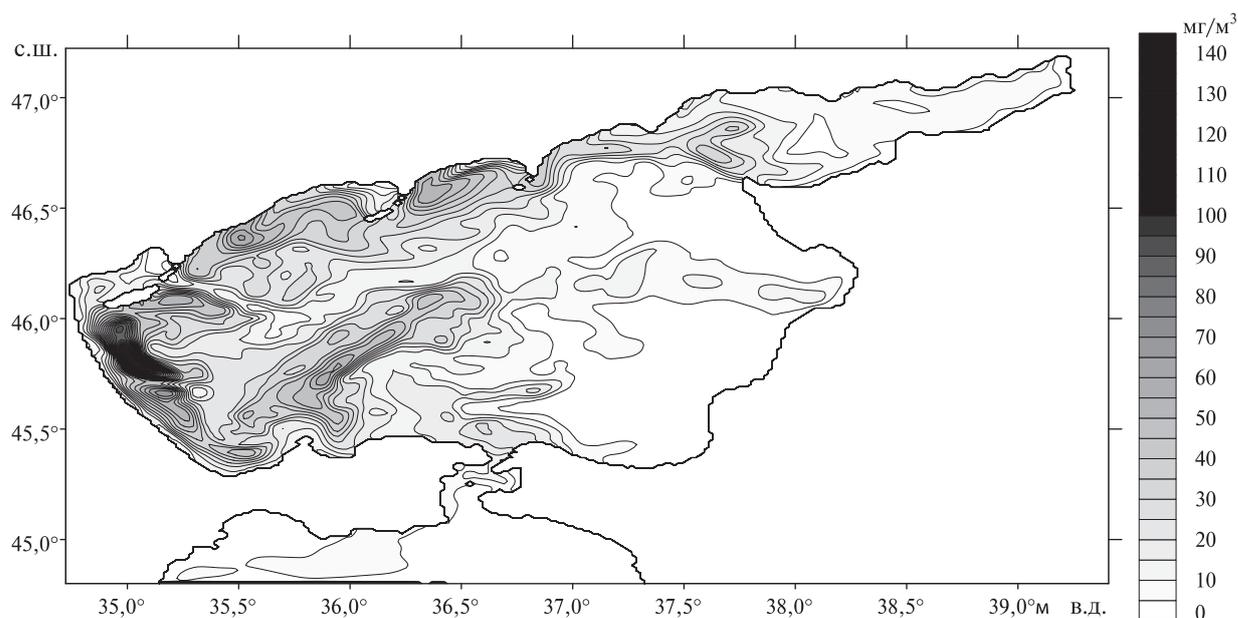


Рис. 4. Модельное поле концентрации взвешенного вещества ($\text{мг}/\text{м}^3$) 18 октября 2015 г. ($\sigma = 0$)

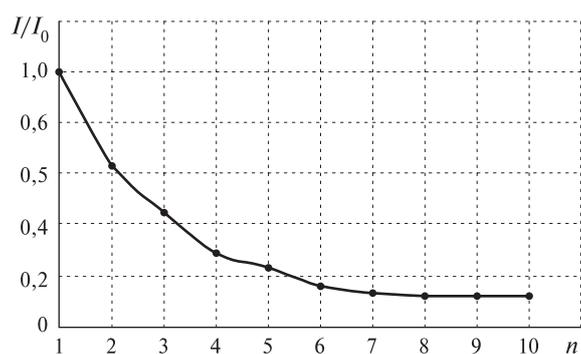


Рис. 5. Зависимость относительной величины функционала качества прогноза от количества итераций

начальное поле (см. рис. 3), которое хорошо согласуется с данными измерений (см. рис. 1). На рис. 5 видно, что для данного промежутка времени для сходимости итерационного процесса достаточно 7–8 итераций. В дальнейшем сходимость замедляется, а остаточное значение функционала, по всей видимости, характеризует неопределённость модели по отношению к данным измерений, которая может быть уменьшена за счёт учёта процессов, которые не описывает модель переноса-диффузии.

Заключение

В работе на основе данных сканера MODIS для Азовского моря показана эффективность вариационного алгоритма ассимиляции данных для восстановления пространственных особенностей концентрации взвешенного вещества с использованием модельных расчётов трёхмерных полей скоростей. Проведённые численные эксперименты продемонстрировали надёжную работу вариационного алгоритма идентификации входных параметров модели. Результаты численного моделирования с учётом ассимиляции данных измерений могут быть улучшены за счёт учёта в используемой модели процессов взмучивания и осаждения донных осадков и реального ветра.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Чёрного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

Литература

1. Иванов В. А., Фомин В. В. Математическое моделирование динамических процессов в зоне моря-суша. Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. 363 с.
2. Кочергин В. С. Идентификация начального поля концентрации для модели переноса пассивной примеси в Азовском море // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: МГИ НАНУ, 2012. Вып. 26. Т. 2. С. 123–125.
3. Кочергин С. В., Кочергин В. С., Фомин В. В. Определение концентрации пассивной примеси в Азовском море на основе решения серии сопряжённых задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: МГИ НАНУ, 2012. Вып. 26. Т. 2. С. 112–118.
4. Кочергин В. С., Кочергин С. В., Станичный В. С. Использование метода сопряжённых уравнений при идентификации источников загрязнений в Азовском море // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2017. Т. 14. № 1. С. 50–57.
5. Кременчуцкий Д. А., Кубряков А. А., Завьялов П. О., Коновалов Б. В., Станичный С. В., Алескерова А. А. Определение концентрации взвешенного вещества в Черном море по данным спутника MODIS // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. 2014. № 29. С. 1–9.

6. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
7. Фомин В. В. Численная модель циркуляции вод Азовского моря // Науч. тр. Украинского научно-исслед. гидрометеоролог. ин-та. 2002. Вып. 249. С. 246–255.
8. Blumberg A. F., Mellor G. L. A description of the three-dimensional coastal ocean circulation model // Three-Dimensional Coastal Ocean Models / ed. Heaps N.; AGU. 1987. V. 4. P. 1–16.
9. Kochergin V. S., Kochergin S. V. Identification of a Pollution Source Power in the Kazantip Bay Applying the Variation Algorithm // Physical Oceanography. 2015. No. 2. P. 69–76.
10. Marchuk G. I., Penenko V. V. Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment // Modelling and Optimization of Complex Systems: Proc. IFIP-TC7 Working Conf. N. Y.: Springer, 1978. P. 240–252.
11. Shutyaev V. P., Le Dimet F.-X., Parmuzin E. Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation // Nonlinear Processes in Geophysics. 2018. V. 25. Iss. 2. P. 429–439.
12. Zalesny V. B., Diansky N. A., Fomin V. V., Moshonkin S. N., Demyshev S. G. Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov // Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. V. 27. Iss. 1. P. 95–112.

Variational assimilation of satellite data on surface concentration of suspended matter in the Azov Sea

V. S. Kochergin, S. V. Kochergin, S. V. Stanichny

Marine Hydrophysical Institute RAS, Sevastopol 299011, Russia
E-mail: vskocher@gmail.com

Satellite data allows us to obtain consistent information about the state of the sea surface and changes in spatial structures determined by the concentration of scattering suspension in the optical range. The main problem is the interference caused by, for example, cloud cover. Such interference often completely or partially interrupts the flow of information from the sea surface. Therefore, the task of restoring data for time intervals with missing data (gap filling) is important and relevant. This problem can be solved in various ways, including on the basis of variational assimilation of measurement data, which is implemented by identifying the input parameters of the model. The passive impurity transfer model itself acts as a space-time interpolant and the resulting solution on the used time interval is consistent with the mathematical model and with the measurement data due to the minimization of the prediction quality functional. The performance of the variational identification algorithm is shown on specific data, and the results obtained are compared with successive satellite images of the MODIS scanner. The results obtained showed good consistency of the results of numerical modeling with satellite information due to the minimization of the forecast quality functional, due to model spatial-temporal interpolation, the obtained concentration fields cover the entire water area of the sea of Azov at the time interval of model integration.

Keywords: satellite data, concentration of passive admixture, transport model, Azov Sea, adjoint equation

Accepted: 11.03.2020
 DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-2-40-48

References

1. Ivanov V. A., Fomin V. V., *Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskikh protsessov v zone morya-susha* (Mathematical modeling of dynamic processes in the area of the Sea-Earth), Sevastopol: EKOSI-gidrofizika, 2008, 363 p.
2. Kochergin V. S., Identifikatsiya nachalnogo polya kontsentratsii dlya modeli perenosa passivnoi primesi v Azovskom more (Identification of the initial concentration field for the passive admixture transport model

- in the Azov Sea), *Ekologicheskaya bezopasnost pribrezhnoi i shelfovoi zon i kompleksnoe ispolzovanie resursov shelfa*, Sevastopol: MGI NANU, 2012, Issue 26, Vol. 2, pp. 123–125.
3. Kochergin S. V., Kochergin V. S., Fomin V. V., Opredelenie kontsentratsii passivnoi primesi v Azovskom more na osnove resheniya serii sopryazhennykh zadach (Determination of passive admixture concentration in the Azov Sea based on a solutions series of adjoint tasks), *Ekologicheskaya bezopasnost pribrezhnoi i shelfovoi zon i kompleksnoe ispolzovanie resursov shelfa*, Sevastopol: MGI NANU, 2012, Issue 26, Vol. 2, pp. 112–118.
 4. Kochergin V. S., Kochergin S. V., Stanichny V. S., Ispol'zovanie metoda sopryazhennykh uravnenii pri identifikatsii istochnikov zagryaznenii v Azovskom more (Identification of pollution sources in the Sea of Azov using the adjoint equation method), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2017, Vol. 14, No. 1, pp. 50–57.
 5. Kremenchutskii D. A., Kubryakov A. A., Zav'yalov P. O., Konovalov B. V., Stanichny S. V., Aleskerova A. A., Opredelenie kontsentratsii vzheshennogo veshchestva v Chernom more po dannym sputnika MODIS (Determination of the concentration of suspended matter in the Black sea using data from the MODIS satellite), *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoi i shelfovoi zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shelfa*, 2014, No. 29, pp. 1–9.
 6. Marchuk G. I., *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchei sredy* (Mathematical modeling in the environmental problem), Moscow: Nauka, 1982, 320 p.
 7. Fomin V. V., Chislennaya model tsirkulyatsii vod Azovskogo morya (Numerical circulation model of the Azov Sea water), *Nauchnye trudy Ukrainskogo nauchno-issledovatel'skogo gidrometeorologicheskogo instituta*, 2002, Vol. 249, pp. 246–255.
 8. Blumberg A. F., Mellor G. L., A description of the three-dimensional coastal ocean circulation model, *Three-dimensional coastal ocean models*, Heaps N. (ed.), AGU, 1987, Vol. 4, pp. 1–16.
 9. Kochergin V. S., Kochergin S. V., Identification of a Pollution Source Power in the Kazantip Bay Applying the Variation Algorithm, *Physical Oceanography*, 2015, No. 2, pp. 69–76.
 10. Marchuk G. I., Penenko V. V., Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment, *Modelling and Optimization of Complex Systems*, Proc. IFIP-TC7 Working Conf., New York: Springer, 1978, pp. 240–252.
 11. Shutyaev V. P., Le Dimet F.-X., Parmuzin E., Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2018, Vol. 25, Issue 2, pp. 429–439.
 12. Zalesny V. B., Diansky N. A., Fomin V. V., Moshonkin S. N., Demyshev S. G., Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov, *Russian J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 2012, Vol. 27, Issue 1, pp. 95–112.