

Комплексирование субпиксельно смещённых изображений с целью повышения разрешающей способности систем космического наблюдения Земли

Н. А. Егошкин, В. В. Еремеев, А. Э. Москвитин

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В. Ф. Уткина
Рязань, 390005, Россия
E-mail: foton@rsreu.ru*

Представлена общая модель процесса комплексирования изображений от нескольких линеек фотоприёмников, установленных в фокальной плоскости датчика с субпиксельным смещением полей зрения, с целью повышения разрешающей способности съёмки. Предложен алгебраический подход к коррекции расфокусировки формируемого изображения, возникающей из-за конечных размеров фотоприёмных элементов. Рассматривается случай равномерного расположения отсчётов при оптимальной организации съёмки, где комплексирование сводится к перестановке пикселей и применению известных фильтров. Рассматривается специфика интерполяции по неравномерным отсчётам, которая необходима при геометрических искажениях сцены в процессе сканирования. Предложена полиномиальная аппроксимация сложных банков фильтров и показано, что можно упростить организацию процесса съёмки при выборе достаточно высокой частоты опроса линеек фотоприёмников. Рассмотрен важный случай, когда пространственное разрешение требуется повысить ниже теоретического предела, а остаточную избыточность использовать для повышения отношения сигнал/шум, что особенно важно для теплового инфракрасного диапазона. Описана строго оптимальная интерполяция изображения с финитным спектром по неравномерным отсчётам в спектральной области на основе метода подавления спектральных зон. Введены критерии зашумленности изображений и повышения разрешения, позволяющие при необходимости упрощать фильтрацию ценой некоторого снижения качества. Приводятся результаты апробации предложенных решений с привлечением модельной и натурной видеоинформации.

Ключевые слова: комплексирование изображений, детальность наблюдения, повышение разрешения, повышение чёткости, отношение сигнал/шум

Одобрена к печати: 21.02.2020

DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-2-75-82

Введение

Пространственное разрешение спутниковых изображений является важнейшей технической характеристикой систем дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ). В сканирующих устройствах систем ДЗЗ съёмка осуществляется линейками фотоприёмников. Разрешающая способность определяется числом фотоприёмных элементов в линейке, фокусным расстоянием объектива и высотой съёмки. Для конкретной высоты орбиты полёта спутника оптическими средствами можно увеличить полосу обзора датчика, но за счёт пропорционального снижения разрешающей способности (Егошкин и др., 2015).

Увеличение пространственного разрешения космических систем наблюдения Земли является сложной научно-технической проблемой. При неизменной высоте полёта спутника и фокусного расстояния объектива разрешающую способность датчика можно повысить путём разработки линеек с большим числом фотоприёмных элементов. Создание подобных линеек связано с решением сложных технологических вопросов, особенно в тепловом инфракрасном (ИК) диапазоне спектра. Поэтому поиск других путей повышения детальности космической съёмки является актуальной и важной задачей.

Возможные подходы к увеличению разрешающей способности спутниковых сканирующих устройств основаны на формировании изображения с помощью нескольких ПЗС-линеек (прибор с зарядовой связью, *англ.* CCD — Charge-Coupled Device), одноимённые элементы

которых имеют субпиксельные смещения полей зрения. Пусть d — расстояние между центрами соседних фотоприёмных элементов одной линейки фотоприёмников. Тогда при использовании N линеек они устанавливаются со смещением d/N между одноимёнными элементами соседних линеек. Теоретически это позволяет формировать изображение «виртуальной» линейки с плотностью пикселей, большей в N раз (рис. 1).

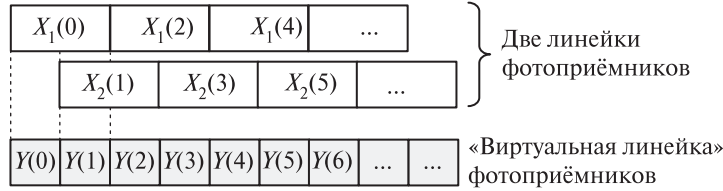


Рис. 1. Расположение двух линеек фотоприёмников с субпиксельным смещением полей зрения на 0,5 пикселя

В общем случае комплексирование данных от нескольких линеек является сложной задачей, сочетающей ряд разнородных аспектов. Во-первых, зачастую площадь фотоприёмного элемента, по которой идёт интегрирование светового потока, для реальной линейки больше площади элементов «виртуальной» линейки. Это требует соответствующей апертурной коррекции. Во-вторых, субпиксельные сдвиги размером ровно d/N не всегда могут быть обеспечены из-за искажений геометрии сцены при реальной съёмке Земли из космоса. Игнорирование этого явления приводит к заметному ухудшению качества комплексирования. Актуальна (особенно в тепловом ИК-диапазоне) задача повышения пространственного разрешения в $K < N$ раз, с тем чтобы использовать имеющуюся избыточность для повышения радиометрического качества снимков, однако это сложная задача (особенно если N не делится на K нацело), практически не рассмотренная в литературе. Наконец, представляет интерес увеличение пространственного разрешения не только в направлении установки линейки фотоприёмников, но и в направлении сканирования, а такой двухмерный случай значительно более сложен.

В статье рассматривается общее решение задачи комплексирования с целью повышения пространственного и радиометрического разрешения съёмки.

Модель формирования изображений

Формирование изображений набором линеек фотоприёмников можно представить в виде схемы (рис. 2).



Рис. 2. Процесс формирования изображений при съёмке Земли

Мгновенно формируемое оптикой изображение подстилающей поверхности $S(\theta, \vartheta)$ геометрически искажается из-за процесса сканерной съёмки, в результате постепенно формируется изображение $S(x, y)$. Это изображение интегрируется по площади фотоприёмного элемента $S'(x, y) = S(x, y) * П(x, y)$, где $*$ — операция свёртки; $П(x, y)$ — П-образная функция с размером, соответствующим фотоприёмнику. Далее из $S'(x, y)$ формируются дискретные изображения $D_n(k, l)$, где k — номер фотоприёмника линейки, l — номер опроса.

Если период опроса линеек одинаков, а геометрия съёмки изменяется не слишком быстро, то изображения от отдельных линеек отличаются только плоскопараллельным сдвигом:

$D_n(k, l) = S'(x, y): x = k + \tau_n, y = l + \eta_n$, где (τ_n, η_n) — вектор сдвига n -й линейки. Вектор сдвига зависит от установки линейки фотоприёмников в фокальной плоскости, выбора фаз опроса линеек, направления и скорости движения изображения в фокальной плоскости датчика.

Модель комплексирования изображений

Процесс комплексирования изображений может быть организован обращением схемы формирования (рис. 3).

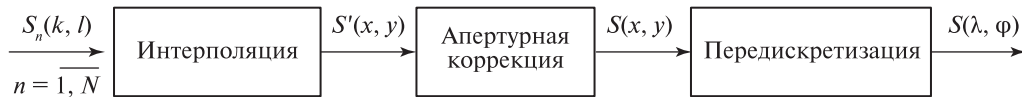


Рис. 3. Процесс комплексирования изображений

Вначале по дискретным отсчётам, порождённым всеми линейками фотоприёмников вместе, интерполяцией восстанавливается непрерывное изображение $S'(x, y)$:

$$S_{\perp n}(x, y) = S'(x, y) \sum_{k, l} \delta(x - \tau_n - k) \delta(y - \eta_n - l), \quad (1)$$

где $n = \overline{1, N}$, $\delta(x)$ — дельта-функция, в суммировании участвуют $(l, k) \in Z^2$, которая в общем случае является наиболее сложной.

Далее при необходимости выполняется коррекция расфокусировки, возникшей из-за слишком больших размеров фотоприёмников. Наконец, формируется новое дискретное изображение; как правило, этот процесс совмещён с геометрической трансформацией, поэтому сетку для передискретизации целесообразно считать произвольной.

В отдельных частных случаях, важных для практики, некоторые стадии комплексирования могут быть упрощены и совмещены с другими. Так, в идеале режим съёмки организуется таким образом, чтобы отсчёты (1) в плоскости xu образовывали новую равномерную (прямоугольную или параллелограммную) решётку. При этом восстановления непрерывного изображения можно избежать, совместив интерполяцию и передискретизацию, и далее работать только с дискретным изображением. На рис. 4 представлены примеры соответствующих решёток для случая $N = 3$: слева — для $\tau_n = n/3, \eta_n = 0$; справа — для $\tau_n = \eta_n = n/3, \eta_n = 0, n = \overline{1, N}$. Отсчёты от трёх различных линеек показаны соответственно кружками, прямоугольниками и ромбами.

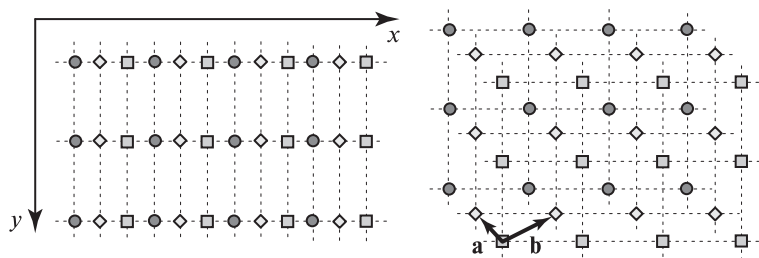


Рис. 4. Примеры равномерного расположения отсчётов в плоскости xu при $N = 3$ (объяснения в тексте)

Легко видеть, что для случая слева пространственное разрешение повышается в три раза вдоль оси x . Вдоль оси y при этом разрешение может быть легко повышено соответствующим увеличением частоты опроса линеек фотоприёмников.

Для случая справа разрешение повышается в $3/\sqrt{2} \approx 1,12$ раз вдоль «главного» диагонального направления и в $3/\sqrt{2} \approx 1,41$ раза вдоль другой диагонали.

Более общий подход к работе с изображениями на параллелограммной решётке дискретизации (с точки зрения нужд геометрической обработки) предложен в работе (Егошкин и др., 2015). Если решётка задана векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} (см. рис. 4, справа), то она может быть также задана векторами $\mathbf{a}' = \mathbf{M}_Z \mathbf{a}$, $\mathbf{b}' = \mathbf{M}_Z \mathbf{b}$, где \mathbf{M}_Z — произвольная целочисленная матрица с $|\mathbf{M}_Z| = 1$. Для восстановления реальных изображений целесообразно выбрать \mathbf{M}_Z из условия $|\mathbf{a}'| + |\mathbf{b}'| = \min$. Таким образом, формирование итогового изображения с лучшим разрешением требует лишь перестановки пикселей исходных изображений $S_n(m, n)$, $n = 1, N$, в соответствии с матрицей \mathbf{M}_Z .

Алгебраическая коррекция расфокусировки при комплексировании

Если для съёмки используются линейки фотоприёмников, спроектированные без учёта последующего комплексирования, возникает проблема расфокусировки изображений из-за слишком большого размера фотоприёмных элементов. Рассмотрим важный одномерный случай, когда пиксель реальной линейки в N раз больше пикселя «виртуальной» линейки. Для произвольной строки обозначим (опуская индекс l) дискретное изображение после интерполяции $X(i)$. Тогда связь между дискретным сигналом $Y(j)$ от идеальной «виртуальной» линей-

ки и сигналом $X(i)$ имеет следующий вид (см. рис. 1): $X(i) = \sum_{d=0}^{N-1} Y(i+d)$. Отсюда следует рекуррентное соотношение:

$$Y(j+N-1) = X(j) - \sum_{d=0}^{N-2} Y(j+d), \tag{2}$$

которое вполне определяет $Y(j)$ при $j \geq N-1$ с точностью до $(N-1)$ неизвестных начальных условий (НУ) вида $Y(0), Y(1), \dots, Y(N-1)$.

Неизвестные НУ находятся во взаимно-однозначном соответствии с «потерянными» сигналами, для которых отклик $X(i) = 0$. Базис таких сигналов образуют N -периодичные сигналы $Y_s(j)$, определённые по соотношению (2) для $X(i) = 0$ и нулевых НУ, за исключением $Y(s) = 1$.

На практике НУ выбираются из условия минимума энергии восстановленного изображения: $\|Y(j)\| \rightarrow \min$. Для этого восстановим по выражению (2) для нулевых НУ сигнал $Y'(j)$.

Тогда искомый сигнал: $Y(j) = Y'(j) - \sum_{s=1}^{N-1} \alpha_s Y_s(j)$, где неопределённые коэффициенты α_s , $s = \overline{1, N-1}$, определяются из условия $\|Y(j)\| \rightarrow \min$ стандартным для евклидова пространства образом. Заметим, что расчёт скалярных произведений на самом деле требует только операций сложения.

Аналогичная коррекция расфокусировки применима и в направлении съёмки. В более общем случае нахождение $Y(j)$ по $X(i)$ может быть выполнено винеровской фильтрацией. Однако алгебраический подход вычислительно более эффективен; кроме того, подбор НУ позволяет нивелировать краевые эффекты, что особенно важно для линеек с относительно малым числом пикселей. Заметим, что в соотношении (2) роль регуляризирующего параметра неявно выполняет размер области J , по которой находится $\|Y(j)\| \rightarrow \min$. Для длинных массивов данных целесообразно ограничить J , а расчёт НУ вести в скользящем окне заданного размера.

Интерполяция в условиях геометрических искажений

При сканерной съёмке разные линейки фотоприёмников фиксируют данные в разное время. Это приводит к тому, что субпиксельные «сдвиги» зависят от скорости и направления бега изображения в фокальной плоскости датчика (Егошкин и др., 2012):

$$\tau_n = \tau_n^{\text{НОМ}} + (n-1)\Delta_x, \quad \eta_n = \eta_n^{\text{НОМ}} + (n-1)\Delta_y, \quad (3)$$

где $(\tau_n^{\text{НОМ}}, \eta_n^{\text{НОМ}})$ — номинальный вектор сдвига; (Δ_x, Δ_y) — вектор учёта бега изображения. Если с учётом соотношений (3) отсчёты (1) в плоскости xu не образуют регулярную решётку, процесс комплексирования значительно усложняется.

В наиболее важном частном случае разрешение съёмки требуется повысить только вдоль расположения линеек, так как в направлении полёта спутника оно уже обеспечивается повышенной частотой опроса линеек. В этом случае величина η_n незначительна: интерполяция изображения $D_n(k, l)$ в направлении l корректна (поскольку заведомо выполнены условия теоремы Котельникова), что позволяет доопределить $D_n(k, l)$ для $l \notin Z$. В результате можно располагать линейки на произвольном расстоянии друга от друга и произвольно выбирать фазы их опроса, что упрощает конструкцию датчика, а задачу повышения разрешения позволяет рассматривать как одномерную.

В идеале для повышения разрешения в N раз вдоль оси x необходимы равномерные субпиксельные сдвиги на $\tau_n^{\text{НОМ}} = (n-1)/N$. Однако в соответствии с соотношениями (3) при $\Delta_x \neq 0$ равномерность нарушается (рис. 5).

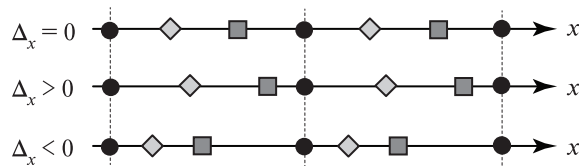


Рис. 5. Примеры неравномерного расположения отсчётов вдоль плоскости xu для $N = 3$

Данная неравномерность обязательно должна учитываться при интерполяции. Известны обобщения теоремы Котельникова на неравномерное расположение отсчётов (Хургин, Яковлев, 2010). Однако на практике удобнее использовать полиномиальную интерполяцию. Для фиксированной координаты x_0 построим полином $P(x)$ степени $(2N - 1)$, удовлетворяющий системе $2N$ -уравнений $P(k + \tau_n) = D_n(k)$, $|k + \tau_n - x_0| < 1$. Тогда интерполированная яркость в точке x_0 находится как $P(x_0)$.

В принципе, полиномиальную интерполяцию можно обобщить на случай повышения разрешения в $1 < K < L$ раз, с тем чтобы использовать остаточную избыточность для повышения радиометрического разрешения съёмки. Для этого достаточно понизить порядок интерполяционного полинома до $(2K - 1)$, а соответствующую переопределённую систему уравнений решать по методу наименьших квадратов. Однако это даёт только эвристическое решение, не гарантирующее даже непрерывность восстанавливаемого поля яркости.

Оптимальная интерполяция в спектральной области

В зарубежной литературе интерполяция обычно основывается на обобщениях теоремы Generalized Sampling Expansion (Cheung, 1993; Papoulis, 1977). Однако, на наш взгляд, с точки зрения получения оптимальных по шуму изображений более перспективен следующий метод «подавления спектральных зон».

Пусть изображение S имеет финитный спектр: $S(\omega, \xi) = 0$ для $(\omega, \xi) \notin \Omega$, где функции (ω, ξ) — спектр Фурье соответствующих функций; Ω — носитель спектра. Мы не ограничиваем форму Ω , поскольку исходный спектр изображения Земли деформируется в зависимости от геометрии съёмки и выбора частот дискретизации. Поставим цель: найти фильтры h_n , $n = \overline{1, N}$, чтобы восстановить изображение по дискретным отсчётам:

$$S(\omega, \xi) = \sum_n h_n(\omega, \xi) S_{\perp n}(\omega, \xi). \quad (4)$$

Обозначим $U(\omega, \xi) = \{(k, l) : (\omega - 2\pi k, \xi - 2\pi l) \in \Omega\}$ — множество перекрывающихся спектральных зон, $z_n = e^{-i2\pi\tau_n}$, $w_n = e^{-i2\pi\eta_n}$. Разобьём диапазон Ω на поддиапазоны Ω_d так, чтобы в пределах каждого Ω_d множества перекрывающихся зон были одинаковыми: $U(\omega, \xi) = U_d$ при $(\omega, \xi) \in \Omega_d$, где d — индекс поддиапазона.

Можно показать (Egoshkin, Eremeev, 2015), что восстановление по отсчётам (4) возможно тогда и только тогда, когда для каждого d относительно неизвестных $h_{n,d}$ разрешима система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_n h_{n,d} z_n^k w_n^l = \delta_{0,k} \delta_{0,l}, \quad (k, l) \in U_d. \tag{5}$$

При этом $\varepsilon_d = \sum_n |h_{n,d}|^2$ характеризует усиление шума в Ω_d . Поэтому нормальным решением СЛАУ соответствуют фильтры $h_n(\omega, \xi) = h_{n,d}$ при $(\omega, \xi) \in \Omega_d$, которые обеспечивают наилучшее отношение сигнал/шум при восстановлении по выражению (4).

Недостатком данного подхода является высокая сложность фильтров в общем случае. В принципе, можно предварительно оценить качество конкретных (более простых) фильтров анализом невязок СЛАУ и величин ε_d . Невязки СЛАУ показывают, насколько качественно решается задача повышения пространственного разрешения, а ε_d характеризует усиление шума. Первым делом стоит проверить самый простой фильтр вида $h_n(\omega, \xi) = 1$ при $(\omega, \xi) \in \Omega$, $h_n(\omega, \xi) = 0$ иначе. Если он является решением СЛАУ (5), то это признак того, что расположение отсчётов эквивалентно равномерному. Можно показать, что этот случай даёт минимальные величины ε_d , поэтому датчик и режимы его работы надо проектировать по возможности для эквивалентно-равномерного расположения отсчётов.

Экспериментальная апробация

Апробация предложенных подходов выполнялась на модельных данных, а также реальных данных спутника «Электро-Л». На рис. 6 показан пример повышения качества инфракрасных изображений: слева — изображение от одной линейки фотоприёмников, справа — результат комплексирования данных от четырёх линеек. Достигнуто повышение разрешения по вертикали в два раза, при этом расположение отсчётов было существенно неравномерным, из-за чего известные более простые подходы (Андреев и др., 2015) обеспечивали меньшую резкость на краях изображения. Коррекция расфокусировки не выполнялась, поскольку датчик спроектирован с учётом последующего комплексирования.

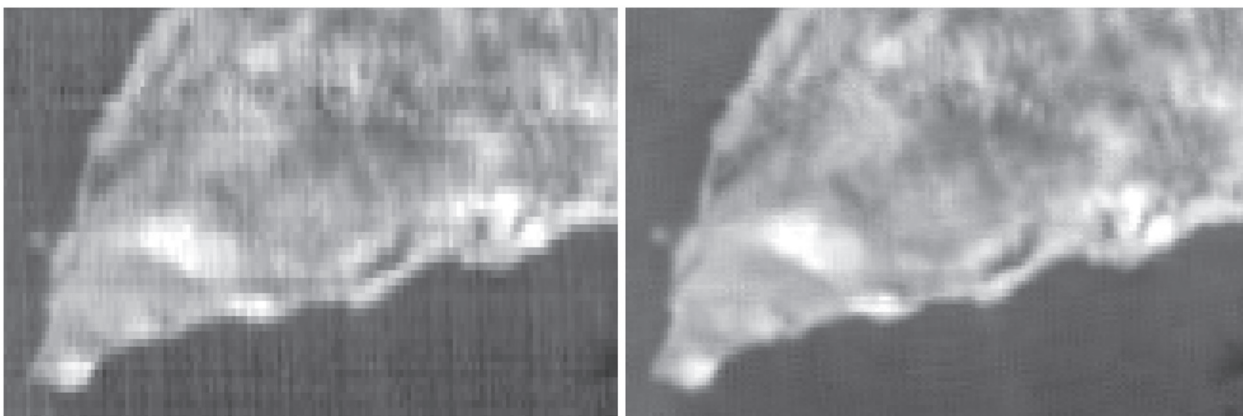


Рис. 6. Пример комплексирования инфракрасных изображений КА «Электро-Л»

Также апробация проводилась на модельных изображениях, при этом из исходного спутникового изображения высокого разрешения синтезировались изображения от отдельных

линеек. Результат комплексирования сравнивался с исходным изображением по среднеквадратическому отклонению. Моделирование подтвердило, что качество восстановления можно характеризовать коэффициентами усиления шумов ϵ_d . На рис. 7 слева показан пример изображения от одной из трёх линеек, справа — результат комплексирования. Для моделирования использовался увеличенный в три раза размер пикселя и обработка алгебраическим алгоритмом коррекции расфокусировки.

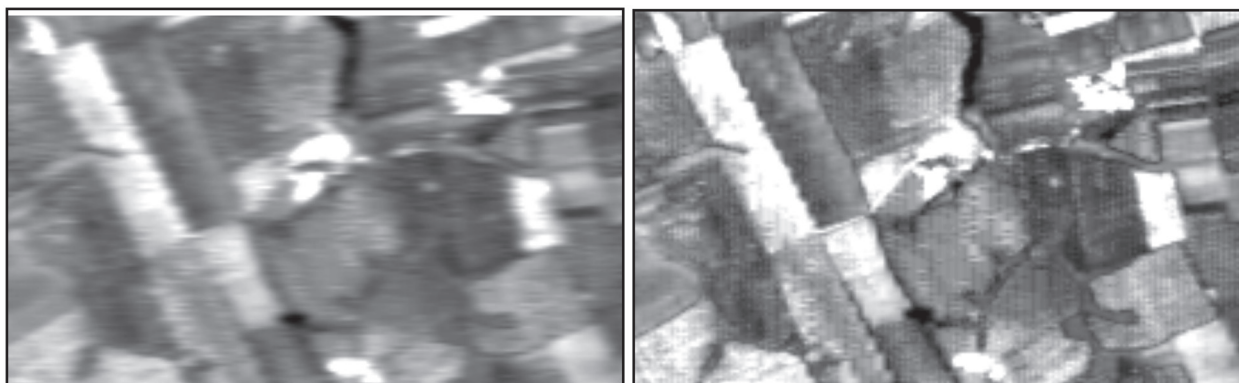


Рис. 7. Пример комплексирования модельных изображений

Таким образом, предложенные подходы позволяют вести вычислительно эффективное комплексирование спутниковых изображений. При необходимости можно оценить теоретический максимум повышения качества и, если это целесообразно, перейти на строго оптимальную обработку в спектральной области.

Литература

1. Андреев Р. В., Акимов Н. П., Бадаев К. В., Гектин Ю. М., Зайцев А. А., Рыжаков А. В., Смелянский М. Б., Сулиманов Н. А., Фролов А. Г. Многозональное сканирующее устройство для геостационарного метеоспутника «Электро-Л» // Ракетно-косм. приборостроение и информ. системы. 2015. Т. 2. Вып. 3. С. 33–44.
2. Егошкин Н. А., Еремеев В. В., Москвитин А. Э. Комплекирование изображений от линеек фотоприёмников в условиях геометрических искажений // Цифровая обработка сигналов. 2012. № 23. С. 40–44.
3. Егошкин Н. А., Еремеев В. В., Москвитин А. Э. Комплекирование данных дистанционного зондирования Земли от различных съемочных систем // Современные технологии обработки данных дистанц. зондирования Земли / под ред. В. В. Еремеева. М.: Физматлит, 2015. 460 с.
4. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Фinitные функции в физике и технике. 2-е изд. М.: Кн. дом «Либроком», 2010. 416 с.
5. Cheung K. F. A multidimensional extension of Papoulis' generalized sampling expansion with application in minimum density sampling // Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory / ed. R. J. Marks II. 1993. P. 86–119.
6. Egozhkin N. A., Ereemeev V. V. Increasing satellite imagery resolution by fusion of data from multiple spatially shifted CCDs: a spectral-based approach // Remote Sensing Letters. 2015. V. 6. No. 2. P. 116–124.
7. Papoulis A. Generalized Sampling Expansion // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1977. V. 24. P. 652–654.

Fusion of subpixelly-shifted images to increase spatial resolution of Earth observation systems

N. A. Egoshkin, V. V. Ereemeev, A. E. Moskvitin

Utkin Ryazan State Radio Engineering University, Ryazan 390005, Russia

E-mail: foton@rsreu.ru

The general model of fusion of the data obtained from several subpixelly-shifted lines of photodetectors installed in the focal plane of the imager is presented. The purpose is to increase the spatial resolution of obtained images of Earth surface. Due to finite size of the photodetectors, the result of the fusion process is defocused. An algebraic approach for mitigation of this effect by image deconvolution is presented. We consider the case of a uniform sampling obtained during optimal imaging process when fusion process actually comes down to a pixel rearrangement and applying of known filtering techniques. We also investigate the specifics of irregular sampling interpolation which is necessary due to geometrical distortions occurring during the imaging process (with scanning imagers). To solve this problem, a polynomial approximation of computationally complex filter banks is proposed. This simplifies the imaging process by significantly increasing the sampling rate. Also an important case is considered when spatial resolution is increased below theoretical maximum and residual abundance of data is used for signal-to-noise boost, which is especially important for processing of images in thermal infrared spectral range due to typically low signal and high noise present in such data. Strictly optimal image interpolation of non-uniform samples in frequency domain for images with a finite spectrum is presented. The interpolation technique is based on the method of frequency band suppression. A criteria of image noisiness and spatial resolution is introduced in the fusion process, which allows reducing computational cost of filtering in exchange for slight quality decrease of the results. The results of the processing using proposed techniques are presented on the real and modeled datasets.

Keywords: image integration, detail of observation, resolution increase, sharpening, signal to noise ratio

Accepted: 21.02.2020

DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-2-75-82

References

1. Andreev R. V., Akimov N. P., Badaev K. V., Gektin Yu. M., Zaitsev A. A., Ryzhakov A. V., Smelyanskii M. B., Sulimanov N. A., Frolov A. G., Mnogozonal'noe skaniruyushchee ustroystvo dlya geostatsionarnogo meteospuzhnika "Elektro-L" (Multispectral scanning device for geostationary weather satellite "Electro-L"), *Raketno-kosmicheskoe priborostroenie i informatsionnye sistemy*, 2015, Vol. 2, Issue 3, pp. 33–44.
2. Egoshkin N. A., Ereemeev V. V., Moskvitin A. E., Kompleksirovanie izobrazhenii ot lineek fotopriemnikov v usloviyakh geometricheskikh iskazhenii (Integration of images from the lines of photodetectors in the conditions of geometric distortion), *Tsifrovaya obrabotka signalov*, 2012, No. 23, pp. 40–44.
3. Egoshkin N. A., Ereemeev V. V., Moskvitin A. E., Kompleksirovanie dannykh distantsionnogo zondirovaniya Zemli ot razlichnykh s'emochnykh sistem (Integration of Earth Remote Sensing Data from Various Surveying Systems), *Sovremennye tekhnologii obrabotki dannykh distantsionnogo zondirovaniya Zemli*, V. V. Ereemeev (ed.), Moscow: Fizmatlit, 2015, p. 460.
4. Khurgin Ya. I., Yakovlev V. P., *Finitnye funktsii v fizike i tekhnike* (Finite functions in science and technics), Moscow: Librokom Publ., 2010, 416 p.
5. Cheung K. F., A multidimensional extension of Papoulis' generalized sampling expansion with application in minimum density sampling, *Advanced Topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory*, R. J. Marks II (ed.), 1993, pp. 86–119.
6. Egoshkin N. A., Ereemeev V. V., Increasing satellite imagery resolution by fusion of data from multiple spatially shifted CCDs: a spectral-based approach, *Remote Sensing Letters*, 2015, Vol. 6, No. 2, pp. 116–124.
7. Papoulis A., Generalized Sampling Expansion, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 1977, Vol. 24, pp. 652–654.