



Агошков В.И.¹, Кострыкин С.В.¹, Семенов А.Ю.²

Применение методов распознавания «образов» в задаче магнитной гидродинамики

¹ Институт вычислительной математики РАН

² Московский физико-технический институт

Таруса 2010

Введение

Экспериментальная установка, разработанная в ИФА им. А.М. Обухова, позволяет изучать вихревое течение, создающееся магнитогидродинамическим способом в тонком слое вращающейся жидкости.

Установка представляет собой прямоугольную кювету, заполненную проводящей жидкостью. Кювета поставлена на вращающуюся платформу с регулируемой угловой скоростью. На противоположных боковых сторонах кюветы установлены электроды, с помощью которых через жидкость пропускается электрический ток. Вихревое течение в кювете создается системой постоянных магнитов с шахматным изменением полярности.

За течением наблюдали как в состоянии покоя, так и при вращении кюветы. Для измерения скорости течения проводилась регистрация с помощью видеокамеры смещений частиц плавучей примеси и последующая обработка видео-кадров.

В результате были получены поля скоростей при различных значениях пропускаемого тока.

В.М. Пономарев, А.А. Хапаев, И.Г. Якушкин, Нелинейное экмановское трение и асимметрия циклонических и антициклонических когерентных структур в геофизических течениях, ДАН, 2009, том 425, №6, с. 821-826

Цели настоящей работы

- Построение математической модели физических процессов в представленном выше эксперименте.
- Формулировка обратной задачи для модели. Исследование разрешимости обратной задачи.
- Разработка алгоритма решения обратной задачи путем вариационной ассимиляции «образа» наблюдаемого поля скорости.
- Проверка адекватности модели путем численного решения обратной задачи и анализа результатов расчетов.

1. Математическая модель

Предлагается следующая математическая модель для описания процессов в эксперименте:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + r\right)u - fv + gh\xi_x = -P_x^a + \frac{1}{\rho}\tau_1 + F_1,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + r\right)v + fu + gh\xi_y = -P_y^a + \frac{1}{\rho}\tau_2 + F_2,$$

$$u_x + v_y + \xi_t = 0,$$

где $F = [F_1, F_2]^T$ - вектор сил «электромагнитного происхождения».

Из теории магнитной гидродинамики известно, что:

$$F = \frac{1}{c\rho}[\vec{j}, \vec{B}],$$

$$j = \sigma\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{B}]\right),$$

где \vec{V} - скорость движения вещества, σ - электромагнитная проводимость, c – скорость света.

Считаем что в нашем случае: $\vec{B} = (0, 0, B)^T$, $\vec{E} = (E_1, E_2, 0)^T$.

Математическая модель

Тогда:

$$F_1 = \frac{\sigma B}{c\rho} E_2 - \frac{\sigma B^2}{c^2 \rho} u,$$

$$F_2 = -\frac{\sigma B}{c\rho} E_1 - \frac{\sigma B^2}{c^2 \rho} v.$$

Уравнения движения принимают вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{r} \right) u - fv + gh\xi_x = -P_x^a + \frac{1}{\rho} \tau_1 + \frac{\sigma B}{c\rho} E_2,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{r} \right) v + fu + gh\xi_y = -P_y^a + \frac{1}{\rho} \tau_2 - \frac{\sigma B}{c\rho} E_1,$$

$$\tilde{r} = r + \frac{\sigma B^2}{c^2 \rho},$$

$$u_x + v_y + \xi_t = 0.$$

Математическая модель

Рассматриваем «стационарный» случай задачи. Тогда $u_x + v_y = 0$.

Введем функцию тока:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Предполагая, что «ветер» отсутствует и проводя простые вычисления, получаем уравнение:

$$\tilde{r}\Delta\phi + \beta\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\sigma B}{c\rho} \operatorname{div}E. \quad (1)$$

Математическая модель

Предположим поле $E = (E_1, E_2)$ потенциально, при этом

$$\vec{n} \cdot E = E_\Gamma \cdot \vec{n} \equiv E_{\Gamma,n} \text{ на } \partial\Omega$$

при заданном $E_{\Gamma,n}$.

Продолжая E_Γ «гармоническим» образом и переходя к $u = E - E_\Gamma$, рассматриваем задачу:

$$\tilde{r} \Delta \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{\sigma B}{c \rho} \operatorname{div} \vec{u} \text{ в } \Omega,$$

$$\phi = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

где $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ на $\partial\Omega \equiv \Gamma$.

2. Постановка обратной задачи

Найти ϕ, \vec{u} , т.ч.

$$\begin{cases} \tilde{r}\Delta\phi + \beta \frac{\partial\phi}{\partial x} = -k\operatorname{div}\vec{u}, \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0, \\ C\phi = \varphi_{obs}, \end{cases}$$
$$C\phi = \left[-\frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial x} \right]^T,$$

где Ω - односвязная область с кусочно-гладкой границей (например $\Omega = [0, a] \times [0, b]$),

$$\tilde{r} = r + \frac{\sigma B^2}{c^2 \rho}, \beta, k = \frac{\sigma B}{c \rho} \text{ - параметры,}$$

$\varphi_{obs} = [\varphi_{obs1}, \varphi_{obs2}]^T$ - наблюдаемый «образ» поля скоростей (поля движения красителей, алюминиевых частиц).

Предполагаем, что $\operatorname{div}\varphi_{obs} = 0$ и $\varphi_{obs} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0$.

3. Операторная постановка задачи и исследование разрешимости

Функциональные пространства (О.А. Ладыженская):

$$L_2(\Omega) \equiv (L_2(\Omega))^*$$

$J_0(\Omega)$ - пополнение в $(L_2(\Omega))^2$ множества гладких финитных в Ω соленоидальных вектор-функций

$$G_0(\Omega) = \left\{ \vec{u} \in (L_2(\Omega))^2 : \vec{u} = \nabla P \quad \forall P \in W_2^1(\Omega) \right\}$$

$$G_h(\Omega) = \left\{ \vec{u} \in (L_2(\Omega))^2 : \vec{u} = \nabla P \quad \forall P \in W_2^1(\Omega), \Delta P = 0 \text{ в } \Omega \right\}$$

$$(L_2(\Omega))^2 = J_0(\Omega) \oplus G_0(\Omega) \oplus G_h(\Omega)$$

$$H(\text{div}; \Omega) : \|\vec{u}\|_{H(\text{div}; \Omega)} = \left(\|\vec{u}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 + \|\text{div} \vec{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

$$H(\text{rot}; \Omega) : \|\vec{u}\|_{H(\text{rot}; \Omega)} = \left(\|\vec{u}\|_{(L_2(\Omega))^2}^2 + \|\text{rot} \vec{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

$$H_0(\text{div}; \Omega) = \{ \vec{u} \in H(\text{div}; \Omega) : \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \Gamma \}$$

$$H_0(\text{rot}; \Omega) = \{ \vec{u} \in H(\text{rot}; \Omega) : \vec{u} \cdot \vec{\tau} = 0 \text{ на } \Gamma \}$$

Операторная постановка задачи и исследование разрешимости

$$L\phi = \tilde{r}\Delta\phi + \beta \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad D(L) = W_{2,0}^2(\Omega)$$

$$L: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$$

$$B\vec{u} = -k\operatorname{div}\vec{u}, \quad D(B) = H_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap G_0(\Omega)$$

$$B: G_0(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$$

$$C\phi = \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial x} \right), \quad D(C) = \overset{0}{W}_2^1(\Omega)$$

$$C: L_2(\Omega) \rightarrow J_0(\Omega)$$

Тогда:

$$\begin{cases} L\phi = B\vec{u} & \text{в } L_2(\Omega) \\ C\phi = \varphi_{obs} & \text{в } J_0(\Omega). \end{cases}$$

(2)

Операторная постановка задачи и исследование разрешимости

Опр1. Задача (2) однозначно разрешима, если решение существует и оно единственно.

Опр2. Задача (2) плотно разрешима, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \vec{u} \in H_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap G_0(\Omega) : L\phi = B\vec{u}, \|C\phi - \varphi_{obs}\|_{(L_2(\Omega))^2} < \varepsilon.$$

На основе L, B, C вводятся сопряженные операторы:

$$L^*q = \tilde{r}\Delta q - \beta \frac{\partial q}{\partial x}, \quad D(L^*) = W_{2,0}^2(\Omega), \quad L^* : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$$

$$B^* = k\nabla, \quad D(B^*) = W_2^1(\Omega), \quad B^* : L_2(\Omega) \rightarrow G_0(\Omega)$$

$$C^*\vec{u} = -\operatorname{rot}\vec{u}, \quad D(C^*) = J_0(\Omega) \cap H(\operatorname{rot}; \Omega), \quad C^* : J_0(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega).$$

Операторная постановка задачи и исследование разрешимости

Исследуем систему однородных уравнений

$$\begin{cases} L\phi = B\vec{u}, & C\phi = 0, \\ L^*q = C^*\vec{w} & B^*q = 0. \end{cases}$$

Доказывается, что решения этих задач тривиальные. На основе этого факта и общих теорем анализа доказывается следующая теорема.

Теорема. Задача (2) однозначно и плотно разрешима.

Следствие. Если ϕ, \vec{u} есть решения (2), то вектор скорости есть $u = -\partial\phi / \partial y$, $v = \partial\phi / \partial x$, а вектор напряженности электрического поля есть $E = \vec{u} + E_T$.

4. Метод решения задачи

Рассмотрим задачи вариационной ассимиляции данных как метод решения обратных задач, задач точного управления.

Регуляризованное семейство задач оптимального управления (Агошков В.И. 2003г.):

- $$L\phi = f + Bu, C\phi = \varphi_{obs} \Leftrightarrow Au = g,$$

где $A = CL^{-1}B, g = \varphi_{obs} - CL^{-1}f,$

- $$Au = g \Rightarrow A^*Au = A^*g \Rightarrow \alpha\Lambda_C(u - u^c) + A^*Au = A^*g.$$

- Рассматривается семейство задач вида: найти $\phi = \phi(\alpha), u = u(\alpha)$
т.ч.

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu, \\ \inf_{v \in D(B)} J_\alpha(v) = J_\alpha(u), \end{cases} \quad (3)$$

где
$$J_\alpha(v) = \frac{\alpha}{2} \|v - u^c\|_{X_c}^2 + \frac{1}{2} \|C\phi(v) - \varphi_{obs}\|_{H_{ob}}^2,$$

$$\phi(v) : L\phi(v) = f + Bv.$$

Метод решения задачи

Система вариационных уравнений

$$\begin{cases} L\phi = f + Bu, \\ L^*q = C^*(C\phi - \varphi_{obs}), \\ \alpha\Lambda_C(u - u^c) + B^*q = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Метод решения задачи

Итерационный алгоритм решения задач (Агошков.В.И. 2003г.):

Если u^k задано, то u^{k+1} находится путем последовательного решения задач:

$$L\phi^k = f + Bu^k,$$

$$L^*q^k = C^*(C\phi^k - \varphi_{obs}), \quad (5)$$

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k (\alpha(u^k - u^c) + \Lambda_c^{-1}B^*q^k),$$

где $(\Lambda_c u, v)_{H_c} \equiv (u, v)_{X_c}, 0 < \tau_k < \infty$.

Данный итерационный алгоритм применяется для решения рассматриваемой задачи при $u \equiv \vec{u}, u^k \equiv \vec{u}^k \forall k$.

5. Численные эксперименты

$$\beta = 10^{-11} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$$

$$\rho = 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$$

$$R = 6 \cdot 10^6 \text{ м}$$

$$B = 0.32 \text{ Тл}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ мс}^{-1}$$

$$\sigma = 5 \div 50 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$$

$$k = \frac{\sigma B}{c \rho} \approx 10^{-12} \text{ кг}^{-1} \text{ с}^2 \text{ А}$$

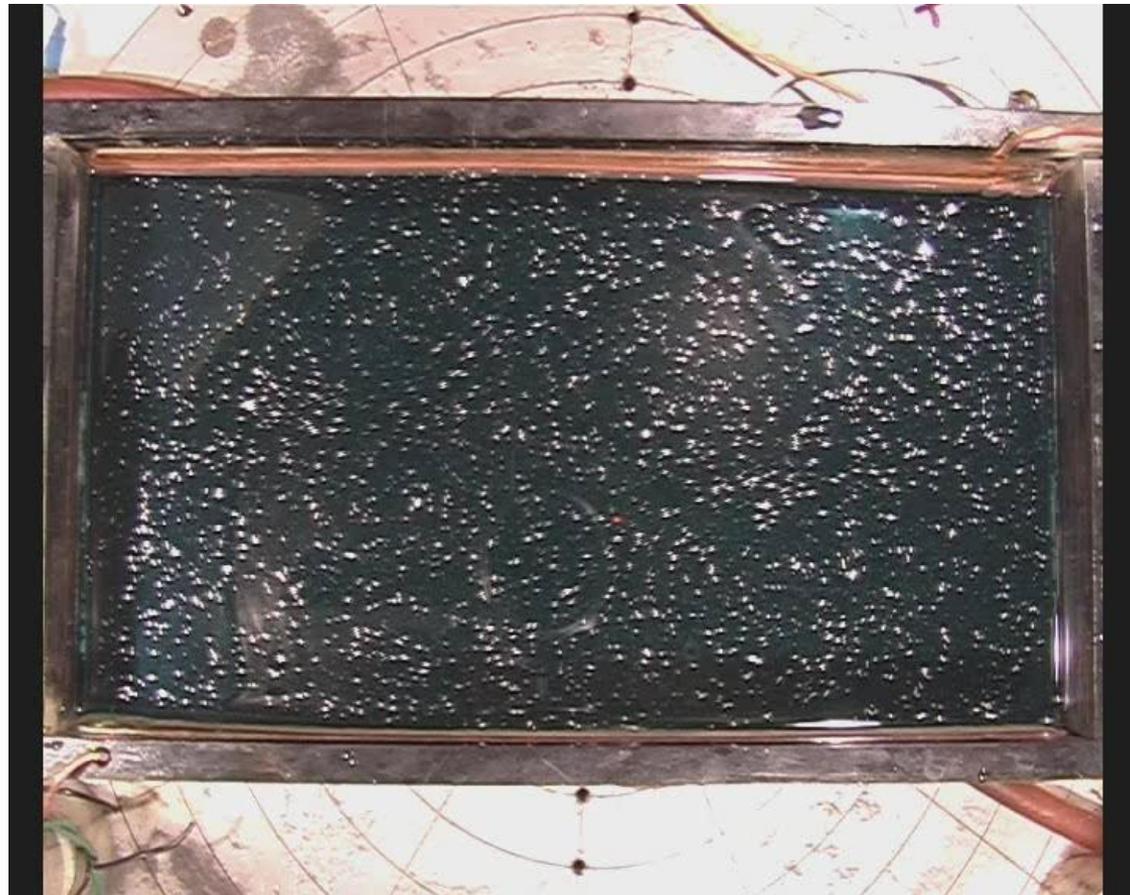
$$\frac{\sigma B^2}{c^2 \rho} \approx 10^{-20} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$$

$$r \approx 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$$

Расчет производился на сетке С.

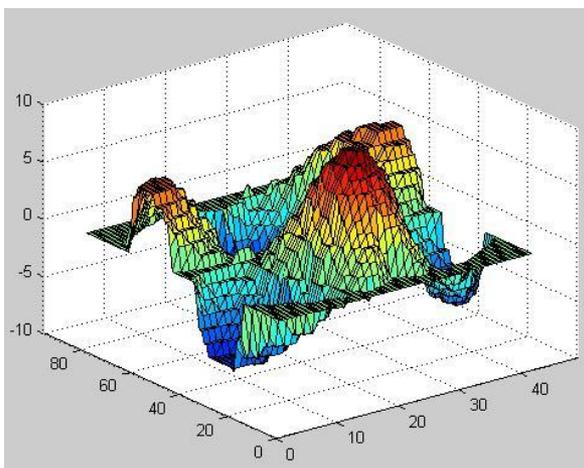
Критерий остановки итерационного процесса: несколько сот итераций.

$$\| \text{div} \varphi_{obs} \|_{L_2(\Omega)} \approx 0.028$$

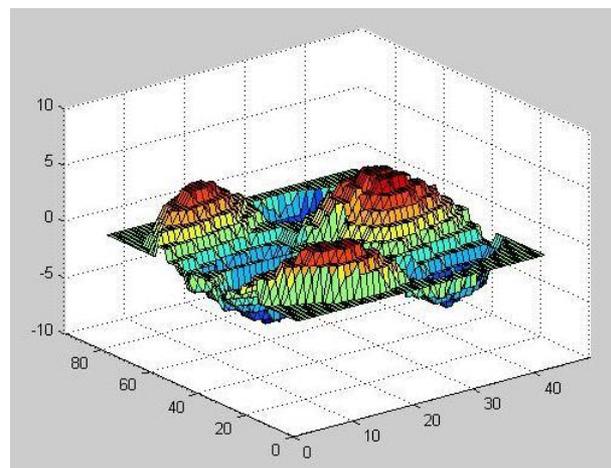


Структура наблюдаемого стационарного поля в кювете (данные представлены С.В. Кострыкиным)

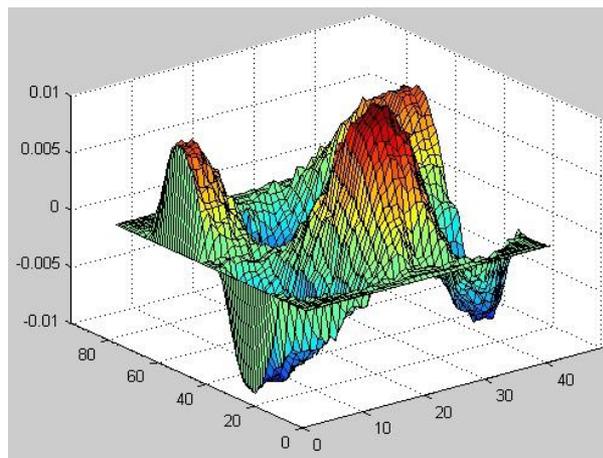
Численные эксперименты



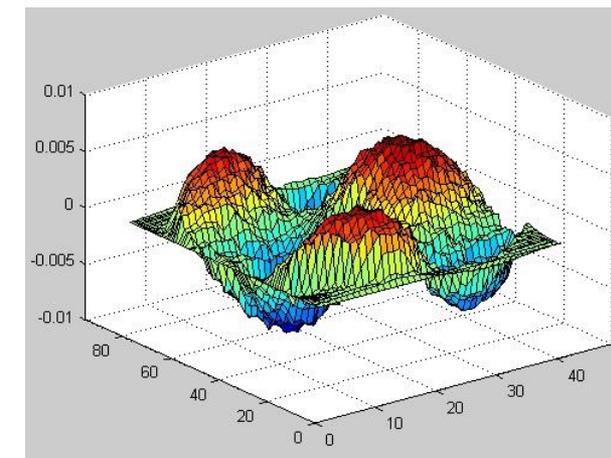
Первый компонент скорости (вертикальный масштаб надо разделить на 100)



Второй компонент скорости (вертикальный масштаб надо разделить на 100)

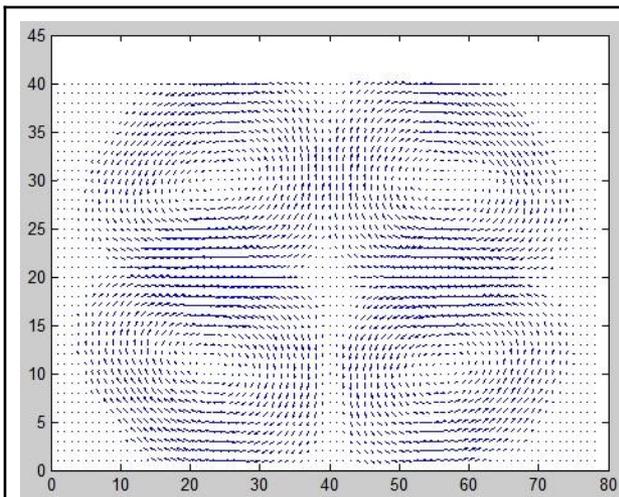


Первый компонент скорости
восстановленный из модели

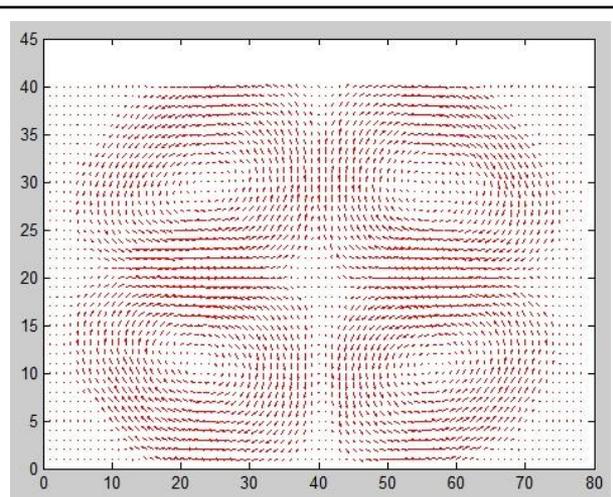


Второй компонент скорости
восстановленный из модели

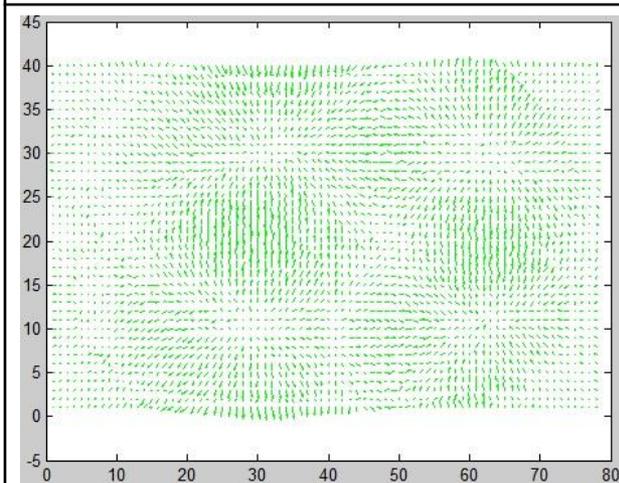
Численные эксперименты



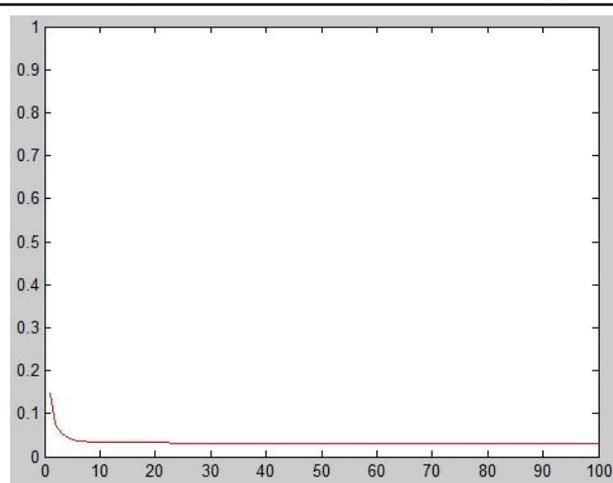
Поле скоростей



Поле скоростей восстановленное из модели

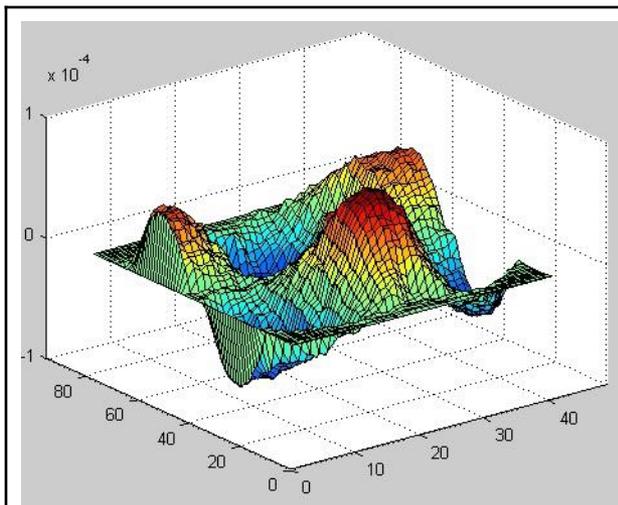


Управление (электрическое поле)

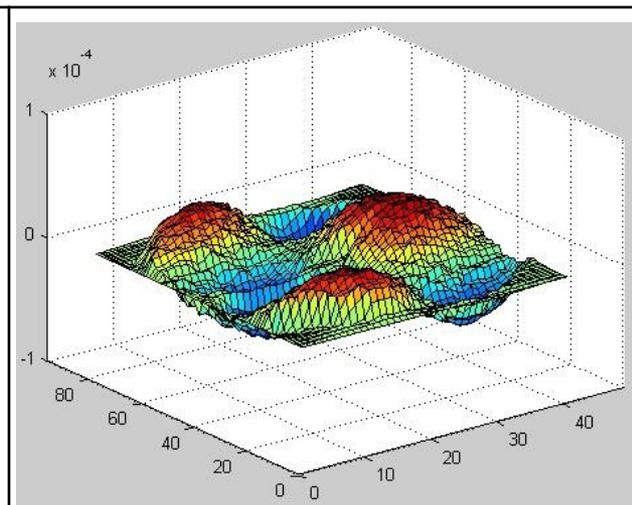


Невязка в зависимости от количества итераций

Численные эксперименты



Первый компонент управления



Второй компонент управления

Заключение

- Сформулирована и изучена обратная задача модели магнитной гидродинамики.
- Разработанная модель была применена для ассимиляции данных эксперимента по движению жидкости, проведенного в ИФА им. А.М. Обухова.
- Результаты эксперимента подтверждают возможность применения предложенной модели для описания процессов в рассматриваемом эксперименте.
- Результаты исследований показывают целесообразность распространения рассмотренных методов и подходов на более сложные задачи.



Спасибо за внимание!