



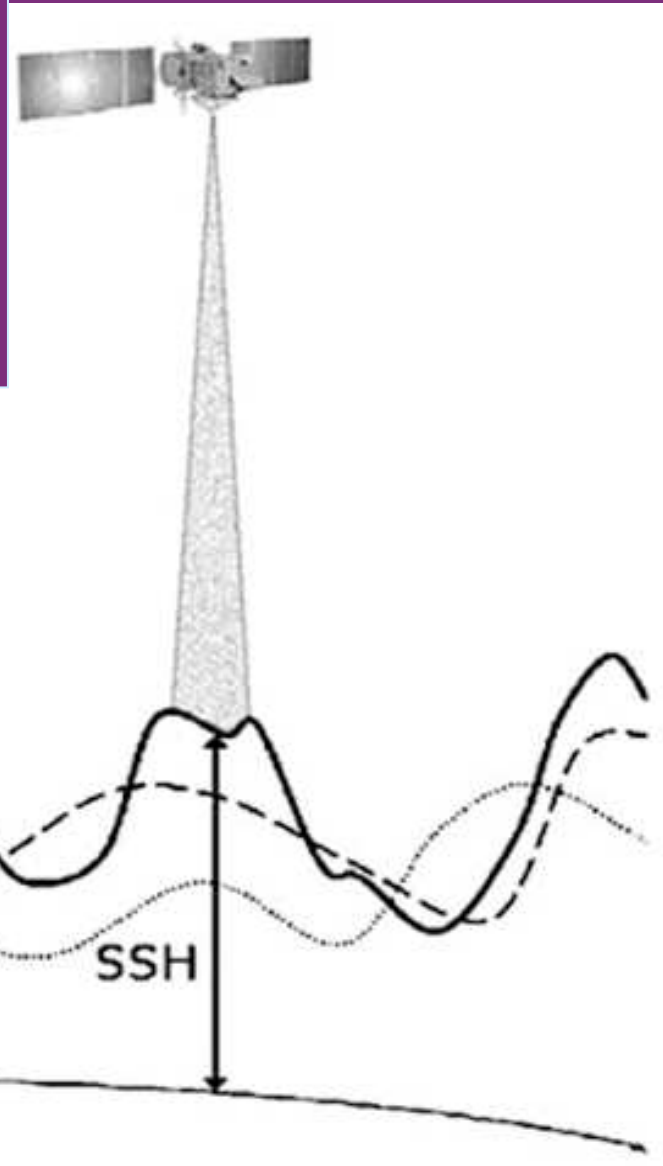
Санкт-Петербургский государственный университет

**Выделение и анализ стояче-
поступательных градиентно-вихревых
волн по данным спутниковых
измерений**

Т.В. Белоненко

Альтиметрические данные SLA ⁷

аномалии уровня моря относительно модели CLS01 со спутников Jason, TOPEX/Poseidon, ENVISAT, GFO-1, ERS1/2, GEOSAT, интерполированные в узлы сетки с шагом $1/3^\circ$ на $1/3^\circ$.

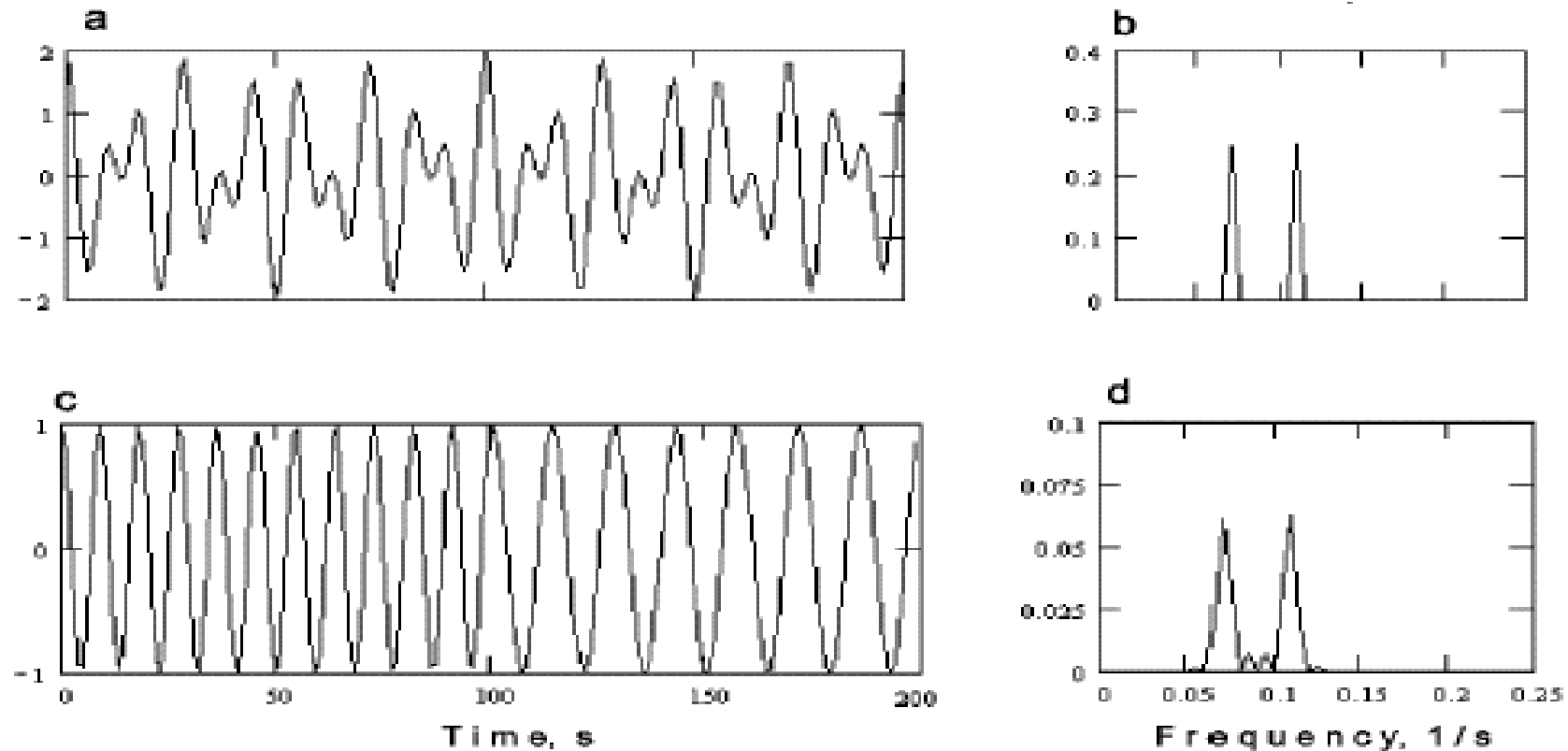


$$SLA = SSH - MSSH$$

$$MDT = MSSH - h_{\text{geoid}}$$

$$ADT = SLA + MDT$$

- Теория вейвлетов является мощной альтернативой анализу Фурье и дает более гибкую технику обработки сигналов, в частности, для анализа временных рядов. С позиций спектрального анализа – точного представления преобразованием Фурье произвольных сигналов и функций существует целый ряд его недостатков, в том числе:
- неприменимость к анализу нестационарных сигналов;
- преобразование Фурье даже для одной заданной частоты требует знание сигнала не только в прошлом, но и в будущем, что является теоретической абстракцией;
- базисной функцией при разложении в ряд Фурье является гармоническое колебание, которое математически определено на всей действительной оси и имеет неизменные во времени параметры;
- отдельные особенности сигнала (например, пики или разрывы) вызывают незначительные изменения частотного образа во всем интервале частот на всей действительной оси, которые «размазываются» по всей частотной оси, что делает их обнаружение по спектру практически невозможным;
- единственным приспособлением к представлению быстрых изменений сигнала, таких, как пики или перепады, является резкое увеличение числа гармоник, которые оказывают влияние на форму сигнала и за пределами локальных особенностей сигнала;
- по составу высших составляющих спектра практически невозможно оценить местоположение на временной оси особенностей сигнала и их характер.



Неоднозначность преобразования Фурье:

- a)*** – модельный ряд – сумма двух синусоид с частотами 0.062 и 0.105 Гц; ***b)*** – периодограмма суммы этих синусоид; ***c)*** – те же синусоиды, включающиеся последовательно; ***d)*** – периодограмма синусоид, включающихся последовательно.

Интегральным вейвлет-преобразованием функции называется выражение

$$W(a,b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

где b – сдвиг, a – масштаб

Таким образом, базис вейвлетов – это функции типа

$$\Psi \left(\frac{t - b}{a} \right)$$

$$a, b \in R, \quad a \neq 0$$

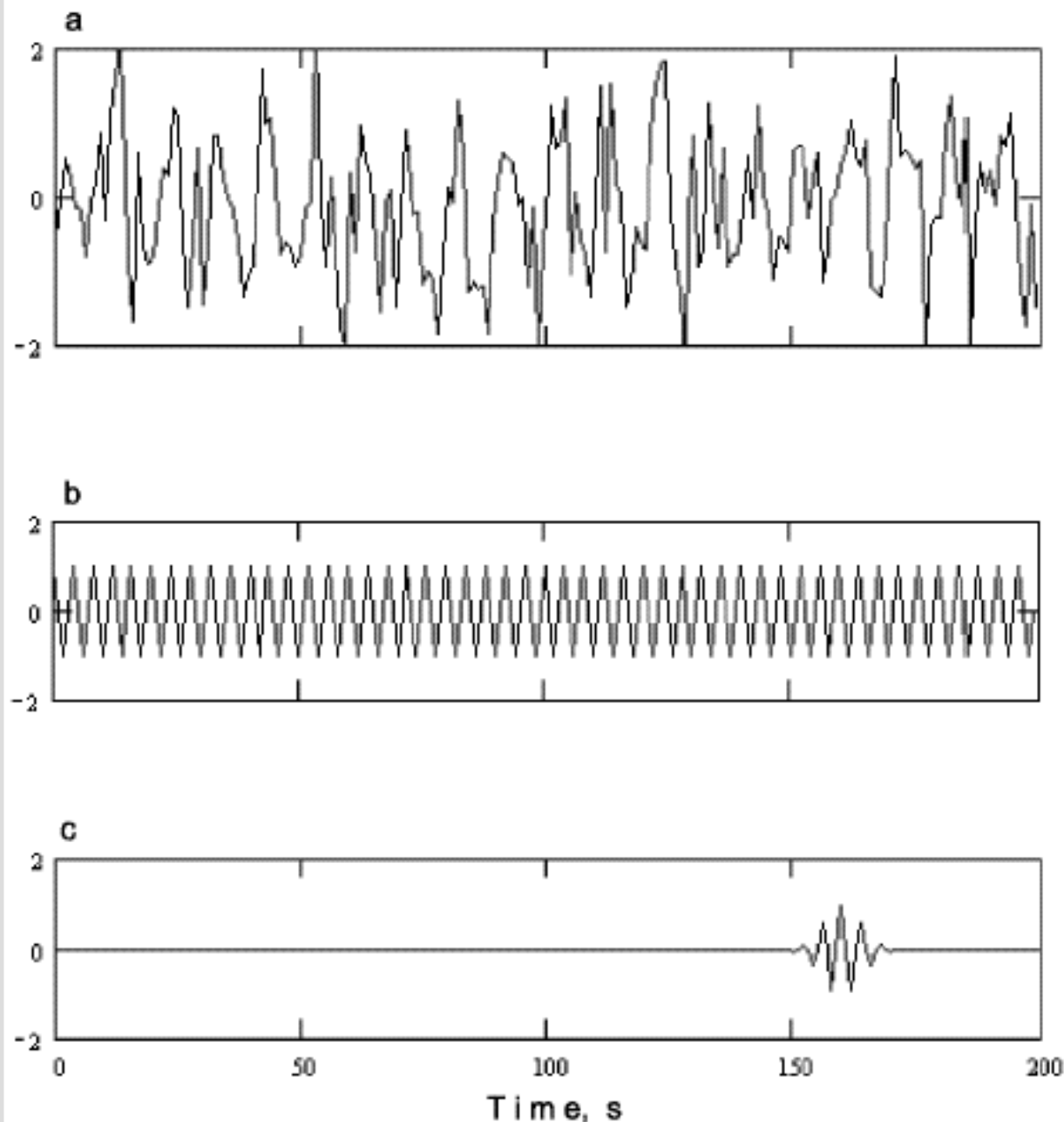
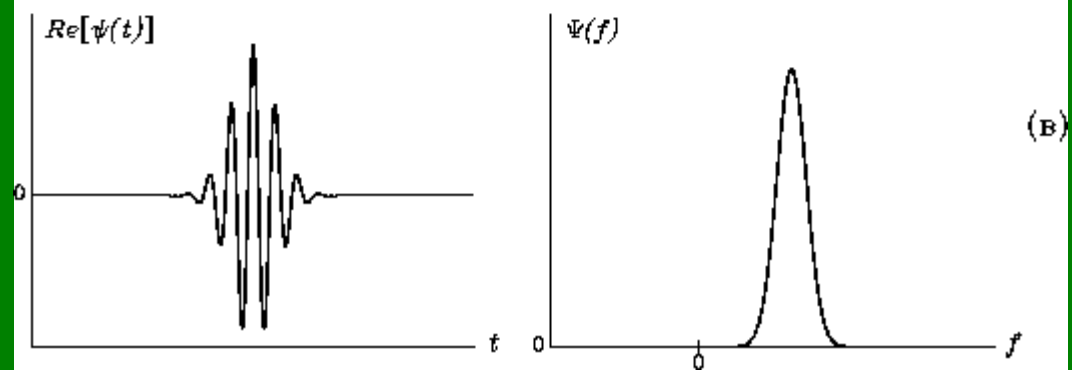
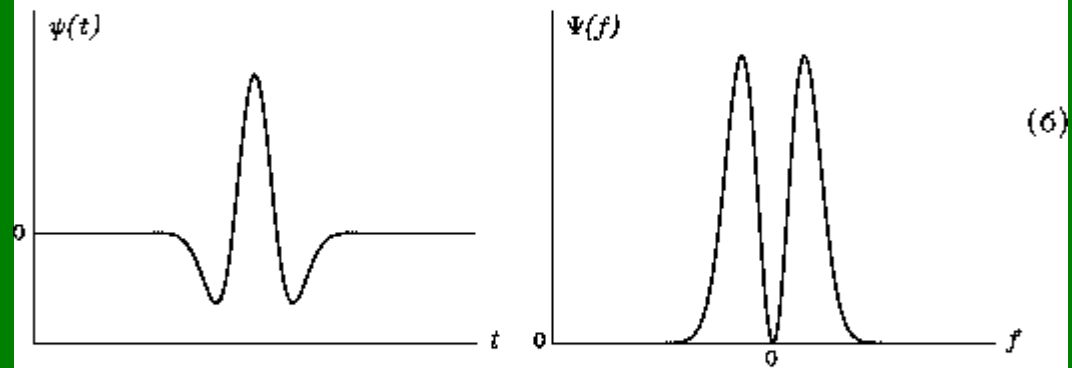
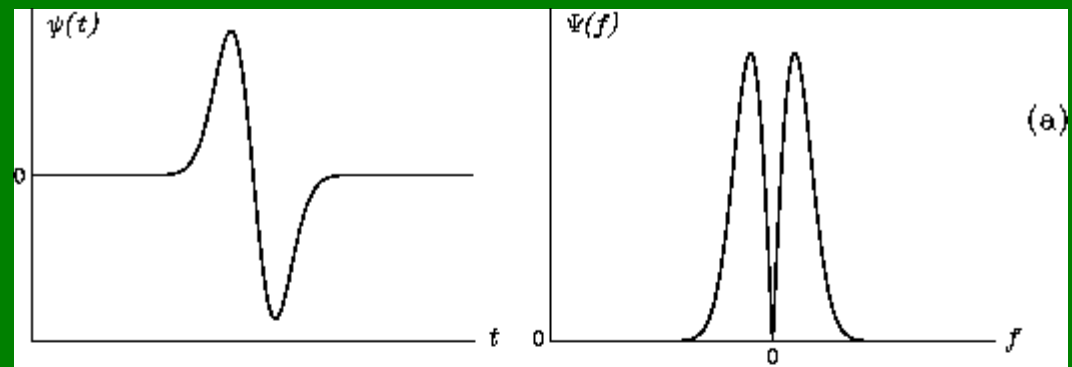


Рис. 2: Волны и вейвлеты.

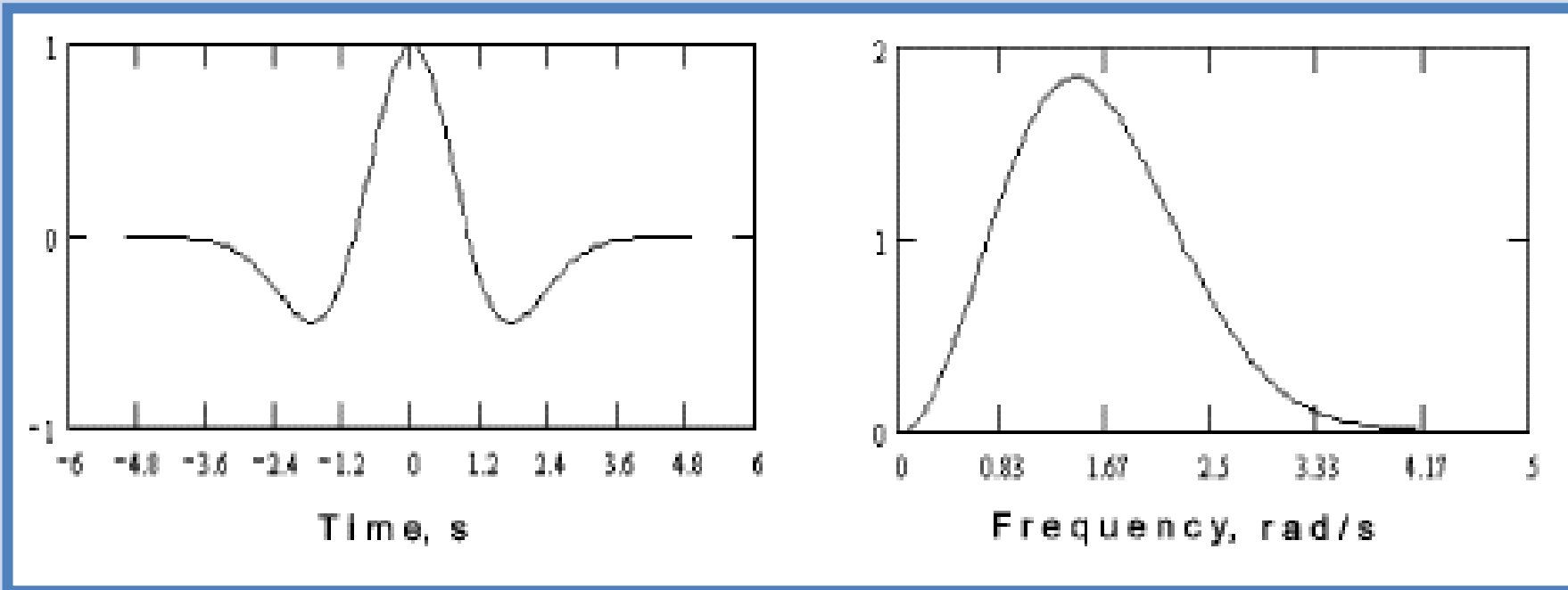
Преобразование Фурье – это корреляция между исходным рядом *a*) и волной *b*). Волна характеризуется значением частоты, поэтому преобразование Фурье является функцией одной переменной – частоты.

Вейвлет-преобразование – это корреляция между исходным рядом *a*) и вейвлетом *c*). Вейвлет характеризуется масштабом и локализацией на оси времени, поэтому вейвлет-преобразование зависит от двух аргументов – масштаба вейвлета и его положения на оси времени



МНАТ-вейвлет

***Этот вейвлет получается двукратным
дифференцированием функции Гаусса***



- Вейвлет МНАТ (слева) и его преобразование Фурье (справа).

Вейвлет Морле

Аналитическое представление вейвлета Морле задается следующим выражением:

$$\Psi(t) = e^{-t^2 / \alpha^2} \left[e^{ik_0 t} e^{k_0^2 \alpha^2 / 4} \right]$$

Параметр α задает ширину гауссианы, параметр k_0 - частоту плоской волны.

Обычно выбирают $\alpha = 2$ и $k_0 = 2\pi$.

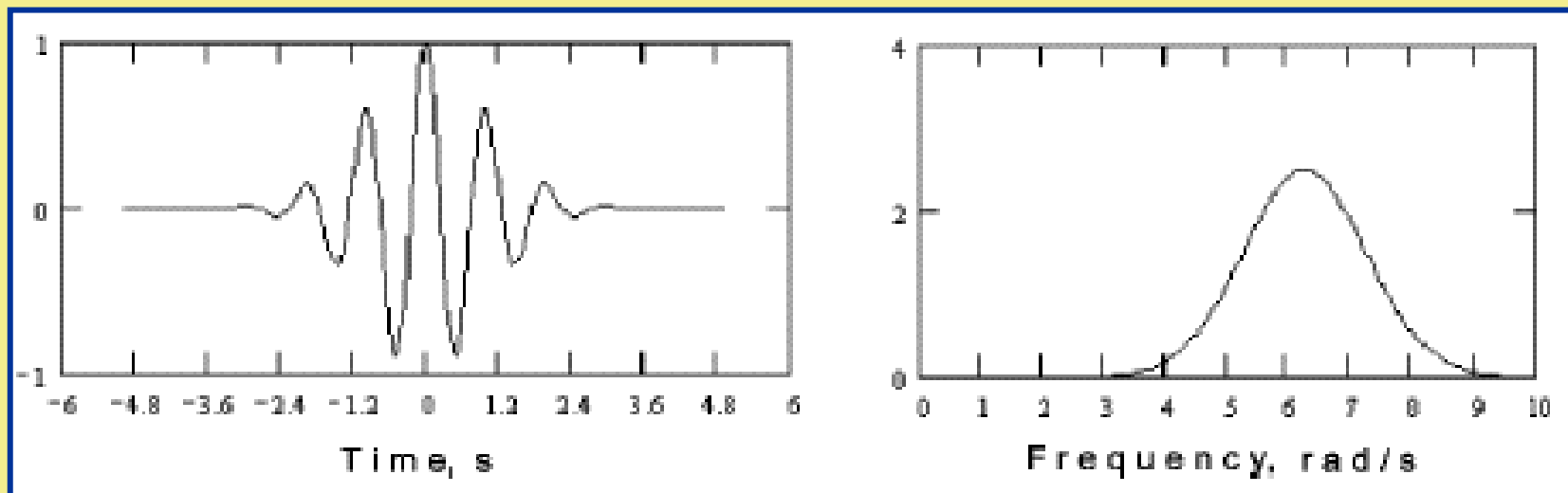
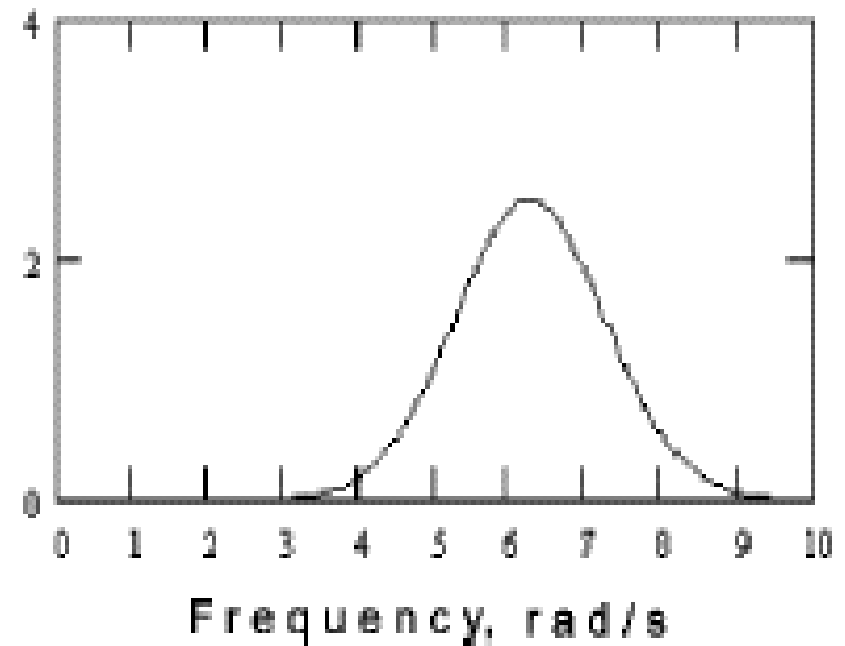
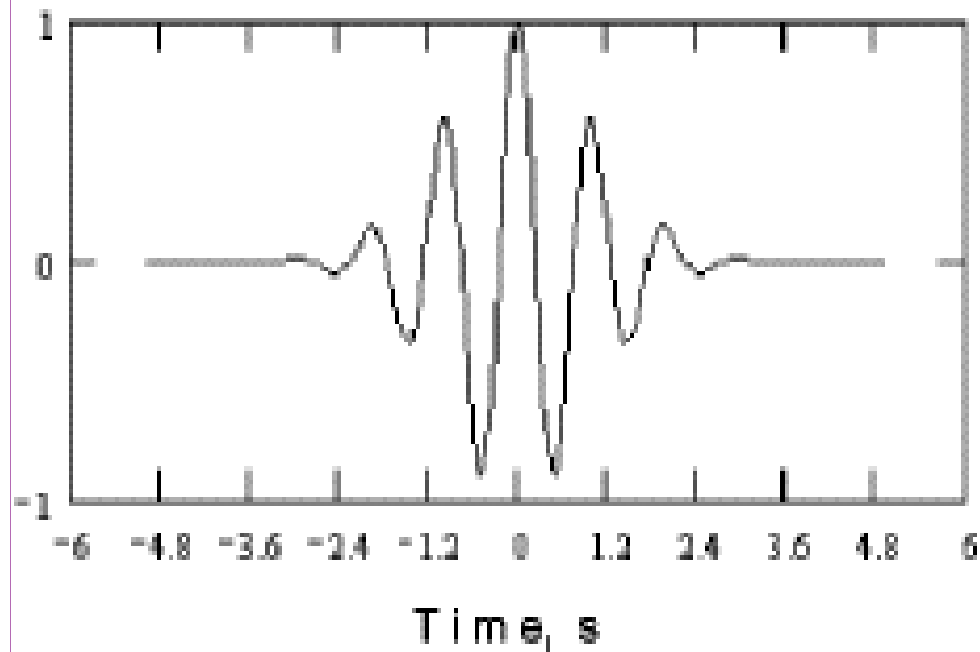


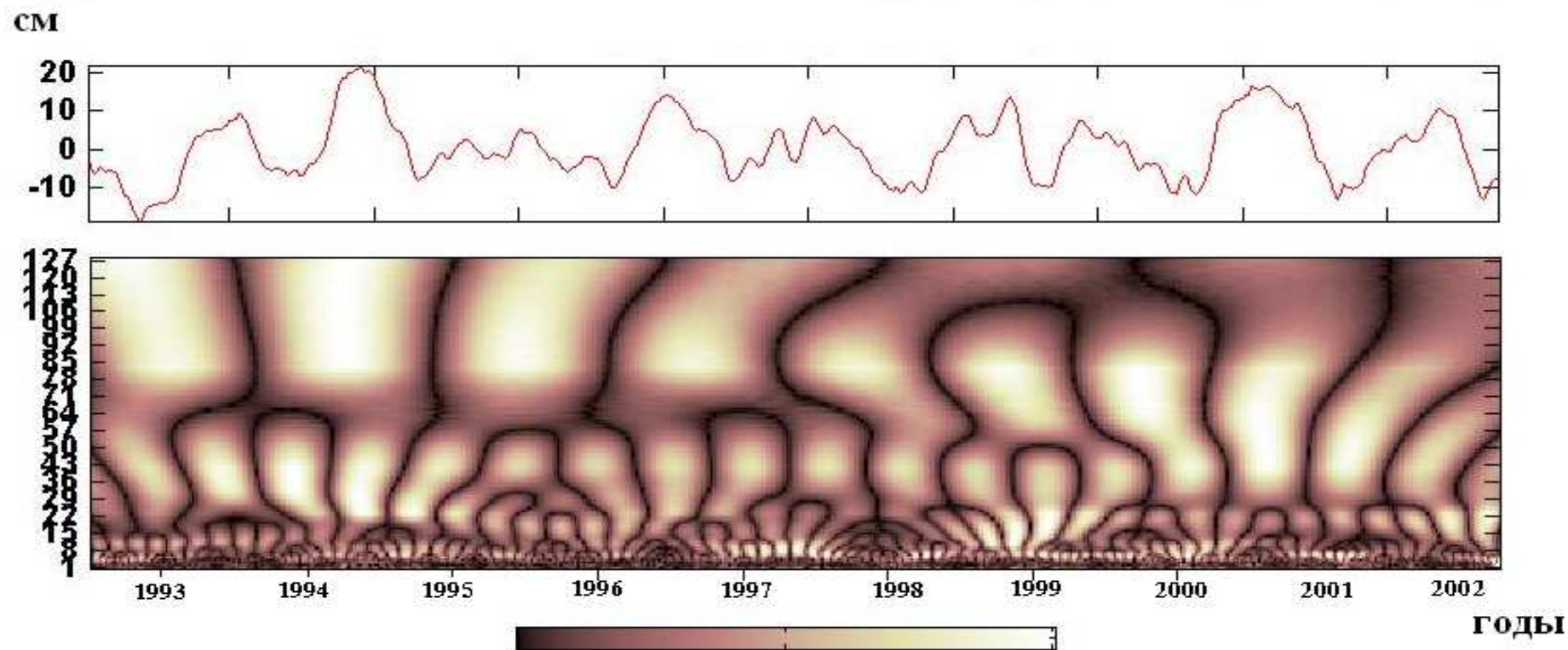
Рис. 4: Вещественная часть вейвлета Морле (слева) и его преобразование Фурье (справа).

**В пакете MATLAB вейвлеты Морле
задаются в виде:**

$$\Psi(t) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} \cos(5x)$$



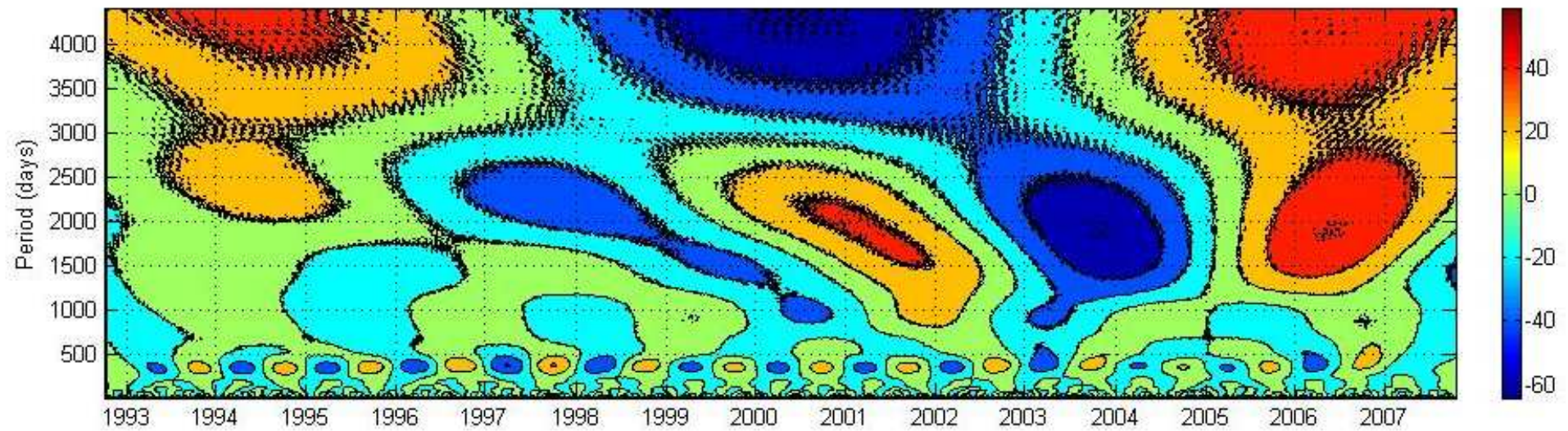
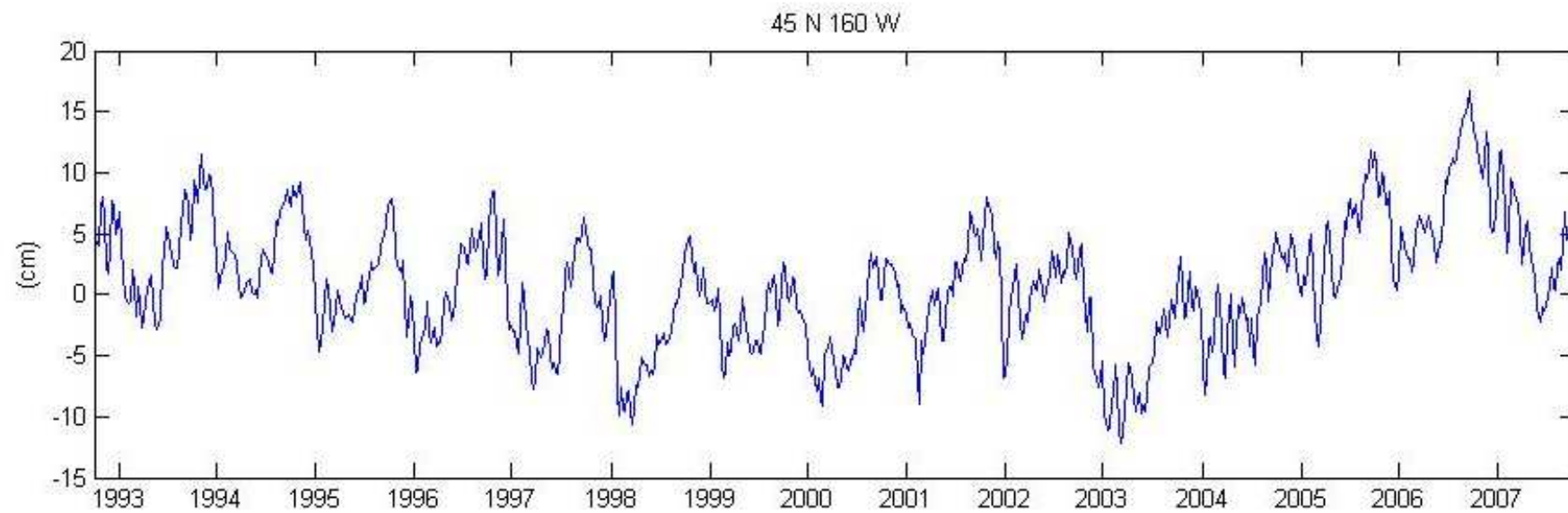
**Вейвлет-анализ уровня океана в пункте с координатами
62.89° с.ш., 161.66° в.д., расположенном в Курильском
районе в стрежне течения Ойясио у побережья Камчатки**

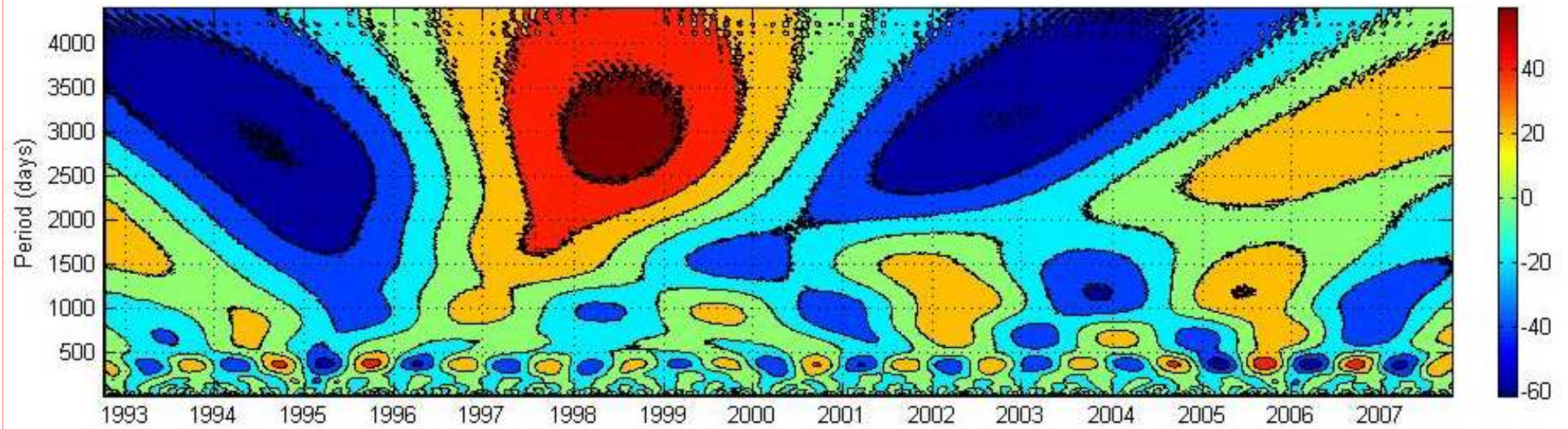
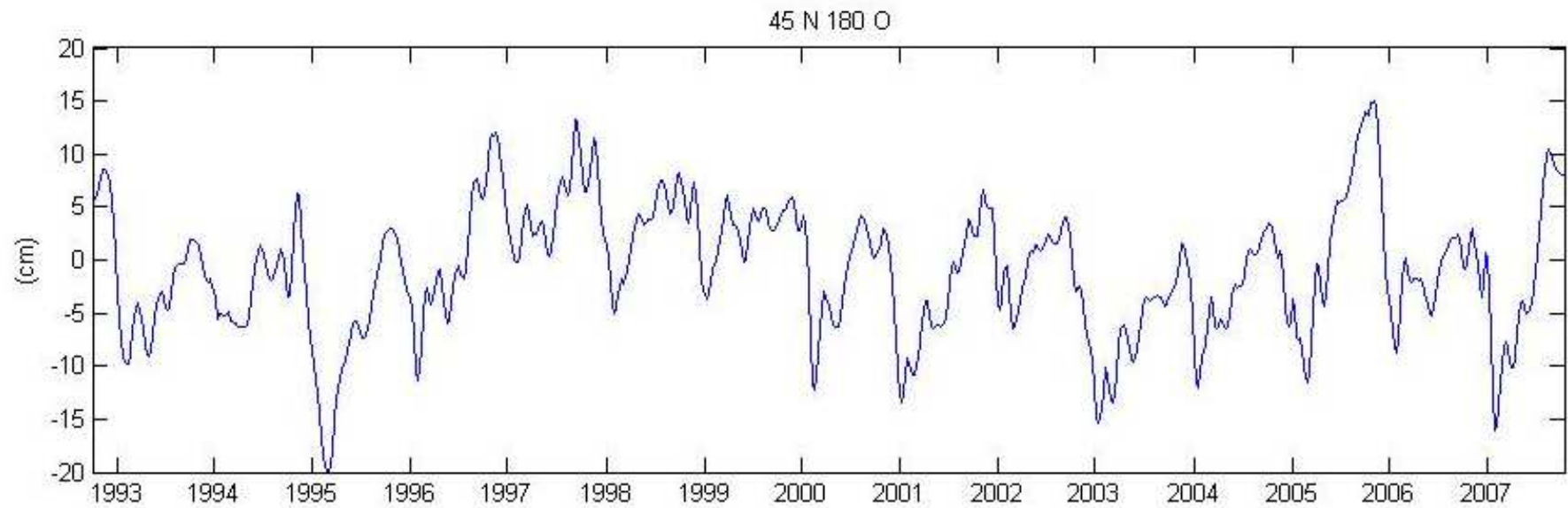


- **Рис. 5. График отклонений уровня океана в Курильском районе (вверху) и его вейвлет-изображение и шкала (внизу)**

«Явления с отрицательной вязкостью»

- Обратим внимание на то, что области повышенной энергии часто имеют определенный наклон относительно системы координат. Например, обширная область низкочастотного максимума энергии 1996-97 гг. наклонена вправо. Это значит, что максимум энергии, соответствующий масштабу 2 года, постепенно передается по другим масштабам в сторону более низких частот. Происходит перераспределение энергии по масштабам от более высоких к более низким. Локализованные максимумы энергии на вейвлет-изображении могут означать области энергоснабжения от внешних источников. Вытянутые области максимальной энергии связаны, вероятно, с передачей энергии от одних временных масштабов к другим.





- Когда этот наклон направлен из области больших периодов в область низких – идет поток энергии от крупномасштабных движений к мелкомасштабным, связанный с нелинейной генерацией турбулентности, обусловленной динамической неустойчивостью крупномасштабных движений.
- Когда в обратную сторону, то происходит энергоснабжение крупномасштабных движений от мелкомасштабных. Подобные процессы получили название в физике «движений с отрицательной вязкостью». Соответствующие коэффициенты турбулентного обмена имеют отрицательный знак.
- Подобные явления достаточно хорошо известны в метеорологии, когда энергоснабжение крупномасштабных струйных течений в высоких слоях атмосферы происходит от циклонов. В океане явления, связанные с отрицательной вязкостью, изучены чрезвычайно мало, хотя при решении обратных задач оценки коэффициентов турбулентного обмена нередко имеют отрицательное значение.

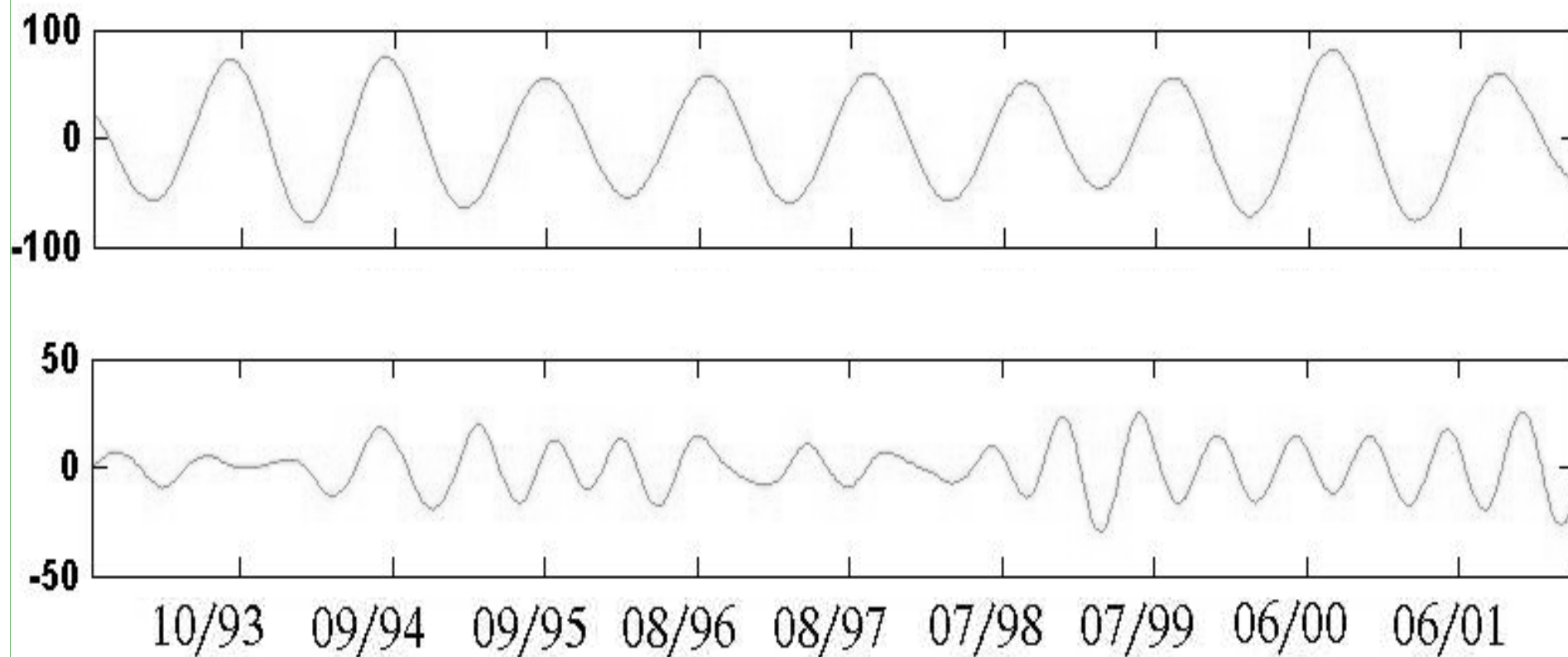


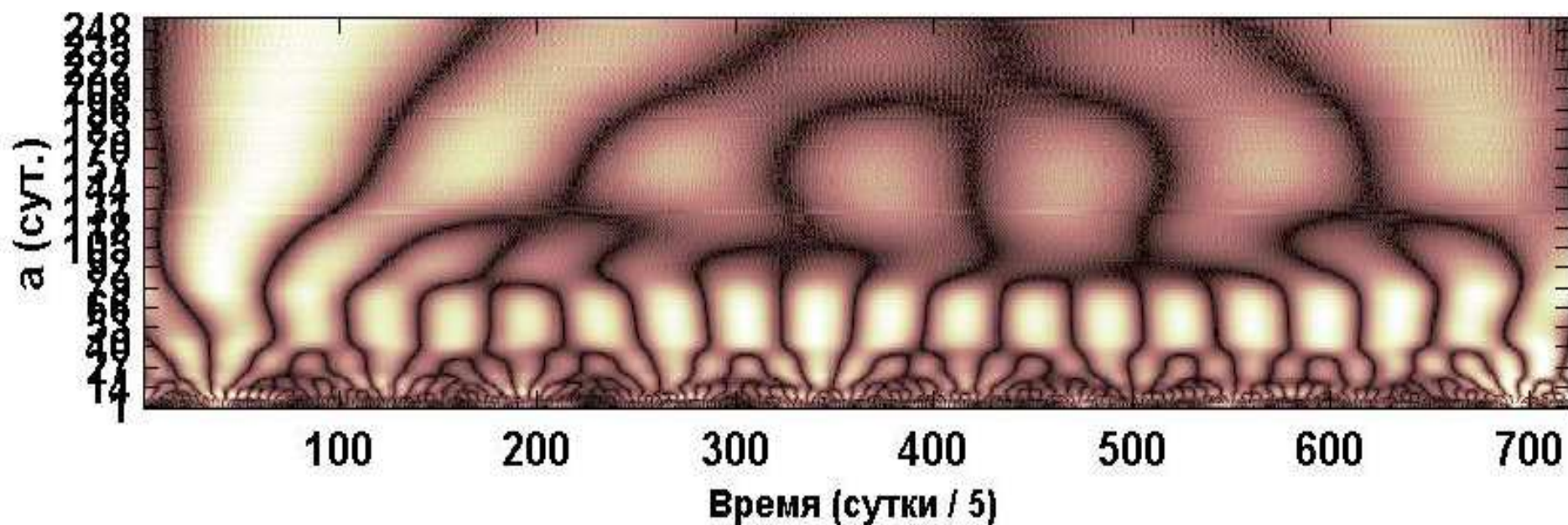
Рис. 6. Графики линейных коэффициентов вейвлет-преобразования для годовых (вверху) и полугодовых (внизу) колебаний уровня.

Другие примеры вейвлет-изображений

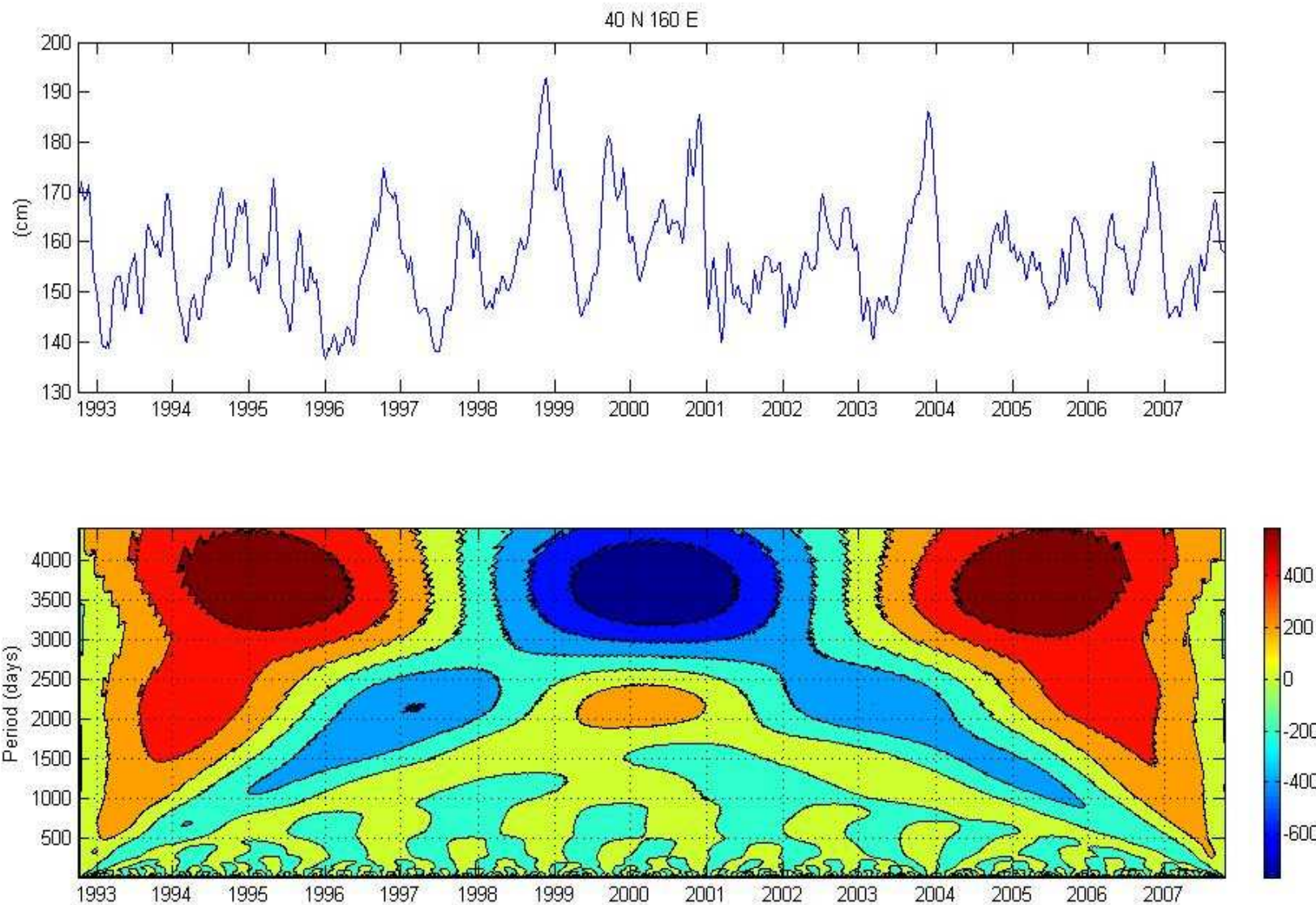
Температура в пункте 4.1



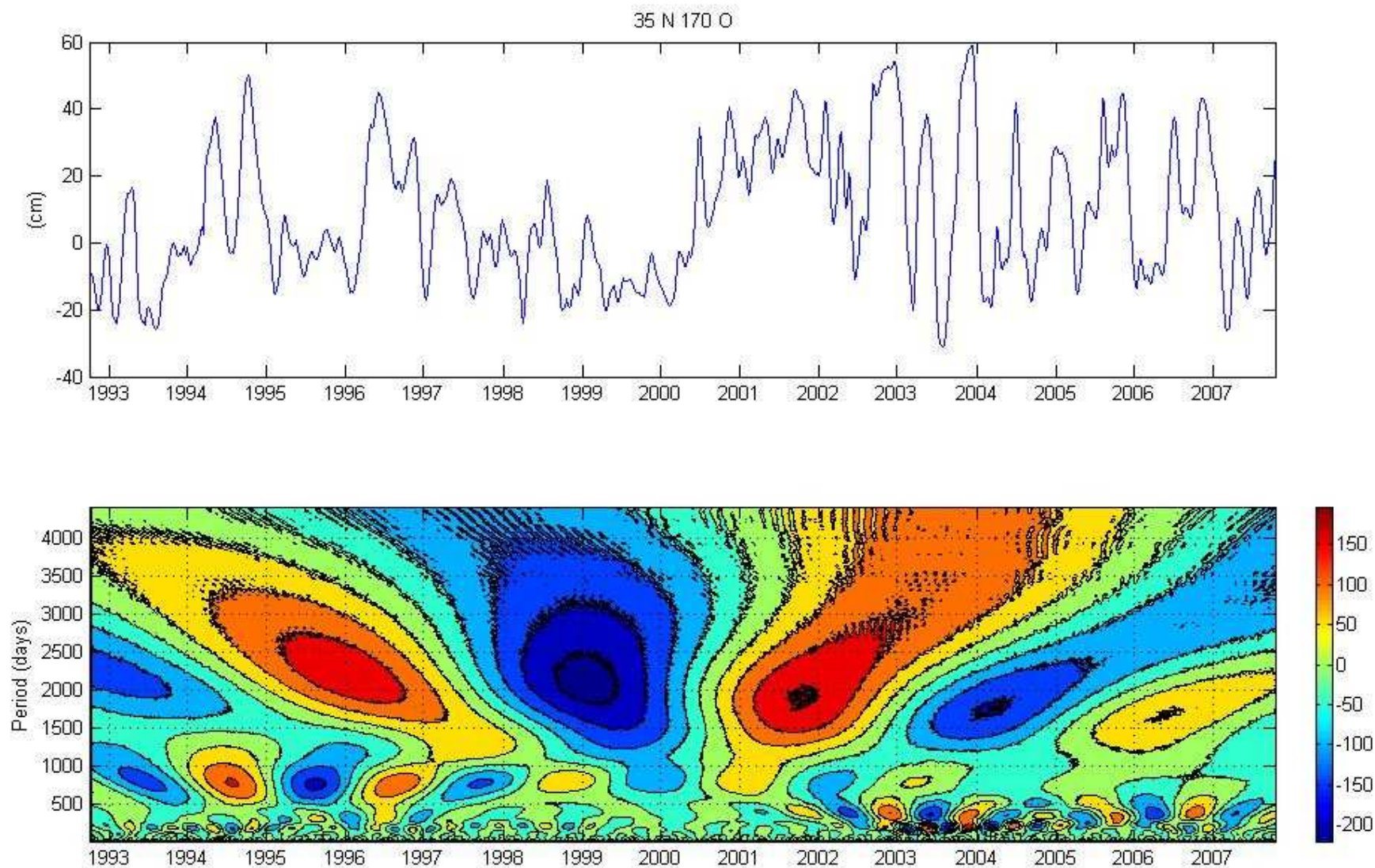
Коэффициенты вейвлет-преобразования



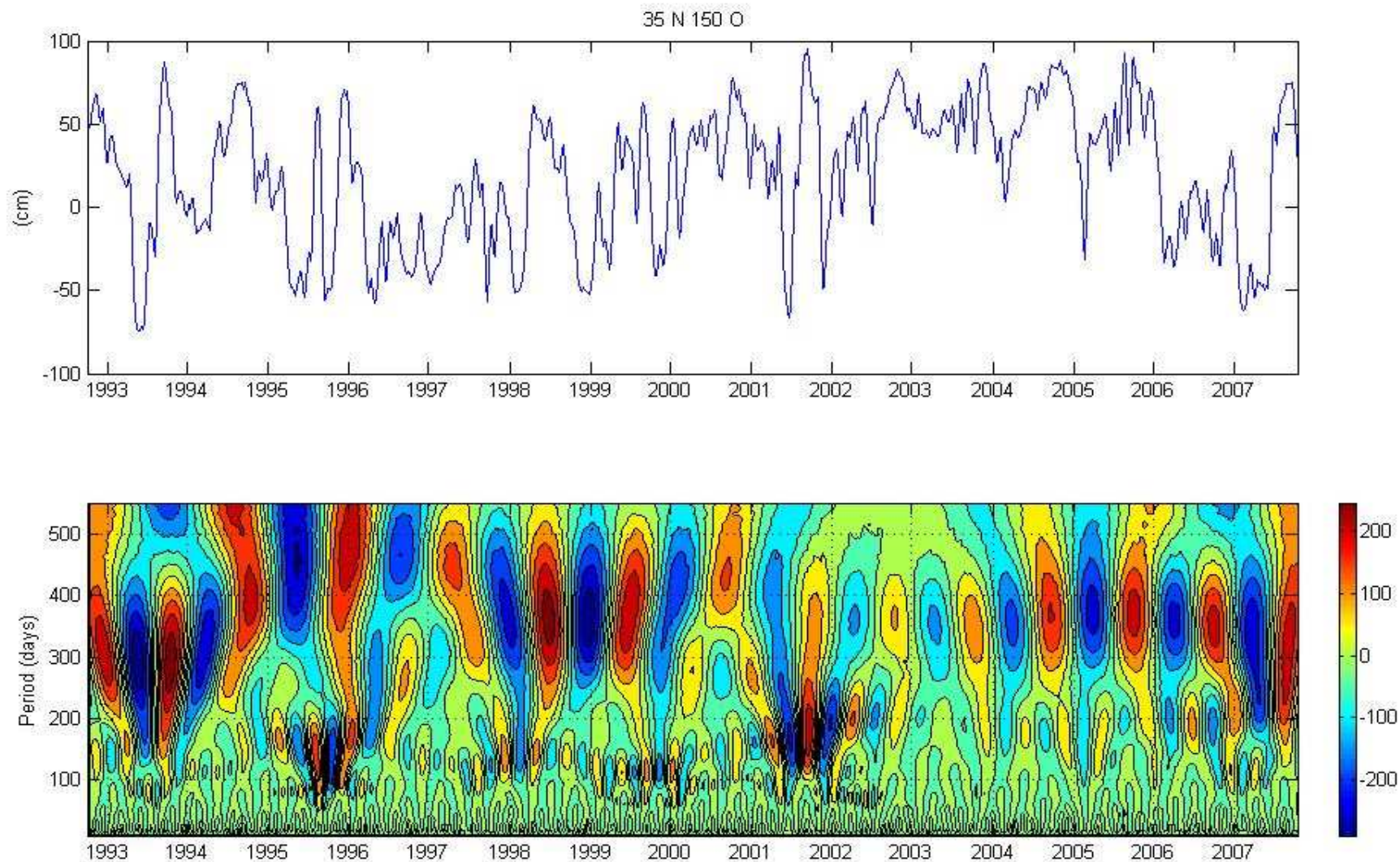
Уровень АДТ (вверху) и его вейвлет-изображение (внизу)



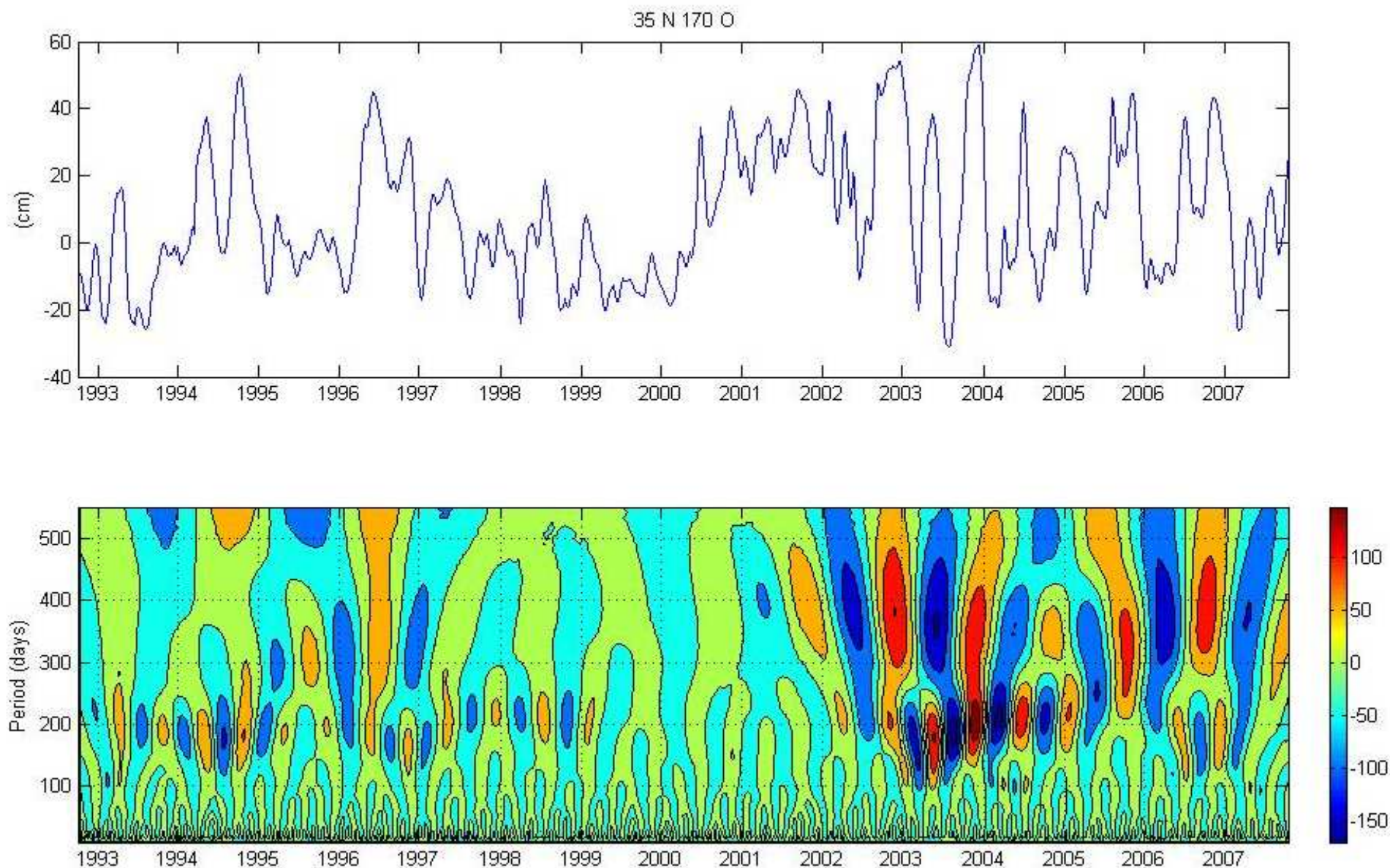
Уровень SLA (вверху) и его вейвлет-изображение (внизу)



Уровень SLA (вверху) и его вейвлет-изображение (внизу)



Уровень SLA (вверху) и его вейвлет-изображение (внизу)

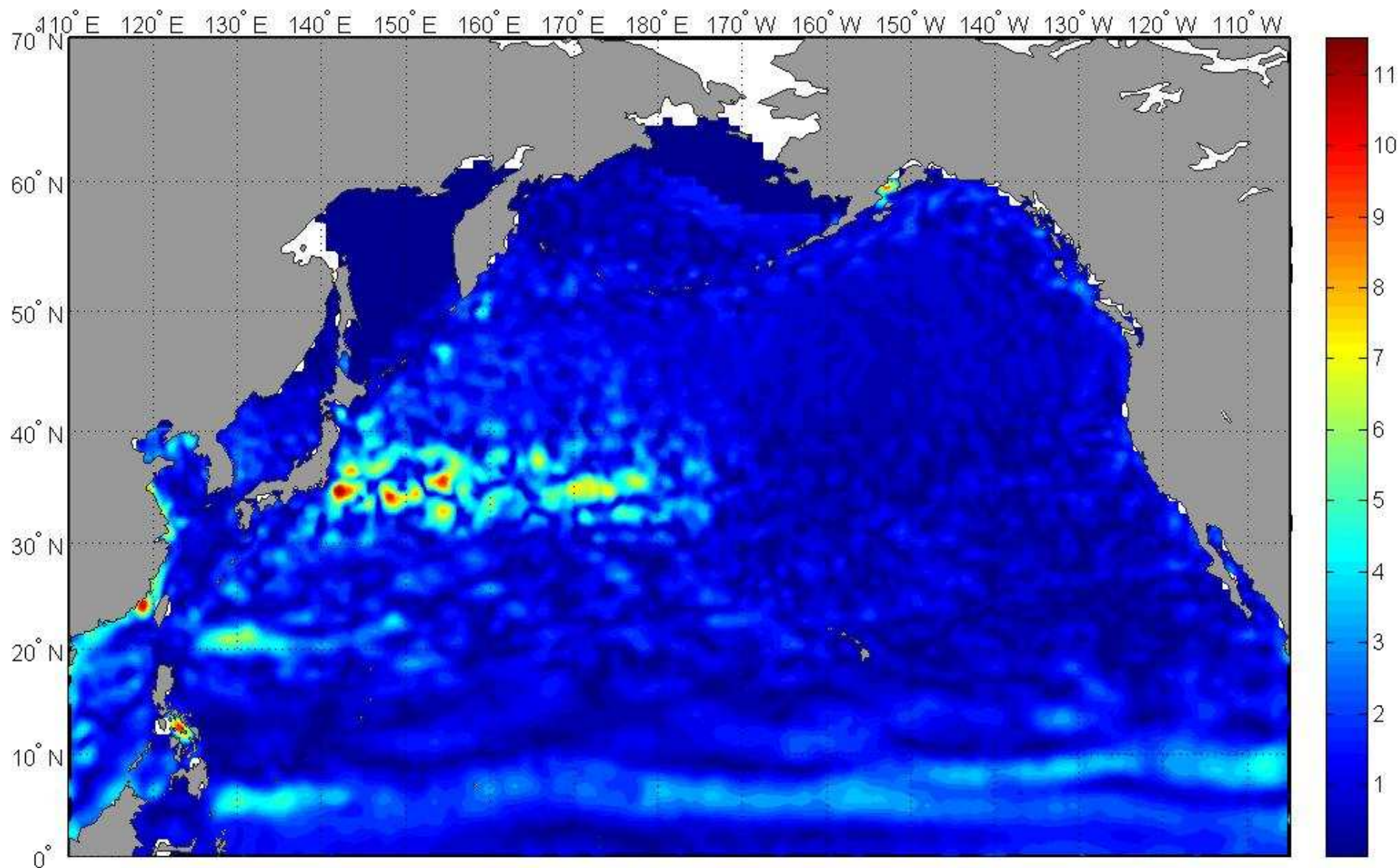


Вейвлет-анализ представляется очень перспективным математическим аппаратом для исследования гидрометеорологических процессов, в особенности процессов с нелинейными взаимодействиями в широком диапазоне масштабов.

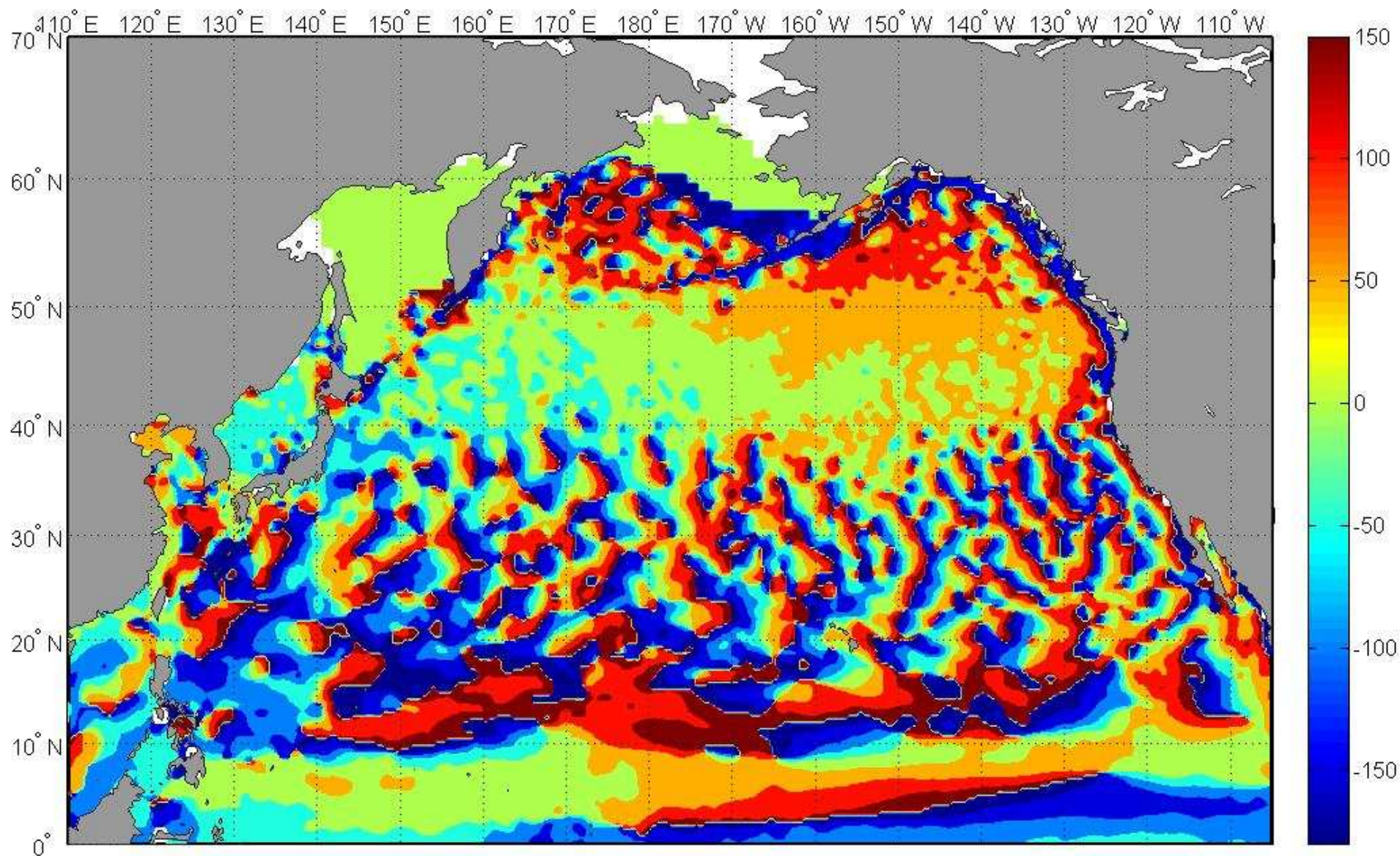
В отличие от традиционного применяемого для анализа преобразования Фурье вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку рассматриваемого временного ряда, при этом частота и время (координата) рассматриваются как независимые переменные.

В результате появляется возможность анализировать свойства временных гидрометеорологических наблюдений одновременно в физическом (время или координата) и в частотном пространствах.

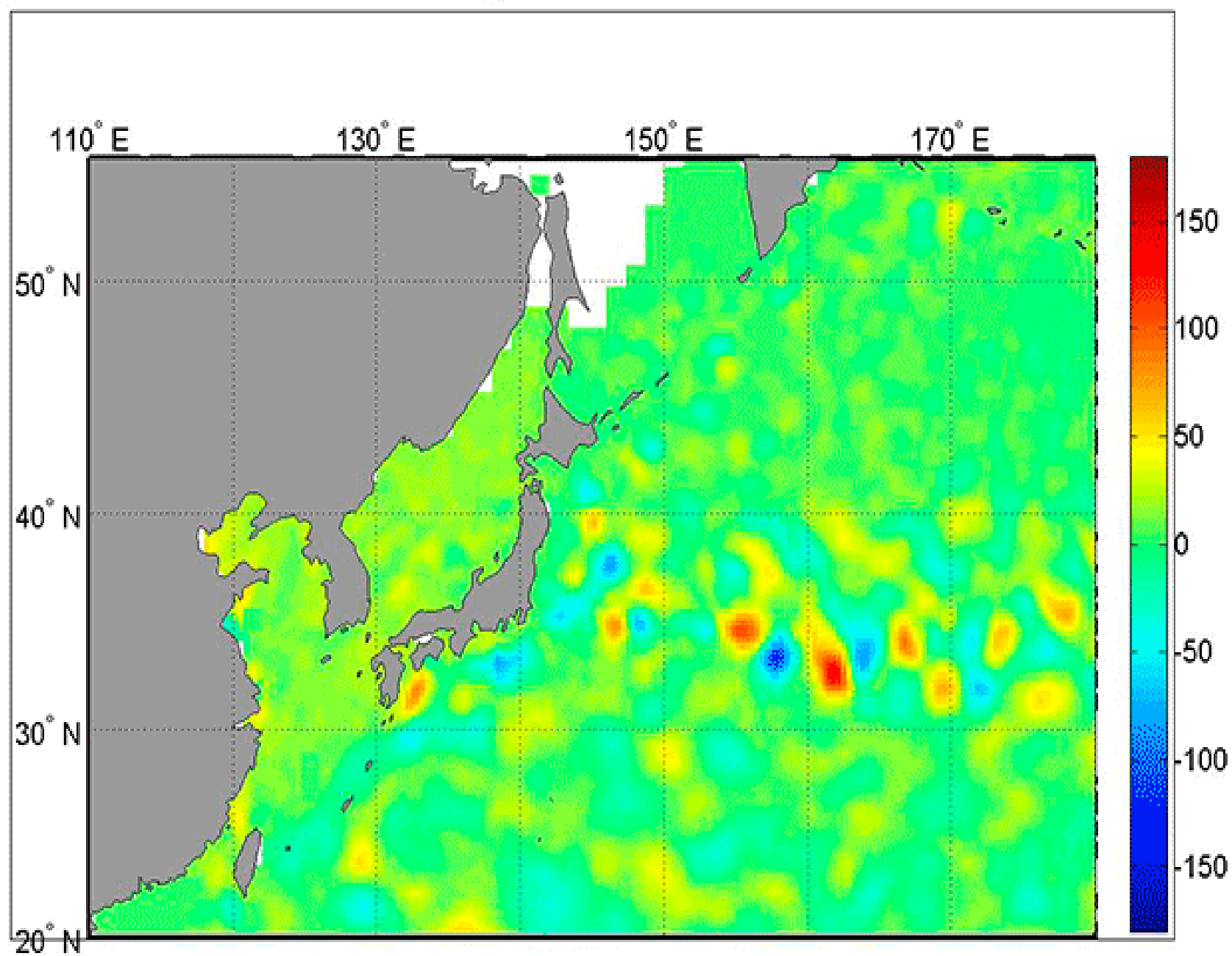
Амплитуды полугодовых колебаний уровня



Фазы полугодовых колебаний уровня



Дата: 14.10.1992



Наблюдающаяся на альтиметрических картах пестрая картина чередований положительных и отрицательных аномалий уровня океана может быть объяснена природой стояче-поступательных волн Россби.

Упрощенная кинематическая модель стояче-поступательных волн

$$\xi = \sum_{ij} A_{ij}(x, y, t) \cos m_{ij} x \cos l_{ij} y \cos(\sigma_{ij} t - k_{ij} x - n_{ij} y)$$

A_{ij} - амплитуда волны, произвольная функция координат, медленно изменяющаяся по сравнению с фазовыми волновыми возмущениями; i – номер волны, $j = 1, 2, 3 \dots$ - мода волны;

$m_{ij} = \frac{2\pi j}{X}; l_{ij} = \frac{2\pi j}{Y}$, X, Y - протяженность ячейки (бассейна)
- соответственно по широте и долготе

$\sigma_{ij} = \frac{2\pi j}{T_i}$ - частота волны, T_i - период волны

$k_{ij} = \frac{2\pi j}{\lambda_{xi}}, n_{ij} = \frac{2\pi j}{\lambda_{yi}}$ - зональное и меридиональное волновое число,

λ_x и λ_y - зональная и меридиональная составляющие длины волны.

Волновое поле представляет систему стационарных и нестационарных узловых линий стоячих колебаний, между которыми перемещается прогрессивная волна с составляющими на параллель и меридиан фазовыми скоростями

$$c_{xij} = \frac{\sigma_{ij}}{k_{ij}}$$

и

$$c_{yij} = \frac{\sigma_{ij}}{n_{ij}}$$

Свидетельством реальности такой волновой динамики могут быть часто наблюдаемые в поле волн узловые линии со скачкообразными изменениями начальных фаз, регистрируемые как в морях, так и в открытом океане

Реализация этой модели при следующих параметрах:

$$m = l = \pi / 590 \text{ рад км}^{-1},$$

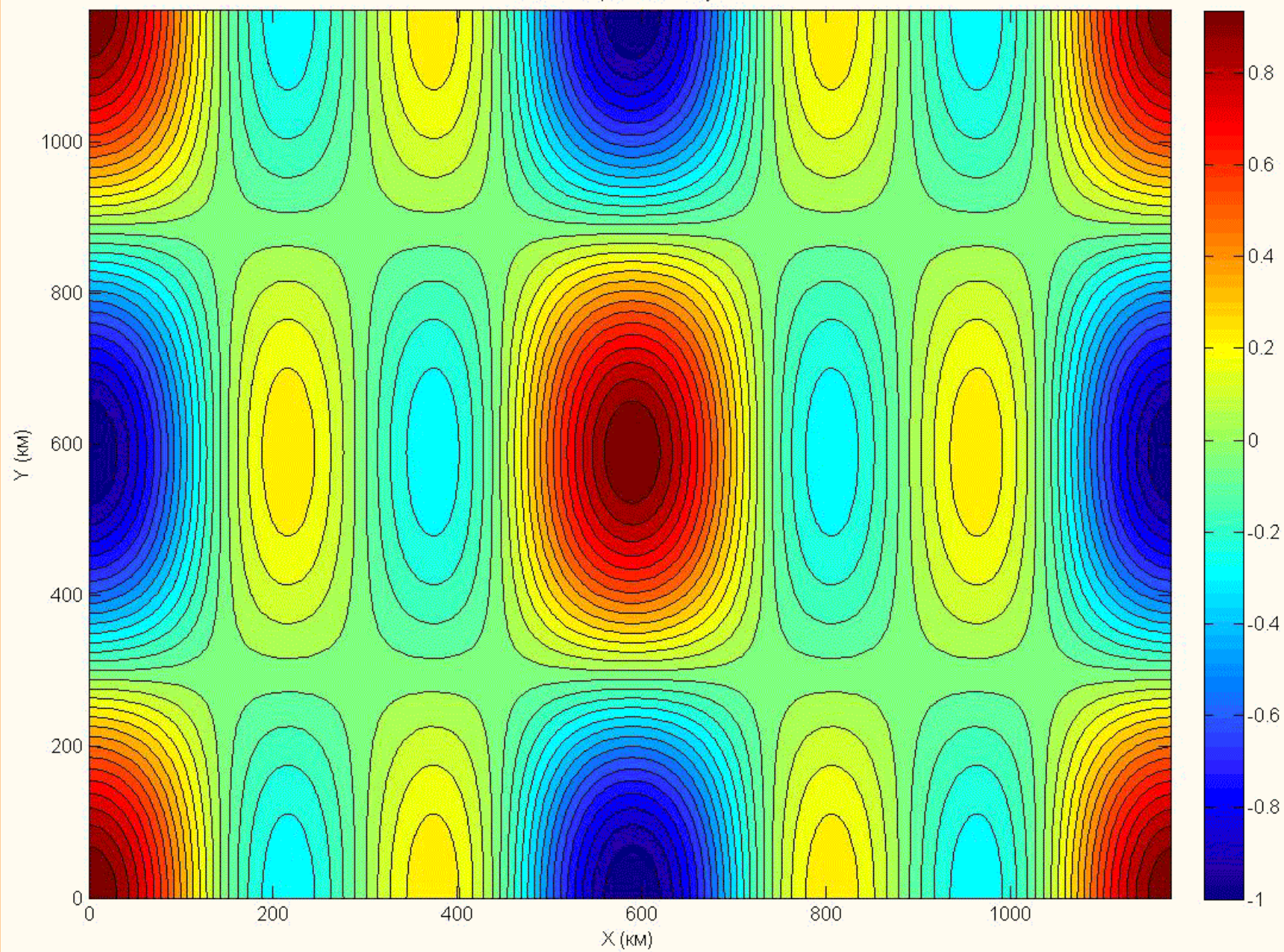
$$k = -2 * \pi / 590 \text{ рад км}^{-1},$$

$$n = 0, \sigma = 2 * \pi / 110 \text{ рад сут.}^{-1}.$$

Величина ячейки – расстояние между узлами стоячей волны, огибающей группы энергонесущих поступательных волн, в два раза превышает длину волны.

Естественно, что если между узлами стоячей волны «укладывается» несколько длин поступательной волны, изменчивость рельефа уровенной поверхности значительно усложняется.

Момент времени - 0 суток



Дж.Педლოსки (1984) и П.Ле Блон, Л.Майсек (1981)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi - F\psi) + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

предположение, что границы бассейна совпадают с узловыми линиями

где ψ – функция тока, равная отклонению свободной поверхности моря

$$\psi_{kn} = A_{kn} \sin k\pi \frac{x}{x_0} \sin n\pi \frac{y}{y_0} \cos \left(\sigma_{kn} t + \frac{\beta}{2\sigma_{kn}} x \right)$$

$$c = - \frac{\beta}{2\pi^2 \left(\frac{k^2}{x_0^2} + \frac{n^2}{y_0^2} \right)}$$

фазовая скорость

$$\sigma = \sigma_{kn} = - \frac{\beta}{2 \left(\frac{k^2 \pi^2}{x_0^2} + \frac{n^2 \pi^2}{y_0^2} + R_i^{-2} \right)^{1/2}}$$

собственные функции бароклинных волн Россби в прямоугольном бассейне

Частный случай, описывающий стояче-поступательные волны Россби

Исходя из эмпирических наблюдений, связывающих существование в океане точек с нулевым или мало изменяющимся уровнем, зональные баротропные стояче-поступательные волны Россби можно в простейшем случае представить как зональную поступательную волну ξ , модулированную по амплитуде в меридиональном направлении, в виде:

$$\xi = A \cos(\alpha y) \cos(\sigma t - kx)$$

α – параметр модуляции, имеющий размерность волнового числа

В линейном бездиссипативном приближении на « β -плоскости» баротропные волны такого типа описываются уравнением:

$$\frac{\partial \Delta \xi}{\partial t} - 2 \frac{\beta}{f} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{f^2}{gH} \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$$

где f – параметр Кориолиса, $\beta = \frac{df}{dy}$ – параметр Россби,

g – ускорение силы тяжести, H – глубина моря, Δ – плоский лапласиан.

Дисперсионное уравнение для интересующего нас класса волн – зональных дивергентных волн с поперечной модовой структурой:

$$\sigma = - \frac{\beta k}{k^2 + \alpha^2 + R^{-2}}$$

$$c = \frac{\sigma}{k} = - \frac{\beta}{k^2 + \alpha^2 + R^{-2}}$$

где R – баротропный радиус деформации Россби.

и условие $\sin \alpha y = 0$

Меридиональная структура этих волн должна определяться этим условием, где

$\alpha = \frac{2\pi j}{\lambda}$ λ – расстояние между узлами меридиональной стоячей волны, $j = 0, 1, 2, \dots$ - номер моды захваченной волноводом волны.

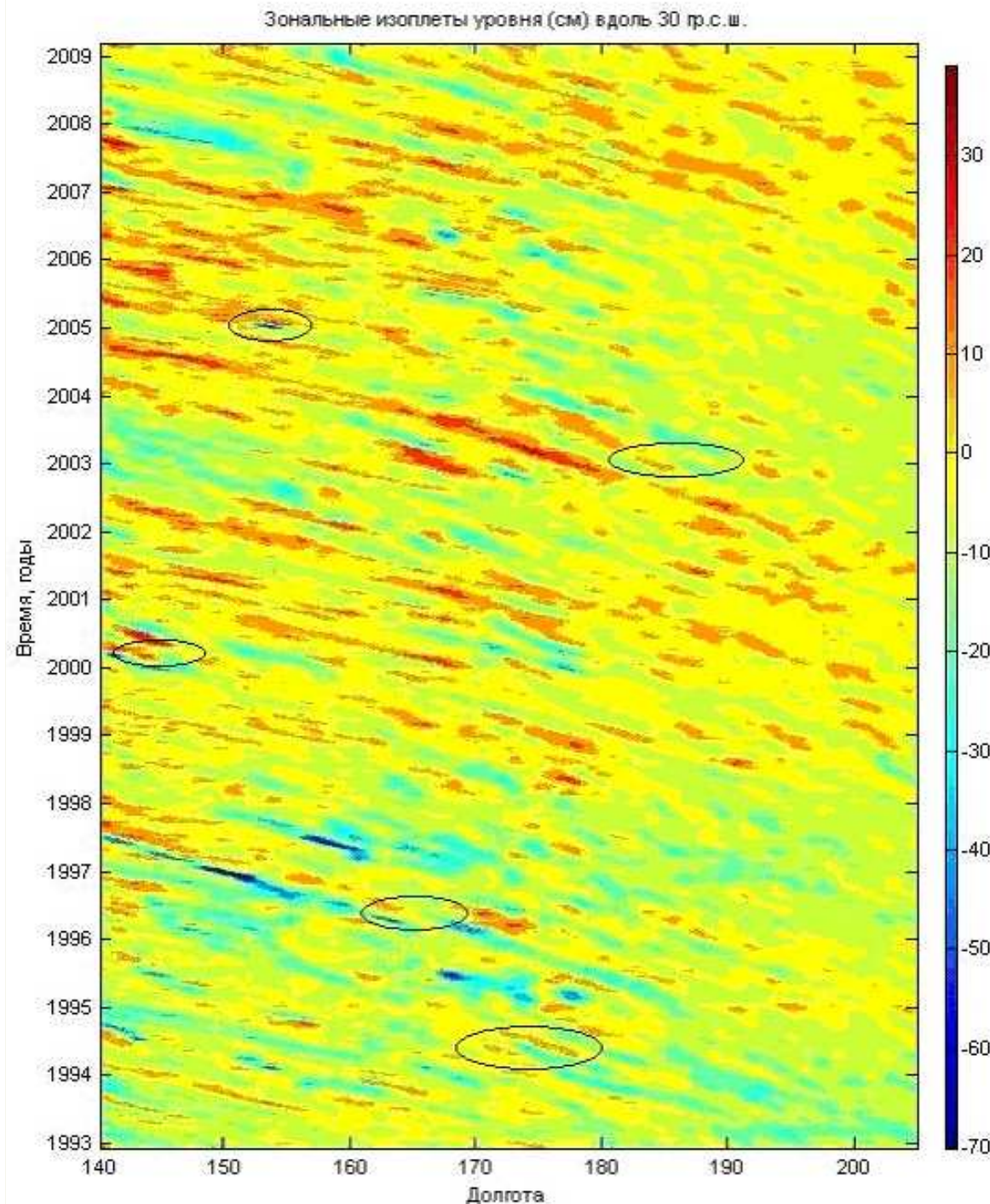
Для Балтийского моря

(средняя глубина 48 м.,
наибольшая длина 1800 км,
ширина 1350 км)

Период стояче-поступательных колебаний первой баротропной моды составил 26 суток, фазовая скорость направленных на запад поступательных волн внутри ячеек между узлами стоячей волны равна 4 см/с.

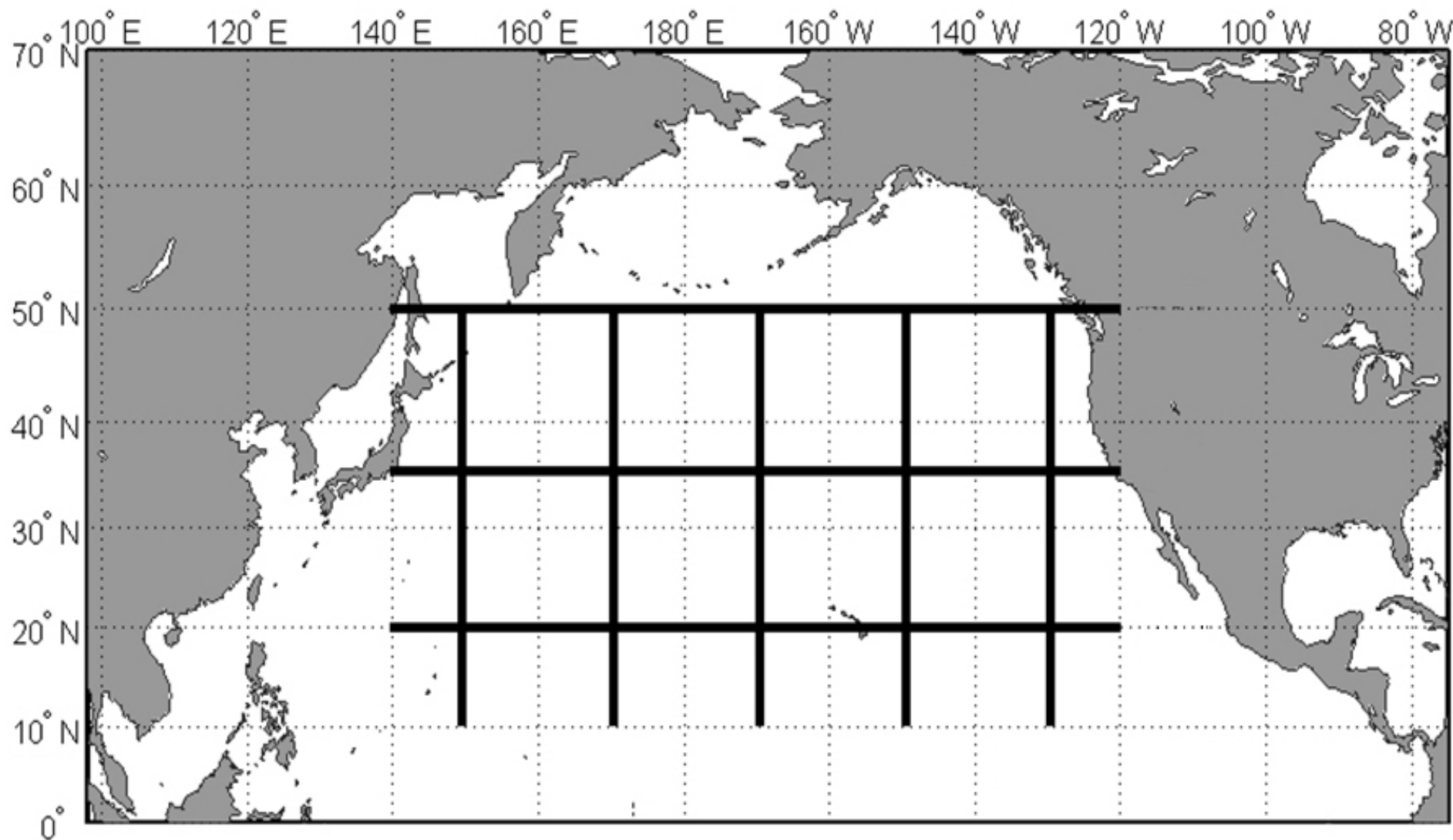
Если принять, например, для Балтийского моря бароклинный радиус деформации Россби $Ri = 5 \div 20$ км, то периоды стояче-поступательных бароклиновых волн Россби будут $T = 230 \div 580$ суток, а фазовые скорости $c = 1 \div 6$ см/с.

Волновые движения в Балтийском море относятся к градиентно-вихревым волнам типа волн Россби. Направление распространения волн между узлами огибающей стоячей волны преимущественно западное.

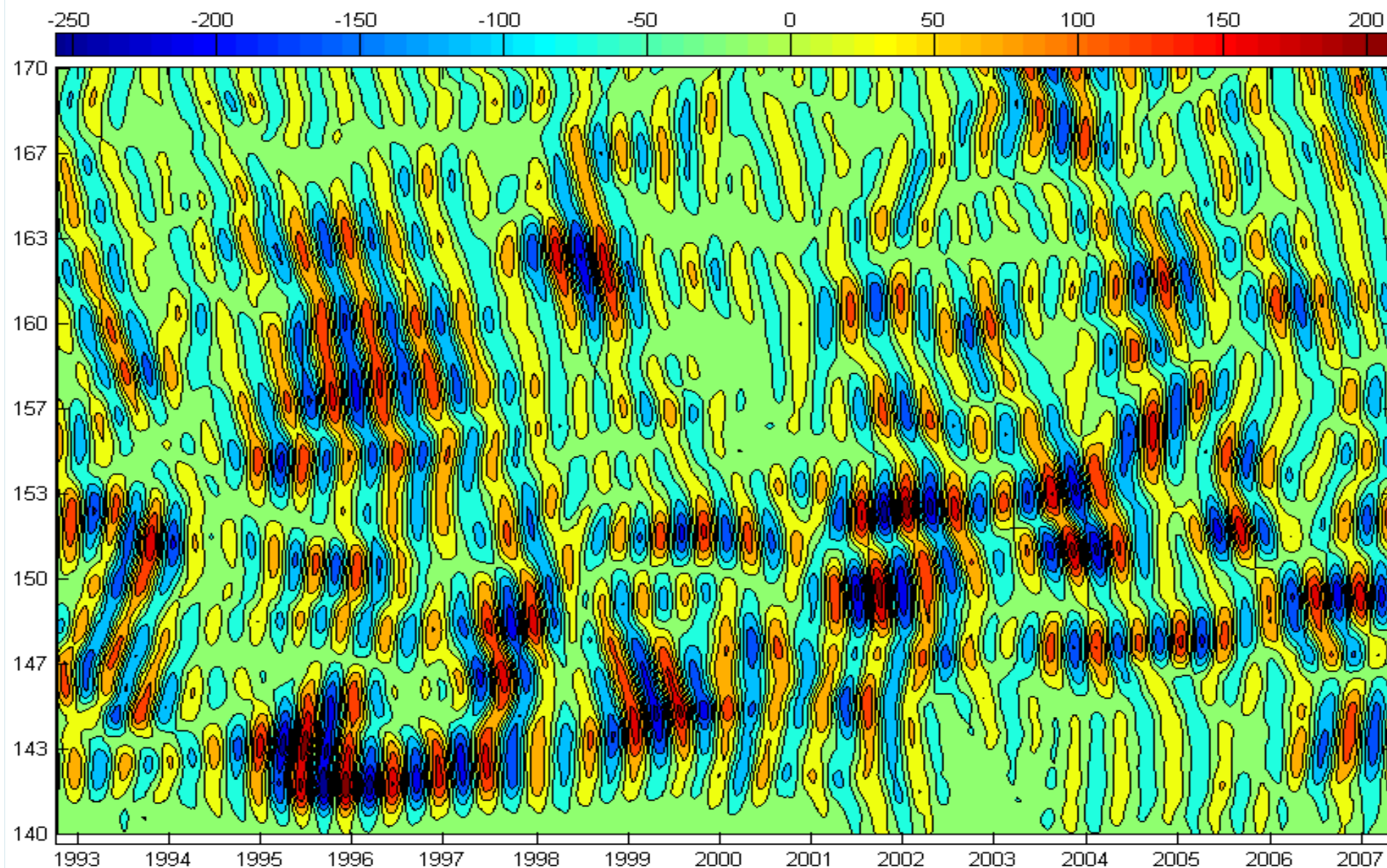


Зональные
изоплеты
альтиметрических
измерений уровня в
северо-западной
части Тихого
океана вдоль 30°
с.ш. (сезонный ход
удален путем
фильтрации).
Овалом выделены
области, где
скачкообразно
изменяется фаза
колебаний уровня.

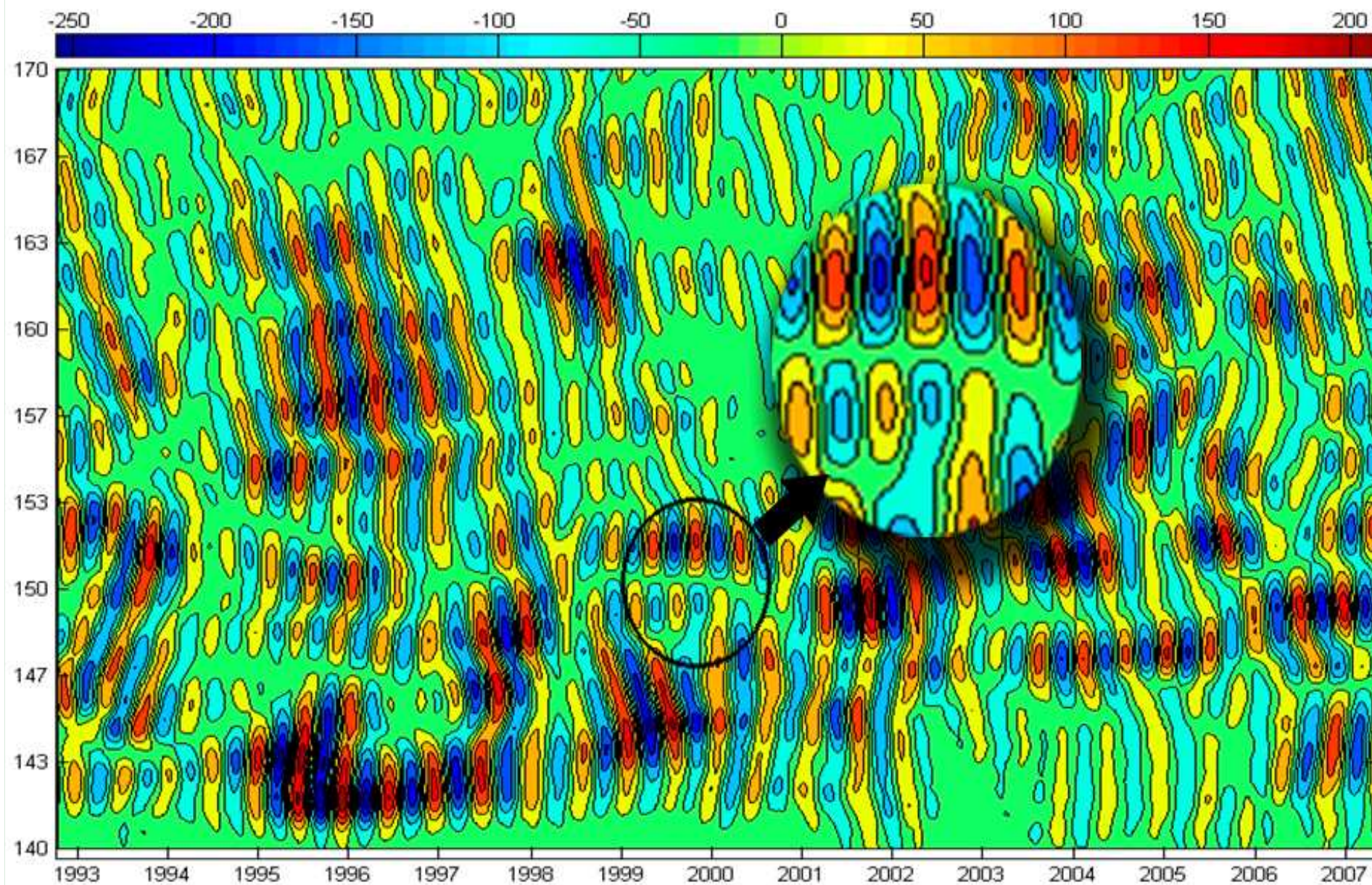
Схема расположения зональных и меридиональных разрезов в Северной части Тихого океана.



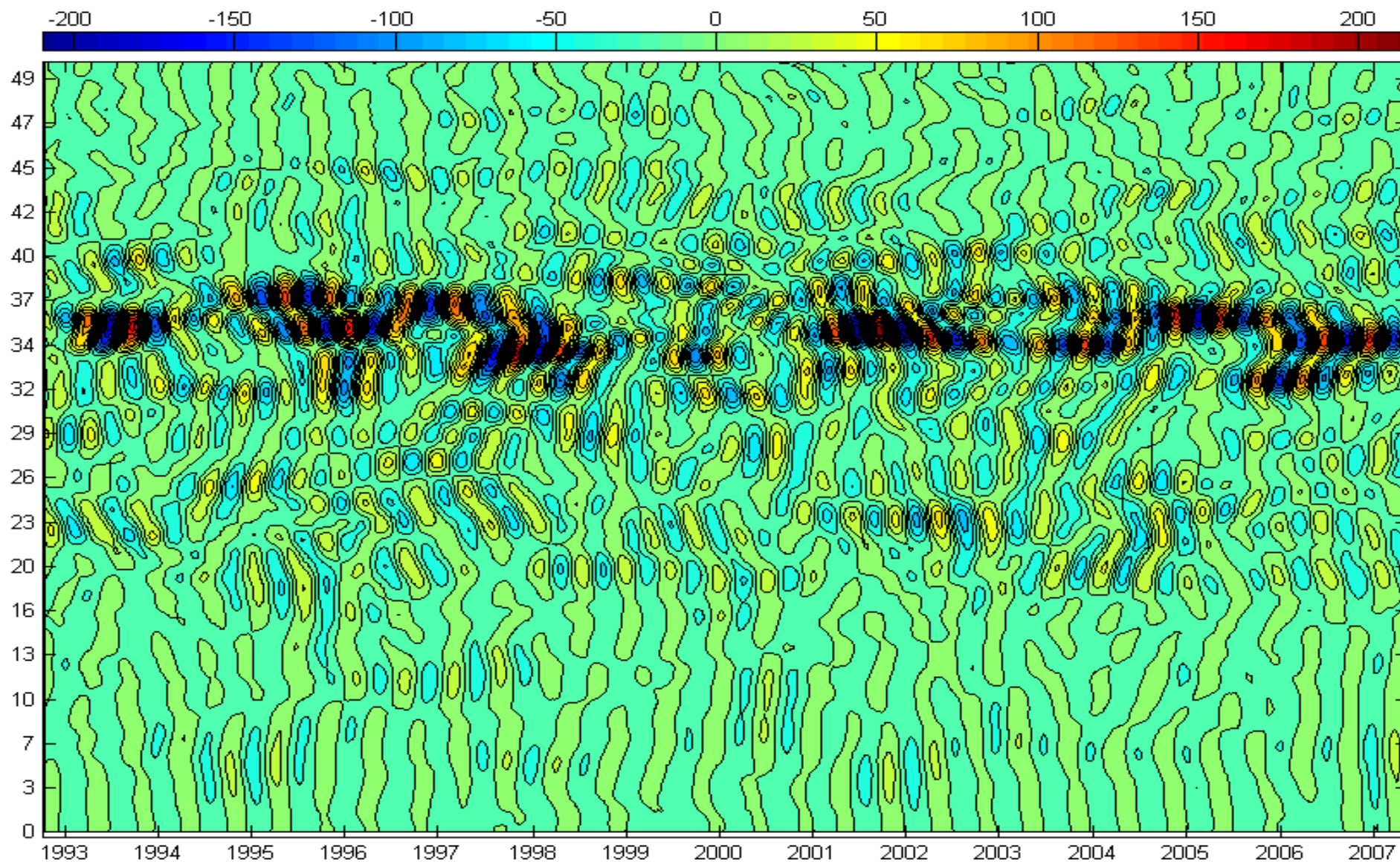
Изоплеты вейвлет-коэффициентов на зональном разрезе 35 град. с.ш.



Узловые точки



Изоплеты вейвлет-коэффициентов на меридиональном разрезе 150



Таким образом, вопреки сложившимся феноменологическим представлениям о низкочастотной волновой динамике, как в морях, так и в открытом океане **доминируют не поступательные, а стояче-поступательные градиентно-вихревые волны типа волн Россби.**

Кинематическая модель стояче-поступательной волны

$$\xi = A \cos(mx) \cos(l y) \cos(\sigma t - k x - n y)$$

$$U = -\frac{g}{f} \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad V = \frac{g}{f} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

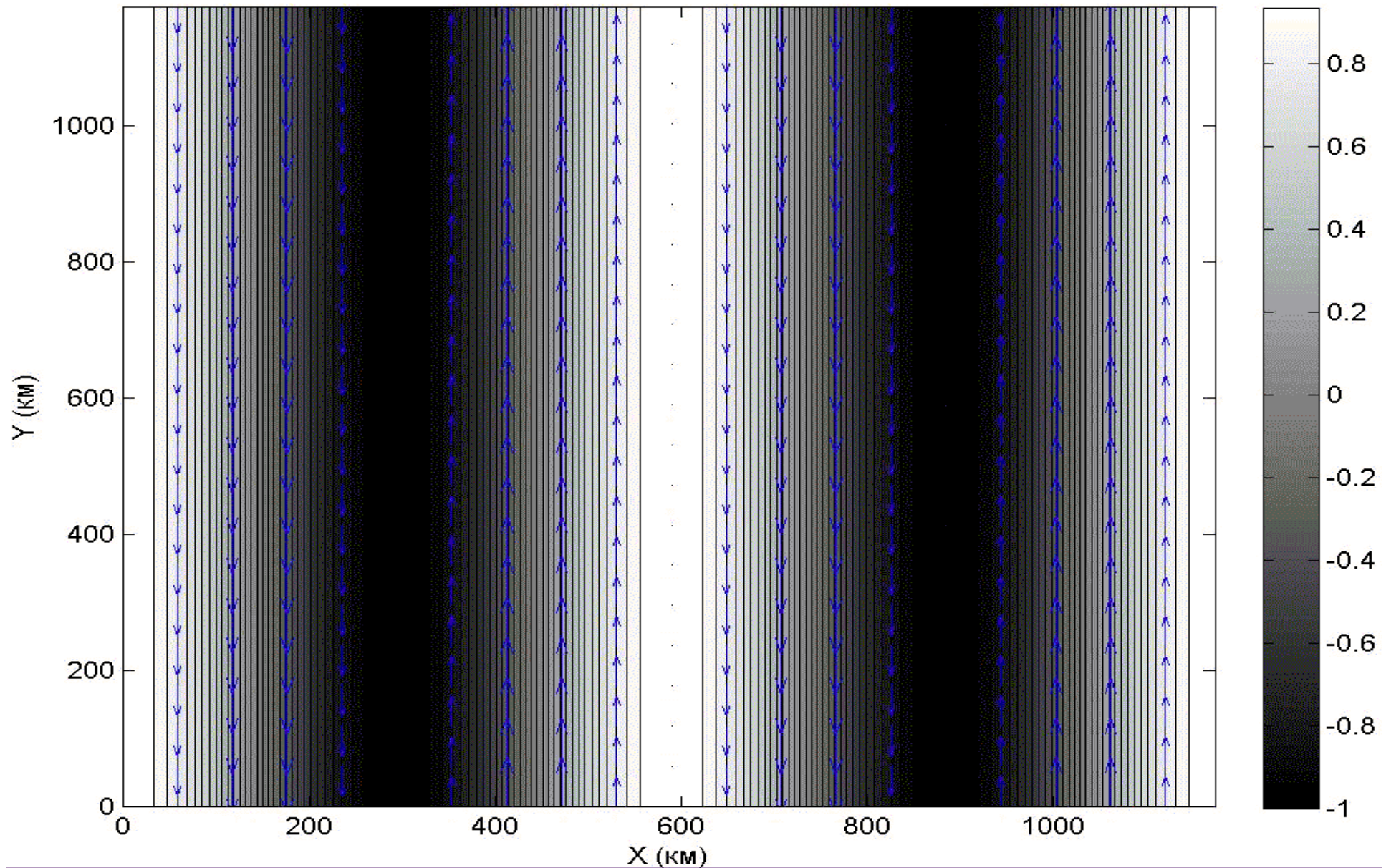
$$\begin{cases} U = -\frac{g}{f} A \cos mx \cdot (-l \cdot \sin(l y) \cos(\sigma t - k x - n y) + n \cdot \cos(l y) \sin(\sigma t - k x - n y)), \\ V = \frac{g}{f} A \cos l y \cdot (-m \cdot \sin(mx) \cos(\sigma t - k x - n y) + k \cdot \cos(mx) \sin(\sigma t - k x - n y)) \end{cases}$$

$$m = l = \pi / 590 \text{ рад км}^{-1}, \quad k = -2 \pi / 590 \text{ рад км}^{-1}, \\ n = 0, \quad \sigma = 2 \pi / 110 \text{ рад сут.}^{-1}.$$

Поступательная волна

$$\xi = A \cos(\sigma t - k x)$$

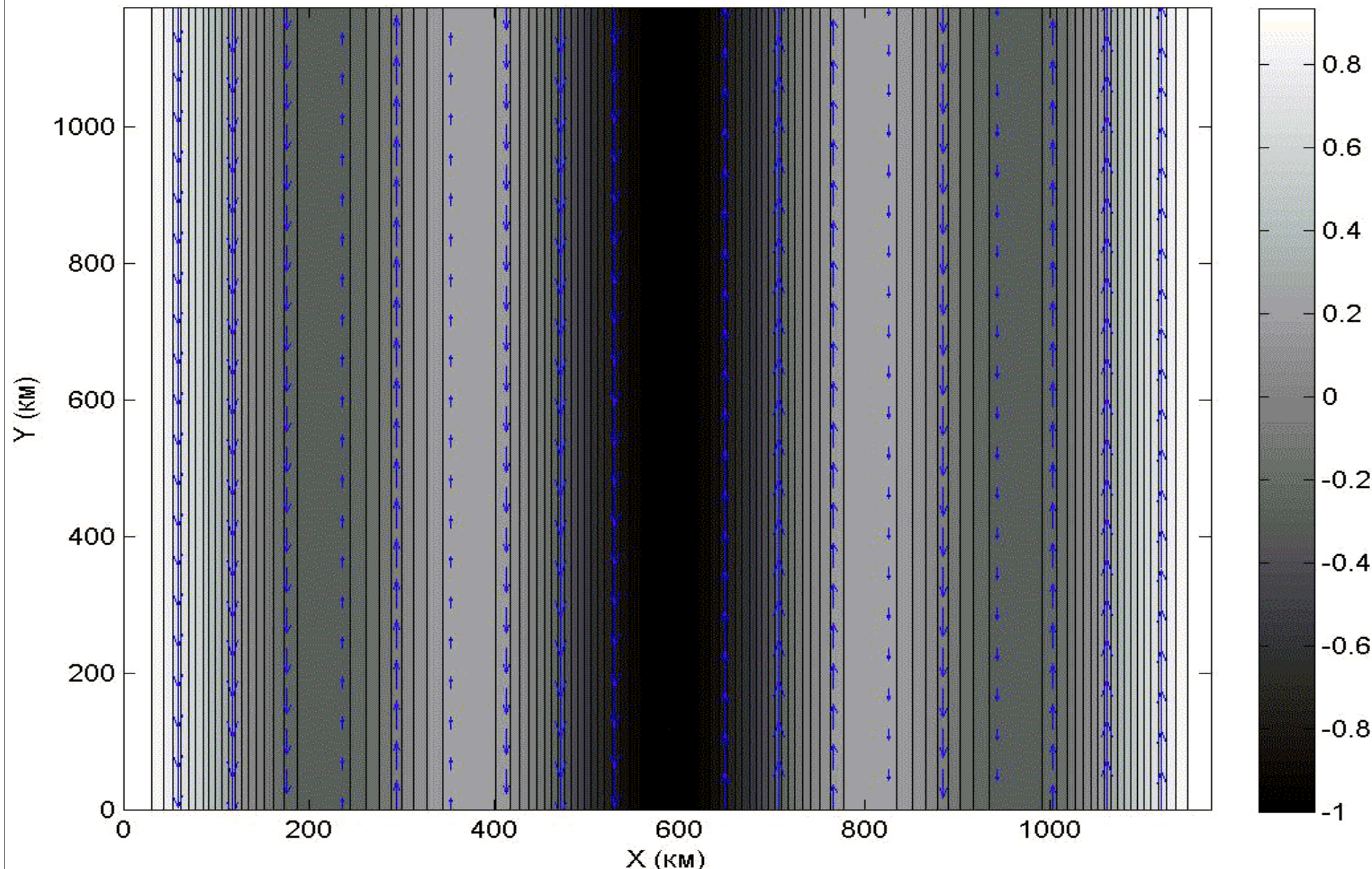
Момент времени - 0 суток



Зональная стояче-поступательная волна

$$\xi = A \cos(mx) \cos(\sigma t - kx)$$

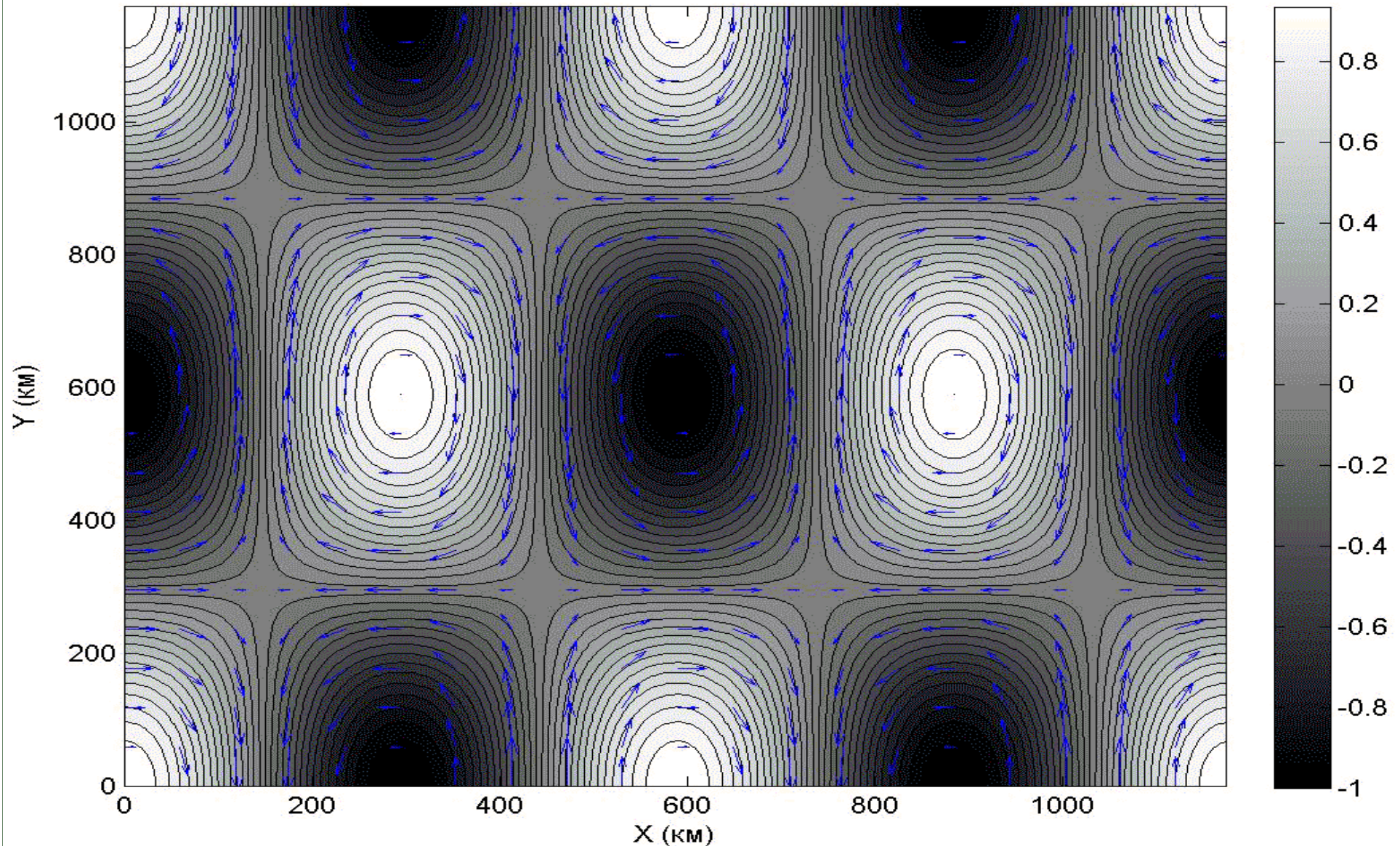
Момент времени - 0 суток



**Зональная поступательная волна, гармонически
модулированная по амплитуде
в меридиональном направлении**

$$\xi = A \cos(ly) \cos(\sigma t - kx)$$

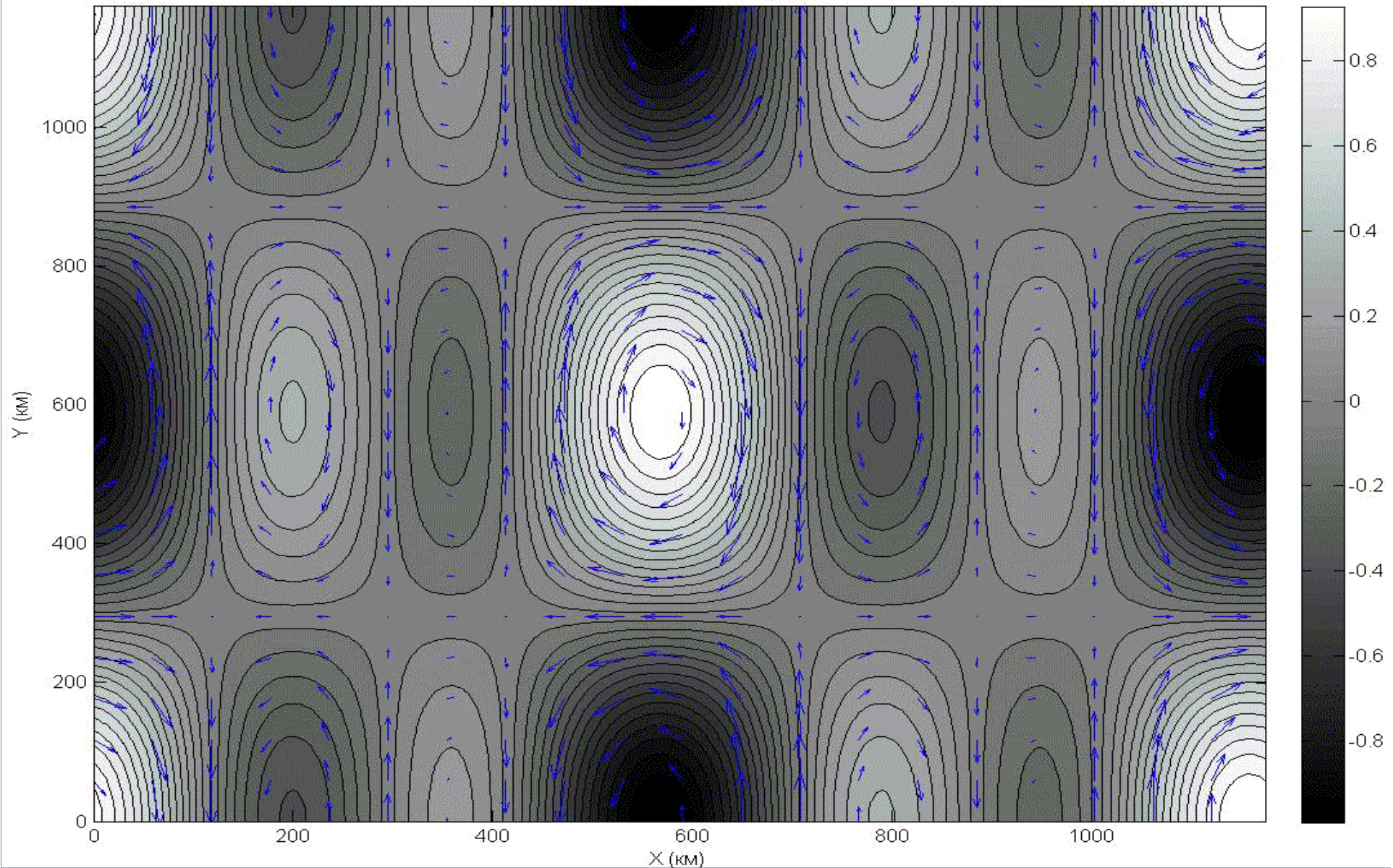
Момент времени - 0 суток

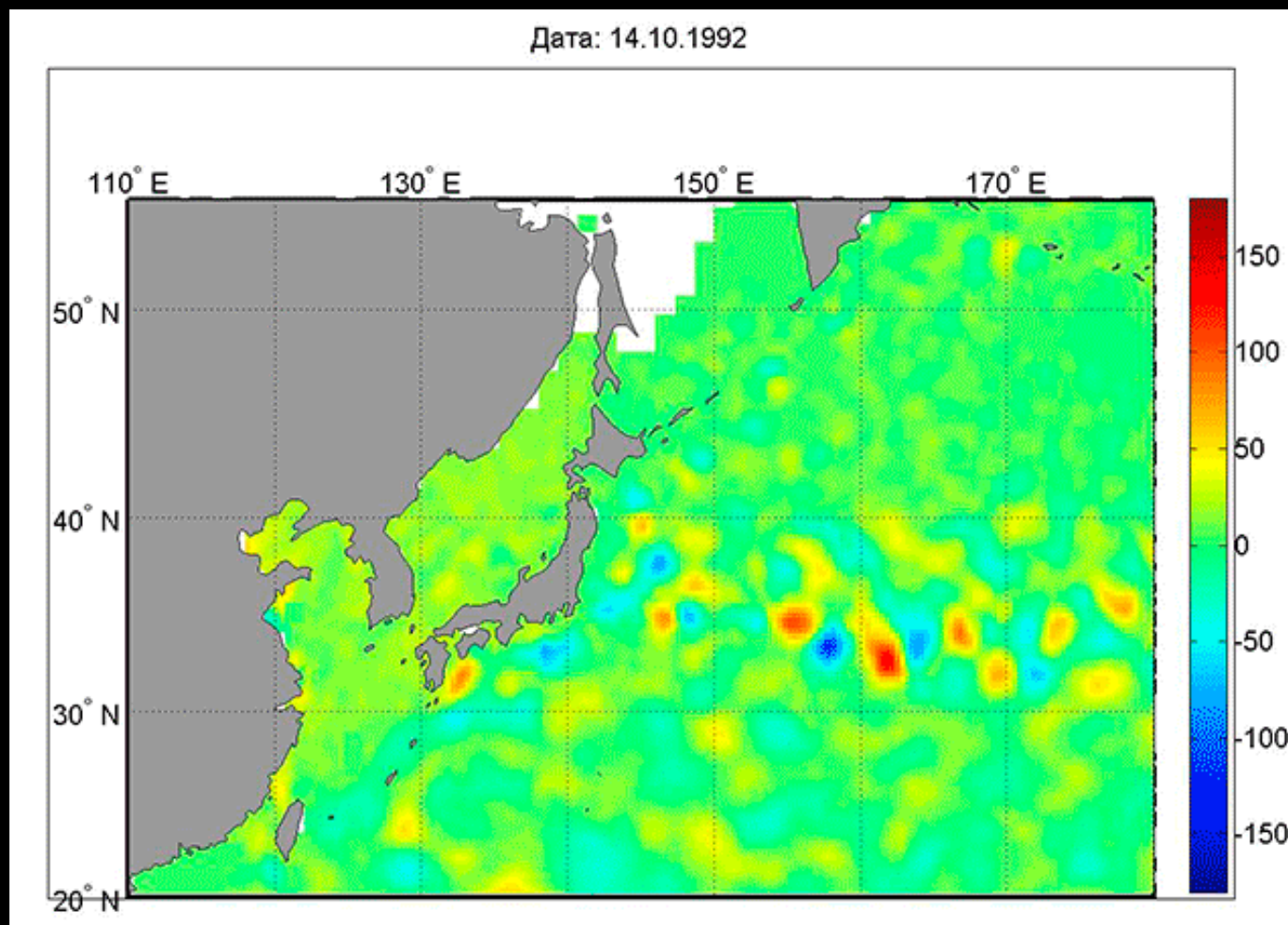


Стояче-поступательная волна

$$\xi = A \cos(mx) \cos(ly) \cos(\sigma t - k x - n y)$$

Момент времени - 5 суток





Спасибо за внимание!