9-ая международная Школа-семинар «Спутниковые методы и системы исследования Земли»

Вариационная ассимиляция данных об уровне в модели гидротермодинамики Балтийского моря, основанной на методе расщепления

Шелопут Т.О.[1]
[1] *Институт вычислительной математики РАН*

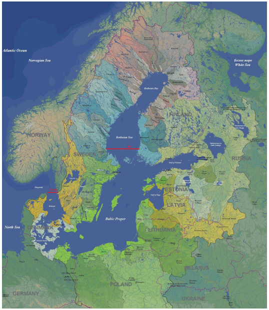
г. Москва, 13 апреля 2018 г.

Содержание доклада

- Система уравнений модели и метод расщепления.
- Постановка задачи ассимиляции и метод ее исследования.
- Данные наблюдений и проблема практической реализации алгоритма.
- Результаты численных экспериментов.

Введение

- Региональные модели гидротермодинамики могут разрешать масштабы 1-10км, что важно для многих прикладных задач, но их разработчики сталкиваются с проблемой «открытых границ».
- Ассимиляция данных (DA) – один из перспективных инструментов для решения этой проблемы.
- Рассматриваемый метод состоит в том, чтобы восстановить граничные функции с использованием теории оптимального управления.



Модель гидротермодинамики акваторий с открытыми границами

Запишем в области D систему уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики ($t \in (0, \bar{t})$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\vec{u}}{dt} + \left[\begin{array}{cc} 0 & -f \\ f & 0 \end{array} \right] \vec{u} - g\,\mathbf{grad}\xi + A_u\vec{u} = \vec{f} - \\ -\dfrac{1}{\rho_0}\mathbf{grad}P_a - \dfrac{g}{\rho_0}\mathbf{grad} \int\limits_0^z \rho_1(T,S)dz', \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial t} - m\dfrac{\partial}{\partial x}(\int\limits_0^H udz) - m\dfrac{\partial}{\partial y}(\int\limits_0^H \dfrac{n}{m}vdz) = 0, \\ \dfrac{dT}{dt} + A_T T = f_T,\ \dfrac{dS}{dt} + A_S S = f_S. \end{array} \right. \quad (1)$$

где:

- (λ, θ, z) - географическая (-геодезическая) система координат;
- поверхность моря: $z = \xi(\lambda, \theta, t)$, где $(\lambda, \theta, R) \in \Omega$ (Ω – образ поверхности моря на сфере S_R, R – средний радиус Земли), а t – временная переменная, $t \in [0, \bar{t}]$ ($\bar{t} < \infty$);
- рельеф дна: $z = H(\lambda, \theta)$ при $(\lambda, \theta, R) \in \Omega$;
- $l = l(\theta)$ – Кориолисов параметр, $f(u) = l + mu \sin\theta$;
- $D = \{(\lambda, \theta, z) : (\lambda, \theta, R) \ \in \ \Omega, \, 0 < z < H(\lambda, \theta)\}$.
- $(\vec{U}, T, S)$ – вектор скорости, температура, соленость;
- $A_\varphi \varphi \equiv -\mathbf{Div}(\hat{a}_\varphi \mathbf{Grad}\varphi)$, где
  $\hat{a}_\varphi = diag((a_\varphi)_{ii}), \quad (a_\varphi)_{11} = (a_\varphi)_{22} \equiv \mu_\varphi, (a_\varphi)_{33} \equiv \nu_\varphi;$
- $U_n = \vec{U} \cdot \vec{N}$, $\vec{N}$ – внешняя нормаль,
  $U_n^{(+)} \equiv (|U_n| + U_n)/2, \; U_n^{(-)} \equiv (|U_n| - U_n)/2.$

Система (1) дополняется начальными и граничными условиями. Приведем здесь *Граничные условия на* $\Gamma_{w,op}$ (*на "жидкой части боковой стенки"*):

$$\begin{cases} \left(\int\limits_0^H \vec{u}dz\right)\vec{n} + \beta_0 m_{op}\sqrt{gH}\,\xi = m_{op}\sqrt{gH}\,d_s \text{ на } \partial\Omega, \\ U_n^{(-)}(\tilde{U}\cdot\vec{N}) + \dfrac{\partial\tilde{U}}{\partial N_u}\cdot\vec{N} = U_n^{(-)}d, \quad U_n^{(-)}(\tilde{U}\cdot\tau_w) + \dfrac{\partial\tilde{U}}{\partial N_u}\cdot\tau_w = 0, \\ U_n^{(-)}T + \dfrac{\partial T}{\partial N_T} = U_n^{(-)}d_T + Q_T, \quad U_n^{(-)}S + \dfrac{\partial S}{\partial N_S} = U_n^{(-)}d_S + Q_S, \end{cases} \tag{2}$$

Пусть интервал $(0, \bar{t})$ разбит на подынтервалы (t_{j-1}, t_j), $j = 1, 2, .., J$, $t_0 = 0$, $t_J > \bar{t}$. Для аппроксимации задачи по времени используется *метод расщепления*. На каждом интервале (t_{j-1}, t_j) решаются следующие подзадачи (*шаги* метода расщепления, см. [4]):

1. Задача о распространении тепла.
2. Задача конвекции-диффузии для солености.
3. Задача об отыскании функции уровня и баротропных скоростей.
4. Вычисление поля векторов скоростей.

Рассмотрим одну из подзадач с Шага 3 метода расщепления:

$$\begin{cases} \bar{U}_t + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \bar{U} - g \cdot \mathbf{grad}\, \xi = \bar{f} \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \xi_t - \mathbf{div}\left(H\bar{U}\right) = 0 \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}(t_{j-1}) = \bar{U}_{j-1}, \quad \xi(t_{j-1}) = \xi_{j-1} \text{ в } \Omega, \\ H\bar{U} \cdot \bar{n} + m_{w,op}\sqrt{gH}\xi = m_{w,op}\sqrt{gH}d_s \text{ на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j), \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\bar{U} = \frac{1}{H}\int_0^H \bar{u}dz,$$

$\Gamma_{op} = \partial\Omega \cap \Gamma_{w,op}$, $m_{w,op}$ – характеристическая функция Γ_{op}, d_s – дополнительная неизвестная, $d_s = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma_{op}$. Пусть также на некоторой части границы $\partial\Omega$ на интервале времени (t_{j-1}, t_j) имеются данные наблюдений ξ_{obs} за уровнем моря. Обозначим через $\chi_{\xi,\partial\Omega}$ характеристическую функцию множества, где задана ξ_{obs}. Сформулируем условие замыкания:

$$\chi_{\xi,\partial\Omega}\xi = \chi_{\xi,\partial\Omega}\xi_{obs} \text{ на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j)$$

Запишем неявную схему аппроксимации задачи (3) на интервале (t_{j-1}, t_j), $\tau = t_j - t_{j-1}$, по времени. Введем, таким образом, полудискретную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{U}}{\tau} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \bar{U} - g \cdot \mathbf{grad}\, \xi = \bar{\tilde{\tilde{f}}} \text{ в } \Omega, \\ \dfrac{\xi}{\tau} - \mathbf{div}\left(H\bar{U}\right) = (\bar{F})_3 \text{ в } \Omega, \\ H\bar{U} \cdot \bar{n} + m_{w,op}\sqrt{gH}\xi = m_{w,op}\sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

Сформулируем теперь задачу оптимального управления, являющуюся приближением к поставленной ранее задаче: найти функцию d_s, доставляющую минимум функционалу:

$$J_\alpha = J_\alpha(d_s, \xi(d_s)) = \frac{\alpha}{2} \int\limits_{\partial\Omega} m_{w,op}\sqrt{gH}(d_s - d_s^{(0)})^2 \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \chi_{\xi,\partial\Omega}\sqrt{gH}(\xi - \xi_{obs})^2 \, d\Gamma,$$

где ξ и d_s удовлетворяют (4).

Для исследования задачи удобно перейти от (4) к уравнению на ξ, исключив $\bar{U}$

$$\xi/\tau - \mathbf{div}(gHM\,\mathbf{grad}\,\xi) = \tilde{\tilde{F}} \text{ в } \Omega, \tag{5}$$

$$gHM\,\mathbf{grad}\,\xi \cdot \bar{n} + m_{w,op}\sqrt{gH}\xi = m_{w,op}\sqrt{gH}d_s \text{ на } \partial\Omega. \tag{6}$$

где

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a = \frac{\theta}{\theta^2 + l^2}, \quad b = \frac{l}{\theta^2 + l^2}, \quad \theta = \frac{1}{\tau},$$

Чтобы показать однозначную разрешимость обратной задачи, достаточно показать, что система

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{\tau} - \mathbf{div}(gHM\,\mathbf{grad}\,\xi) = 0 \text{ в } \Omega, \\ gHM\,\mathbf{grad}\,\xi \cdot \bar{n} + m_{w,op}\sqrt{gH}\xi = m_{w,op}\sqrt{gH}d_s \text{ на } \partial\Omega, \\ m_{w,op}\xi = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

имеет только тривиальное решение $\xi \in W_2^1(\Omega)$, $d_s \in H_c$. В этом легко убедиться, записав обобщенную форму задачи ($\forall\hat{\xi} \in W_2^1(\Omega)$):

$$\int\limits_{\Omega} \left(gHM\,\mathbf{grad}\,\xi \cdot \mathbf{grad}\,\hat{\xi} + \frac{\xi\hat{\xi}}{\tau} \right) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} m_{w,op}\sqrt{gH}\xi\hat{\xi}\,d\Gamma = \int\limits_{\partial\Omega} m_{w,op}\sqrt{gH}d_s\hat{\xi}\,d\Gamma.$$

$$m_{w,op}\sqrt{gH}\xi = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Подставляя вместо $\hat{\xi}$ решение задачи ξ, получим:

$$\int\limits_{\Omega} \left(gHa|\,\mathbf{grad}\,\xi|^2 + \frac{\xi^2}{\tau} \right) d\Omega = 0$$

Поскольку по предположению H не обращается в ноль ни в одной точке Ω, получим, что $\|\xi\|_{W_2^1(\Omega)} = 0$, а значит и $d_s = 0$.

Аналогичным образом можно убедиться в том, что задача плотно разрешима.

Задачу минимизации функционала J_α можно решать, например, с помощью метода градиентного спуска, который будет иметь вид следующего итерационного процесса:

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{U}_k}{\tau} + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \bar{U}_k - g \cdot \mathbf{grad}\, \xi_k = \tilde{\bar{f}} \text{ в } \Omega, \\ \dfrac{\xi_k}{\tau} - \mathbf{div}\left(H\bar{U}_k\right) = (\bar{F})_3 \text{ в } \Omega, \\ H\bar{U}_k \cdot \bar{n} + m_{w,op}\sqrt{gH}\xi_k = m_{w,op}\sqrt{gH}(d_s)_k \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{\bar{U}}_k}{\tau} - \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \hat{\bar{U}}_k + g \cdot \mathbf{grad}\, \hat{\xi}_k = 0 \text{ в } \Omega, \\ \dfrac{\hat{\xi}_k}{\tau} + \mathbf{div}\left(H\hat{\bar{U}}_k\right) = 0 \text{ в } \Omega, \\ -H\hat{\bar{U}}_k \cdot \bar{n} + m_{w,op}\sqrt{gH}\hat{\xi}_k = m_{w,op}\sqrt{gH}(\xi_k - \xi_{obs}) \text{ на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

$$\tau_k = \frac{J_\alpha}{\|J'_\alpha\|^2} = \frac{\int\limits_{\Gamma_{obs}} \sqrt{gH}(\xi - \xi_{obs})^2 \, d\Gamma}{\int\limits_{\Gamma_{op}} gH\hat{\xi}^2 \, d\Gamma},$$

$$(d_s)_{k+1} = (d_s)_k + \tau_k\sqrt{gH}\left(\alpha((d_s)_k - d_s^{(0)}) + \hat{\xi}_k\right). \tag{10}$$

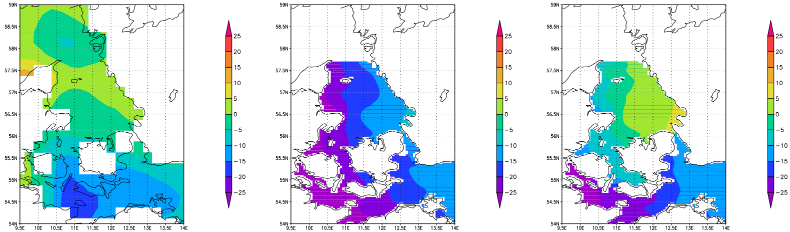
Спутниковые данные

- доступны в точке пересечения «жидкой» границы с треком спутника (1-2 за сутки);
- DUACS DT2014 (Data Unification and Altimeter Combination System, delayed time): данные об аномалиях уровня и динамической топографии, полученные по данным спутниковой альтиметрии. Данные поступают со спутников Jason-3, Sentinel-3A, HY-2A, Saral/AltiKa, Cryosat-2, Jason-2, проходят несколько этапов обработки и размещаются на сайте [8] спустя несколько месяцев после даты измерений.

Данные с уровнемерных постов

- доступны почти в любой момент времени, но в определенных точках на берегу;
- данные центра INSTAC (In Situ Thematic Assembly Centre): центр собирает данные, предоставляемые организациями-членами BOOS (Baltic Operational Oceanographic System). В работе были использованы данные с уровнемерного поста Skagen (Дания) и данные института SMHI (Swedish Meteorological and Hydrological Institute). БД обновляется ежедневно, но данные поступают с задержкой в несколько месяцев.

Результаты численных экспериментов



1) 2) 3)

Рис. 1 : Уровень моря среднесуточный (см) при $T = 3$ дня (03/03/2017): 1) данные наблюдений (спутниковые, DUACS DT2014); 2) расчет без ассимиляции; 3) расчет с использованием ассимиляции.

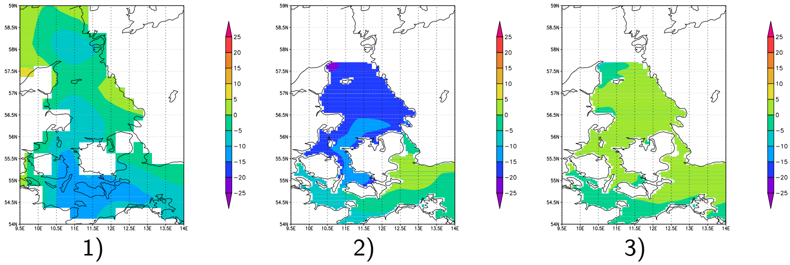
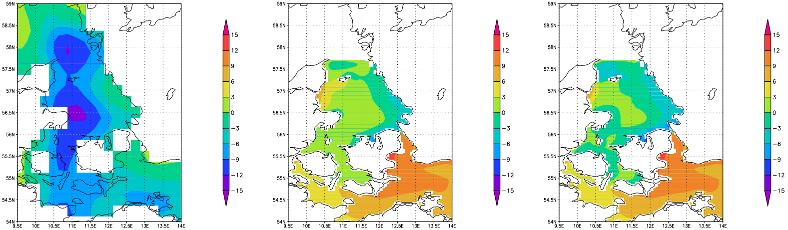


Рис. 2 : Уровень моря среднесуточный (см) при $T = 4$ дня (04/03/2017): 1) данные наблюдений (спутниковые, DUACS DT2014); 2) расчет без ассимиляции; 3) расчет с использованием ассимиляции.



1) 2) 3)

Рис. 3 : Уровень моря среднесуточный (см) при $T = 5$ дней (05/03/2017): 1) данные наблюдений (спутниковые, DUACS DT2014); 2) расчет без данных ($d_s = 0$); 3) расчет с использованием ассимиляции.

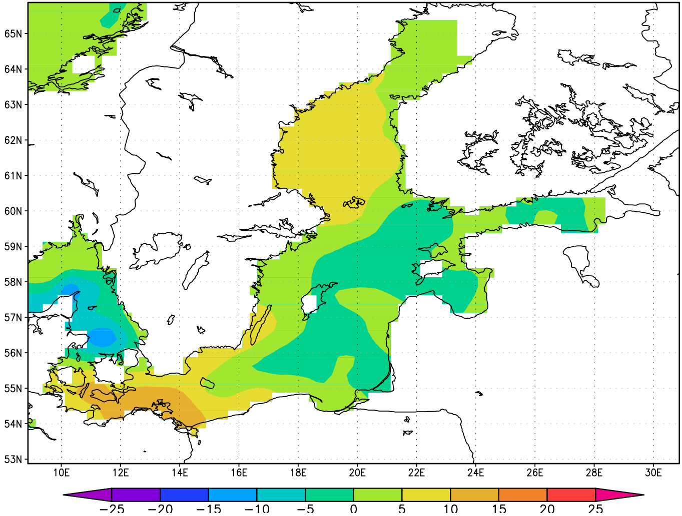


Рис. 4 : Уровень моря среднесуточный (см) по данным со спутников на 10/03/2017

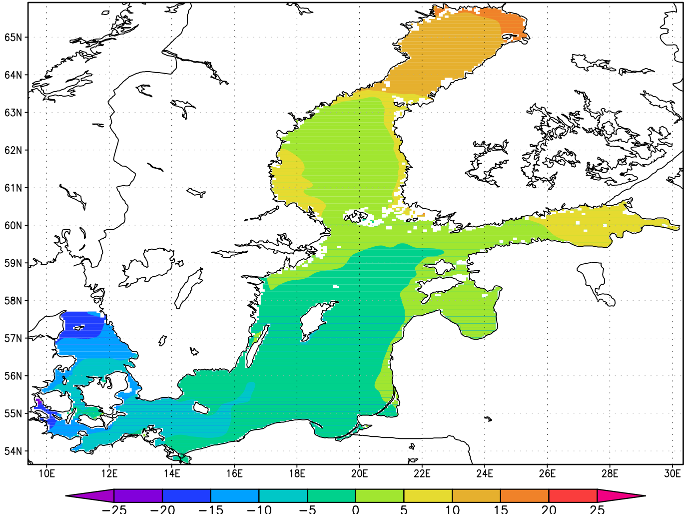


Рис. 5 : Уровень моря среднесуточный (см), расчет по модели без блока ассимиляции на 10/03/2017

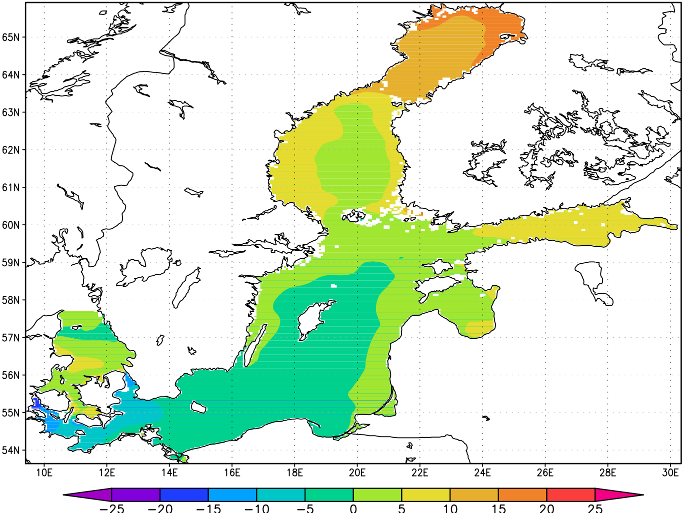


Рис. 6 : Уровень моря среднесуточный (см), расчет по модели с ассимиляцией на 10/03/2017

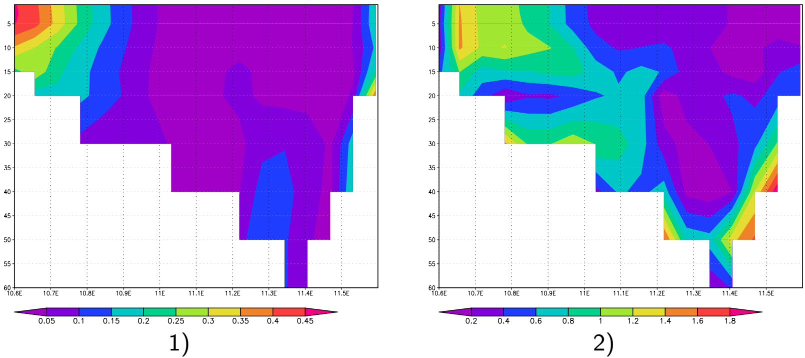


Рис. 7 : Модуль разности температуры ($^{\circ}C$), разрез по глубине, по $\Gamma_{w,op}$ (“жидкой” границе) 1) 48 часов от начала расчета ; 2) 6 суток от начала расчета.

При попытке практической реализации алгоритма были выявлены следующие трудности:

1. Малое количество данных об уровне на «жидкой» границе. Возможный выход – статистический анализ данных об аномалиях уровня за много лет и попытка построения метода интерполяции данных на основе результатов статистического анализа.
2. Данные поступают с задержкой, следовательно ими нельзя воспользоваться в задачах оперативного прогноза морской среды.

Список основных публикаций

1. *Zalesny V. B., Gusev A. V., Chernobay S. Yu., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytkönen J.* The Baltic Sea circulation modelling and assessment of marine pollution // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2014, Vol.29, No. 2, pp. 129-138.
2. *Агошков В.И.* Избранные труды. В 5 т. Т.3. Методы решения обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений в проблемах крупномасштабной динамики океанов и морей / В.И. Агошков. – М.: ИВМ РАН, 2016, 192 с.
3. *Дементьева Е. В., Карепова Е. Д., Шайдуров В. В.* Восстановление граничной функции по данным наблюдений для задачи распространения поверхностных волн в акватории с открытой границей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 10-20.
4. *Agoshkov V.I.* Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with 'liquid' boundaries // RJNAMM, 2017. V. 32, No. 2. P. 73-90.
5. *Agoshkov V.I., Sheloput T.O.* The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with 'liquid' boundaries // RJNAMM, 2017. V.32, No. 3. P. 147-164.
6. *Agoshkov V.I.* Inverse problems of the mathematical theory of tides: boundary-function problem // RJNAMM, 2005. V. 20, No. 1. P. 1-18.
7. *Pujol M.-I.* DUACS DT2014: the new multi-mission altimeter data set reprocessed over 20 years / Pujol M.-I., Faugère Y., Taburet G., Dupuy S., Pelloquin C., Ablain M., Picot N. // Ocean Science, 2016. V. 12. P. 1067-1090.
8. Copernicus Marine Environment Monitoring Service. URL: http://marine.copernicus.eu/. Дата обращения: 24.11.2017.