

10-ая международная Школа-семинар «Спутниковые методы и системы исследования Земли»

Вариационная ассимиляция данных наблюдений для учета «жидких» границ в моделях гидротермодинамики морей

Агошков В.И.^{1,2}, Шелопут Т.О.¹

¹Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

²Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

г. Москва, 9 – 12 апреля 2019 г.

- Методы учета жидких границ в моделях гидротермодинамики открытых акваторий.
- Восстановление потоков через жидкую границу, как обратная задача.
- Постановки задач и результаты численных экспериментов.
- Возможность практической реализации алгоритмов.

Введение

- Региональные модели гидротермодинамики могут разрешать масштабы 1-10км, что важно для многих прикладных задач, но их разработчики сталкиваются с **проблемой «открытых границ»**.
- Неудачное задание граничных условий на открытых границах приводит к несоответствию полученных результатов с наблюдаемыми полями течений, температурными полями и т.д. При долгосрочных (климатических) расчетах учесть жидкую границу – особенно важная задача.
- **Ассимиляция данных (DA)** – один из перспективных инструментов для решения этой проблемы.



Методы учета жидких границ в моделях гидротермодинамики открытых акваторий

- 1 **Использование осредненных данных о потоках через жидкую границу.** Данные можно взять из атласов или по результатам расчетов по климатической модели Мирового океана ¹.
- 2 **Метод вложенных сеток** (без обратной связи, с обратной связью, с неполной обратной связью). Рассматриваемая открытая область является подобластью акватории бóльшего размера (моря, океана). Можно провести расчет для этой акватории на более грубой сетке и использовать полученные данные для задания граничных условий на жидких границах².
- 3 **Ассимиляция данных.** Используются данные наблюдений для корректировки результатов расчетов и функций в граничных условиях на жидких границах ^{3,4}.

¹Чернов И. А., Толстиков А. В., 2014

²Кубряков А. И., 2004

³Agoshkov V.I., 2017

⁴Edwards C. A. et al., 2015

Метод вложенных сеток:

- \Leftrightarrow **с обратной связью** – данные, полученные при расчете по глобальной модели, передаются в качестве граничных условий в региональную модель, и, в свою очередь, после расчета по региональной модели на сетке с высоким разрешением уточненные данные на границе раздела передаются в глобальную модель;
- \Rightarrow **без обратной связи** – данные, полученные при расчете по глобальной модели, передаются в качестве граничных условий в региональную модель, но предполагается, что результаты расчетов по региональной модели не оказывают существенного влияния на глобальную модель.

Условия излучения и адаптивный подход

На жидких границах в качестве граничного условия необходимо такое условие, которое позволяет явлениям, генерируемым внутри рассматриваемой области, проходить через границу без существенного искажения⁵.

Таким условием для *гиперболических* задач может являться **условие излучения** (условие Зоммерфельда):

$$\partial\phi/\partial t + C\phi_x = 0, \quad (1)$$

где ϕ – некоторая переменная (например, отклонение уровня моря от среднего многолетнего или скорость), а C – фазовая скорость. В работе [5] предложен способ численного определения фазовой скорости в каждой точке границы по соседним точкам сетки.

⁵Orlanski I., 1976

В работе [6] был предложен **адаптивный алгоритм**⁶, идея которого состоит в том, чтобы использовать условия излучения для того, чтобы определить, является ли участок жидкой границы “пассивным” или “активным”. Там, где граница определяется как “пассивная” (распространение возмущения изнутри области наружу) ставится условие излучения, позволяя волнам, генерируемым внутри области, проходить через границу без отражения. В тех же случаях, когда граница определяется как “активная”, формулируется жесткое условие согласования с внешними данными. Внешние данные могут быть получены из климатических атласов, из климатических моделей Мирового океана, а также из моделей с большей областью и более грубой сеткой (метод вложенных сеток без обратной связи).

Адаптивный алгоритм был применен в US West Coast (USWC) модификации Regional Oceanic Modeling System (ROMS). Примеры использования адаптивного алгоритма можно найти и в отечественных работах.

⁶ Marchesiello P., McWilliams J. C., Shchepetkin A., 2001 

Использование ассимиляции данных наблюдений:

- Формулировка задачи зависит от специфики метода ассимиляции данных.
- Если используется **ассимиляция** данных, основанная на **статистическом подходе**, решение задачи «подправляется» по данным наблюдений.
- Если используется **вариационная ассимиляция данных**, вводится вектор дополнительных неизвестных параметров задачи («**вектор управления**»). Варьируя значения вектора управления, можно подобрать решение, наиболее близкое к данным наблюдений.
- Классика: вектор управления включает в себя начальные значения (в нулевой момент времени).
- Можно включить в вектор управления **значения функций потоков на жидкой границе**.

Восстановление потоков через жидкую границу, как обратная задача

Запишем в области D в переменных (λ, θ, z) при $t \in (0, \bar{t})$ систему уравнений гидротермодинамики в “приближении Буссинеска и гидростатики”:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix} \vec{u} - g \mathbf{grad} \xi + A_u \vec{u} = \vec{f} - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{grad} P_a - \\ - \frac{g}{\rho_0} \mathbf{grad} \int_0^z \rho_1(T, S) dz', \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - m \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^H \Theta u dz \right) - m \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^H \frac{n}{m} \Theta v dz \right) = 0, \\ \frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \end{array} \right. \quad (2)$$

Система (2) дополняется начальными и граничными условиями. Приведем здесь *Граничные условия на $\Gamma_{w,op}$ (на “жидкой части боковой стенки”)*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\int_0^H \Theta \vec{u} dz \right) \vec{n} + \beta_0 m_{op} \sqrt{gH} \xi = m_{op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega, \\ U_n^{(-)} (\vec{U} \cdot \vec{N}) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial N_u} \cdot \vec{N} = U_n^{(-)} d, \quad U_n^{(-)} (\vec{U} \cdot \tau_w) + \frac{\partial \vec{U}}{\partial N_u} \cdot \tau_w = 0, \\ U_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} = U_n^{(-)} d_T + Q_T, \quad U_n^{(-)} S + \frac{\partial S}{\partial N_S} = U_n^{(-)} d_S + Q_S, \end{array} \right. \quad (3)$$

Функции d_s , d , d_T , d_S включим в вектор управления и будем считать *дополнительными неизвестными задачи.*

Пусть интервал $(0, \bar{t})$ разбит на подынтервалы (t_{j-1}, t_j) , $j = 1, 2, \dots, J$, $t_0 = 0$, $t_J > \bar{t}$. Для аппроксимации задачи по времени используется **метод расщепления** (метод суммарной аппроксимации). На каждом интервале (t_{j-1}, t_j) решаются следующие подзадачи (*шаги* метода расщепления):

- 1 Задача о распространении тепла.
- 2 Задача конвекции-диффузии для солёности.
- 3 Задача об отыскании функции уровня и интегральных скоростей.
- 4 Вычисление поля векторов скоростей.

Постановки задач и результаты численных экспериментов

Использование **метода расщепления** позволяет рассматривать *задачу ассимиляции данных для полной нелинейной модели* гидротермодинамики на каждом интервале по времени, **пошагово**, решая последовательно более простые подзадачи ассимиляции, привлекая соответствующие изменяющимся в подзадаче переменным данные наблюдений.

Задача ассимиляции данных об уровне

Рассмотрим одну из подзадач с Шага 3 метода расщепления:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_t + \begin{bmatrix} 0 & -\ell \\ \ell & 0 \end{bmatrix} \bar{U} - g \cdot \mathbf{grad} \xi = \bar{f} \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \xi_t - \mathbf{div} (H\bar{U}) = 0 \text{ в } \Omega \times (t_{j-1}, t_j), \\ \bar{U}(t_{j-1}) = \bar{U}_{j-1}, \quad \xi(t_{j-1}) = \xi_{j-1} \text{ в } \Omega, \\ H\bar{U} \cdot \bar{n} + m_{w,op} \sqrt{gH} \xi = m_{w,op} \sqrt{gH} d_s \text{ на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j), \end{array} \right. \quad (4)$$

где

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \int_0^H \bar{u} dz,$$

$\Gamma_{op} = \partial\Omega \cap \Gamma_{w,op}$, $m_{w,op}$ – характеристическая функция Γ_{op} , d_s – дополнительная неизвестная, $d_s = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma_{op}$. Пусть также на некоторой части границы $\partial\Omega$ на интервале времени (t_{j-1}, t_j) имеются данные наблюдений ξ_{obs} за уровнем моря. Обозначим через $\chi_{\xi, \partial\Omega}$ характеристическую функцию множества, где задана ξ_{obs} . Сформулируем условие замыкания:

$$\chi_{\xi, \partial\Omega} \xi = \chi_{\xi, \partial\Omega} \xi_{obs} \text{ на } \partial\Omega \times (t_{j-1}, t_j)$$

Эксперимент 1: ξ_{obs} задано на Γ_{op}

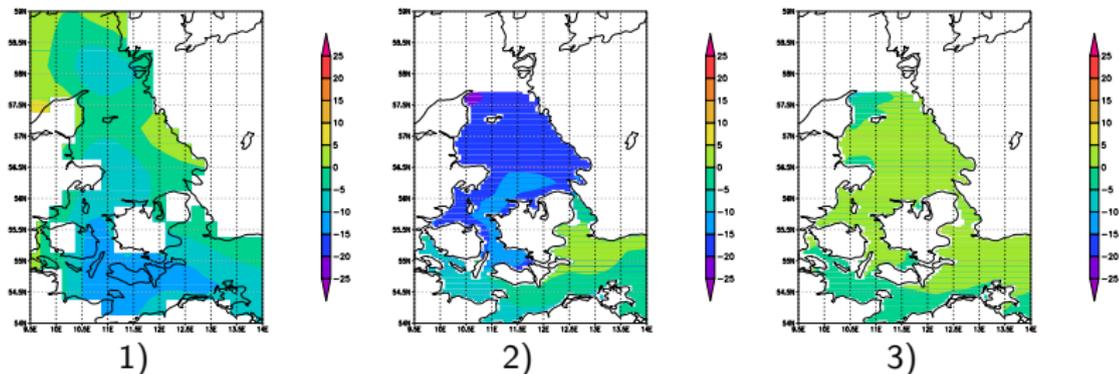


Рис. 1 : Уровень моря среднесуточный (см) при $T = 4$ дня (04/03/2017): 1) данные наблюдений (спутниковые, DUACS DT2014); 2) расчет без ассимиляции; 3) расчет с использованием ассимиляции.

Что будет, если ξ_{obs} задано не на Γ_{op} ? Ниже приведены результаты эксперимента для безразмерной дискретизованной по времени задачи на квадрате, ξ_{obs} задано на Γ_{obs} .

Обозначим $\chi = \sqrt{gH\tau}/L$, где L – пространственный масштаб области, τ – временной масштаб, H – глубина моря.

Пусть $\rho(\Gamma_{obs}, \Gamma_{op}) = \inf_{x \in \Gamma_{obs}, y \in \Gamma_{op}} \|x - y\|_{R^2} = L$.

Эксперимент 2: ξ_{obs} задано на левой границе, Γ_{op} – справа

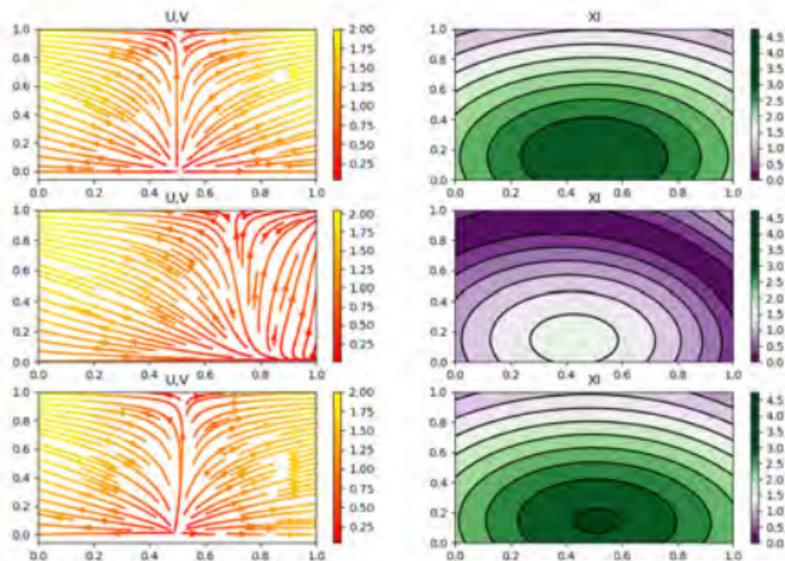


Рис. 2 : Сравнение результата эксперимента для $\chi = 1$ с точным решением. В левом столбце – поля скоростей (безразмерные), в правом – функция уровня (безразмерная). В строке 1 – точное решение, в строке 2 – начальное приближение, в строке 3 – восстановленное решение.

При $\chi = \sqrt{gH}\tau/L \ll 1$ метод не работает.

Задача ассимиляции данных о температуре (солёности)

Рассмотрим задачу с Шага 1 метода расщепления:

$$\begin{cases} T_t + \bar{U} \cdot \mathbf{Grad} T - \mathbf{Div}(\hat{\alpha}_T \mathbf{Grad} T) = f_T \text{ в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} + \gamma_T (T - T_a) = m_{w,op} U_n^{(-)} d_T + Q_T \text{ на } \Gamma \times (t_{j-1}, t_j), \\ T = T_{j-1} \text{ при } t = t_{j-1} \text{ в } D, \end{cases} \quad (5)$$

где $\gamma_T \equiv 0$, $T_a \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_S \forall t$, $U_n^{(-)} = 0$ на $(\Gamma_{w,c} \cup \Gamma_H \cup \Gamma_S) \times (t_{j-1}, t_j)$, $d_T \equiv 0$ на $(\Gamma \setminus \Gamma_{w,op}) \times (t_{j-1}, t_j)$.

Пусть на Γ_{obs} имеются наблюдения T_{obs} , χ_{obs} – характеристическая функция Γ_{obs} . Сформулируем обратную задачу: *найти T и d_T , удовлетворяющие системе (5) и уравнению замыкания:*

$$\chi_{obs} T = \chi_{obs} T_{obs} \text{ на } \Gamma \times (t_{j-1}, t_j), \quad (6)$$

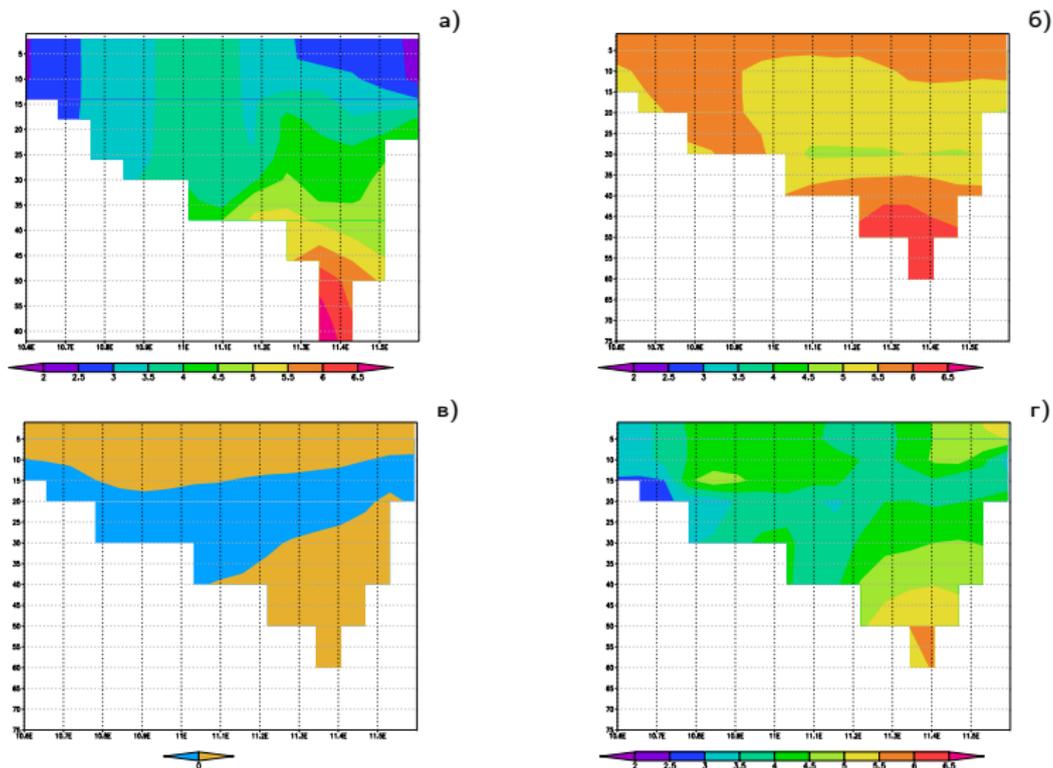


Рис. 3 : а) данные наблюдений (реанализа); б) расчет без ассимиляции; в) infow/outflow points; г) расчет с ассимиляцией

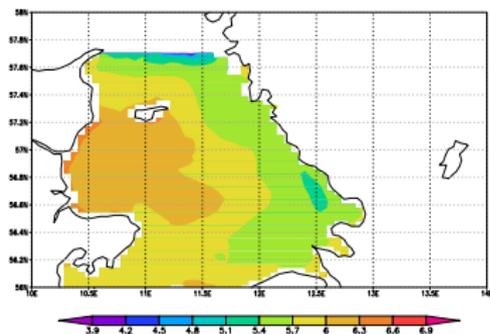
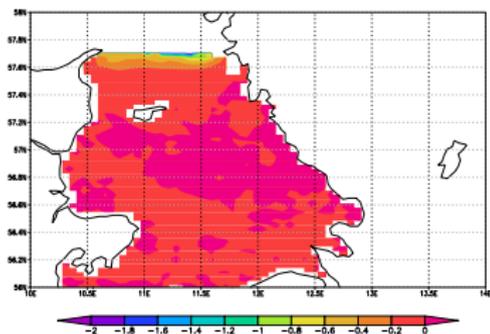
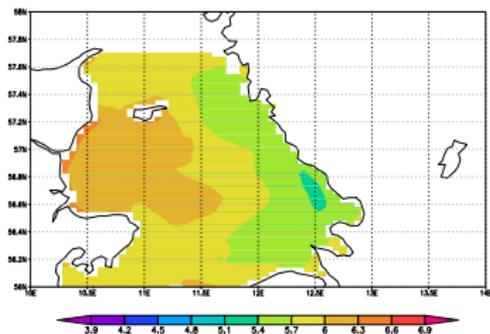
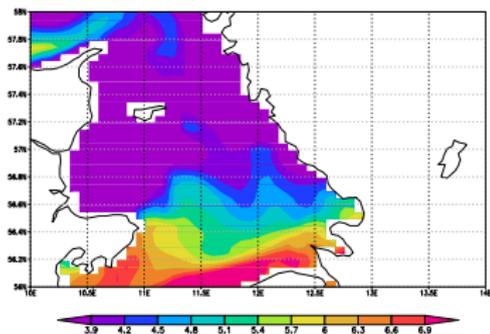


Рис. 4 : а) данные наблюдений (реанализа); б) расчет без ассимиляции; в) разница между б) и г); г) расчет с ассимиляцией

Использование метода разделения области в задачах о восстановлении граничных функций на жидких границах

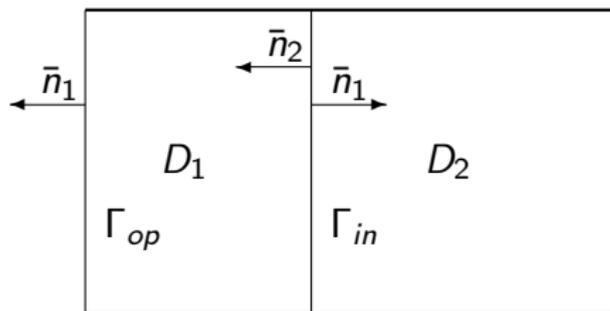


Рис. 5 : Схема разделения области по «внутренней жидкой» границе Γ_{in}

Задача (5) может быть записана на каждом из множеств $D_1 \times (t_0, t_1), D_2 \times (t_0, t_1)$ с введением условий сопряжения вида:

$$T_1 = T_2, \quad (7)$$

$$U_{n,1}^{(-)} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} = - \left(U_{n,2}^{(-)} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} \right) \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1) \quad (8)$$

где $N_{T,i}$ – внешняя к Γ_{in} конормаль к $D_i, (i = 1, 2)$.

Пусть вводится “дополнительная неизвестная” v (“управление”) на $\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)$ как

$$v \equiv U_{n,1}^{(-)} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1), \quad (9)$$

подлежащая определению вместе с T_1, T_2 . Отмечаем, что в силу (8) имеем:

$$U_{n,2}^{(-)} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} = -v \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1) \quad (10)$$

Условие (7) возьмем в качестве дополнительного условия замыкания.

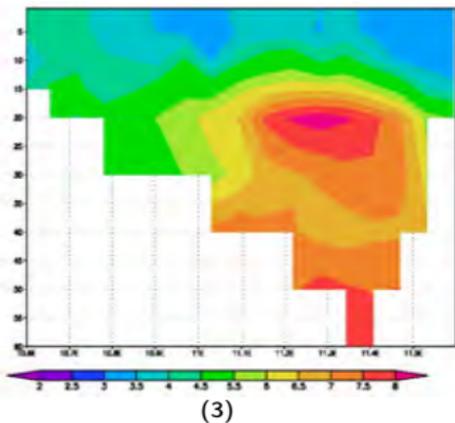
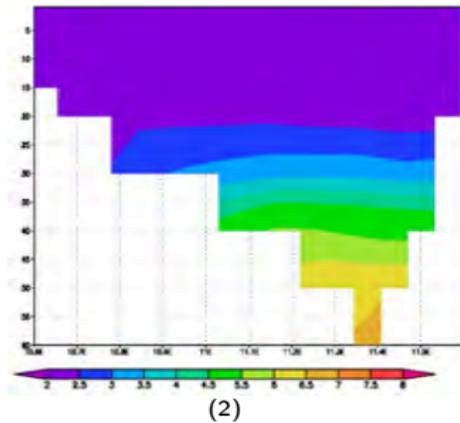
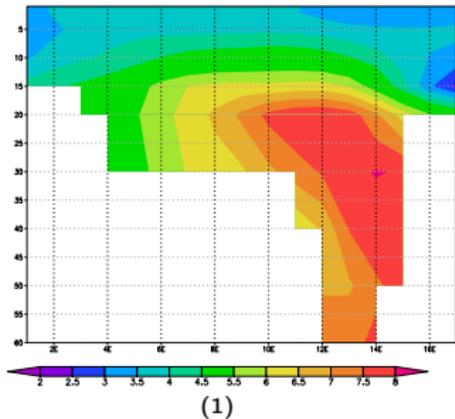


Рис. 6: Профиль температуры на «жидкой» границе при $T = 7$ дней: 1) данные наблюдений; 2) расчет без DA и DDM; 3) расчет с использованием DA и DDM.

Для задачи (4) также можно сформулировать метод разделения области. Для этого на Γ_{in} запишем условия сшивки:

$$H(\bar{U}_1, \bar{n}_1) = -H(\bar{U}_2, \bar{n}_2) \quad \text{на } \Gamma_{in} \quad (11)$$

$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{на } \Gamma_{in} \quad (12)$$

Пусть вводится “дополнительная неизвестная” v (“управление”) на $\Gamma_{in} \times (t_0, t_1)$ как

$$\sqrt{gH}v \equiv H(\bar{U}_1, \bar{n}_1) \quad \text{на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1), \quad (13)$$

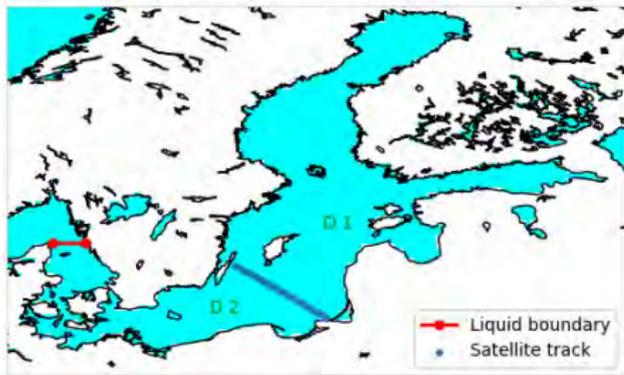
подлежащая определению вместе с ξ , \bar{U} . Отмечаем, что в силу (11) имеем:

$$H(\bar{U}_2, \bar{n}_2) = -\sqrt{gH}v \quad \text{на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1) \quad (14)$$

Условие (12) возьмем в качестве дополнительного условия замыкания.

Возможность практической реализации алгоритмов

Если неизвестные функции потоков через жидкую границу входят в вектор управления, то для сформулированных алгоритмов требуются данные наблюдений непосредственно на жидкой границе или в ее окрестности. Таких данных может не оказаться. В этом случае:



- можно использовать рассмотренный подход в методе вложенных сеток;
- можно использовать данные реанализа.
- можно формулировать другие постановки, адаптированные к **специфике реальных данных наблюдений.**

- 1 *Чернов И. А., Толстиков А. В.* Численное моделирование крупномасштабной динамики Белого моря // Труды Карельского научного центра РАН. 2014. №4. С. 137-142.
- 2 *Кубряков А. И.* Применение технологии вложенных сеток при создании системы мониторинга гидрофизических полей в прибрежных районах Черного моря // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика». – 2004. – вып. 11. – С. 31-50.
- 3 *Agoshkov V.I.* Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with 'liquid' boundaries // RJNAMM, 2017. V. 32, No. 2. P. 73-90.
- 4 *Christopher A. Edwards, Andrew M. Moore, Ibrahim Hoteit, Bruce D. Cornuelle.* Regional Ocean Data Assimilation // Annual Review of Marine Science, 2015. 7:6.1-6.22.
- 5 *Orlanski I.* A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // J. Comput. Phys., 1976. Vol. 21, No. 3. P. 251-269.
- 6 *Marchesiello P., McWilliams J. C., Shchepetkin A.* Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models // Ocean Modelling, 2001, 3, pp. 1-20.
- 7 *Zalesny V. B., Gusev A. V., Chernobay S. Yu., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytkönen J.* The Baltic Sea circulation modelling and assessment of marine pollution // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2014, Vol.29, No. 2, pp. 129-138.
- 8 *Agoshkov V.I., Sheloput T.O.* The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with 'liquid' boundaries // RJNAMM, 2017. V.32, No. 3. P. 147-164.
- 9 Copernicus Marine Environment Monitoring Service. URL: <http://marine.copernicus.eu/>. Дата обращения: 24.11.2017.