Турбулентные ветровые волны на потоке воды

М.В. Заволженский, П.Б. Руткевич

Институт космических исследований РАН
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 84/32
Email: peter_home@tarusa.ru

В работе представлена аналитическая модель ветровых волн на поверхности воды. Модель позволяет определять длину и скорость ветровых волн по их инкременту и азимуту распространения. Как частный случай модель описывает волны-убийцы и неподвижные волны, динамически вмороженные в общую картину трехмерных ветровых волн. Во впадинах неподвижных волн накапливается пена, водоросли и другой мелкий материал, который визуализирует неподвижные волны в виде светлых полос Ленгмюра. Неподвижные волны видны на аэрофотосъемке волновой поверхности при сильном ветре.

Чтобы понять ветровые волны, достаточно внимательно посмотреть на аэрофотосъёмку волновой поверхности. На такой поверхности отчётливо просматриваются два направления: направление полос Ленгмюра и направление, в котором волны не распространяются. Ясно, что в последнем направлении длина волн равна нулю. Поэтому существует замкнутая (поскольку волны ограничены по длине, такая кривая не уходит в бесконечность) кривая линия, касательная к которой ориентирована по направлению нераспространения волн. Хорды линии, отсчитанные от точки касания, равны длинам ветровых волн. Такую кривую линию уместно назвать диаграммой длин волн по азимуту выбранной хорды диаграммы.

Полосы Ленгмюра представляют собой неподвижные на воде волны, так как они в самом деле неподвижны на волновой поверхности. Такие волны «распространяются» (т. е. ориентированы) в направлении, ортогональном полосам Ленгмюра. Понятно теперь, что по ориентации неподвижных волн (ортогонально полосам Ленгмюра), скорость ветровых волн равна нулю. Поэтому существует замкнутая кривая линия, касательная нормали к полосам Ленгмюра, хорды которой, отсчитанные от точки касания, равны скорости ветровых волн. Такую кривую линию уместно назвать азимутальным годографом скоростей ветровых волн по азимуту выбранной хорды годографа. Имея диаграмму длин волн и азимутальный годограф их скоростей, найдём длину и скорость волн по любому выбранному азимуту, а также волны максимальной длины и волны максимальной скорости.

Ветровые волны моделируются на основании уравнений Навье-Стокса с изотропным турбулентным сопротивлением [1]. Ветровые волны являются результатом взаимодействия воздушного течения со скоростью V_1 и подводного течения со скоростью V_0. Угол между векторами V_1 и V_0 равен α. Исходными являются уравнения Навье-Стокса с турбулентным сопротивлением [2 – 4]:

$$\frac{\partial v_j}{\partial t}+\left(v_j\cdot\nabla\right)v_j=-\frac{\nabla p_j}{\rho_j}+\nu_j\nabla^2 v_j-\kappa_j\left(v_j-V_j\right)-\vec{g},\ \nabla\cdot v_j=0,\quad j=0,1$$

В уравнениях вектор V_j – скорость воздуха V_1 при $z\rightarrow+\infty$ и скорость потока воды V_0 при $z\rightarrow-\infty$. Система уравнений при сопряжении течений воздуха и воды на поверхности разрыва плотности жидкостей $z=0$ имеет простое погранслойное решение, независящее от времени. Ветровые волны изучаются как форма потери устойчивости такого погранслойного течения. Результат анализа дисперсионного соотношения приводит к следующей системе волн на поверхности воды:

$$\zeta = a(\lambda_K, \theta)\exp\left\{\frac{2\pi i}{\lambda_K}\left[\mathrm{r}\cos(\varphi-\theta) - \dot{\lambda}_K \mathrm{t} + (\mathrm{K}-1)\kappa \mathrm{t}\right]\right\}, \quad (1)$$

r – расстояние от точки наблюдения, φ – азимут наблюдения, θ – азимут распространения волны, отсчитываемые от вектора V_1, t – время, $\mathrm{c_i} = \mathrm{K}-1$ – безразмерный инкремент, λ_K – длина, $\dot{\lambda}_\mathrm{K}$ – скорость волны по азимуту θ:

$$\lambda_K = \mathrm{L}_K \left|\sin(\beta-\theta)\right|, \quad \mathrm{L}_K = \frac{2\pi\sqrt{\mathrm{C}}}{\kappa(1+\delta)\mathrm{K}^2}, \quad \delta = \frac{\rho_1\sqrt{\nu_1\kappa_1}}{\rho\sqrt{\nu\kappa}}, \quad (2)$$

$$\dot{\lambda}_K = \Sigma_K \sin(\theta-\theta_K) = \Sigma_K \cos(\theta-\theta_K'), \quad \Sigma_K = \frac{\sqrt{\mathrm{AK}^2+2\mathrm{BK}+\mathrm{C}}}{(1+\mathrm{d})\mathrm{K}}, \quad (3)$$

$$\sin(\theta_K) = \frac{\mathrm{K}(\delta\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_0\cos\theta) - 2\delta(\mathrm{V}_1-\mathrm{V}_0\cos\theta)}{\sqrt{\mathrm{AK}^2+2\mathrm{BK}+\mathrm{C}}}, \quad \theta_K' = \frac{\pi}{2}\mathrm{signK} - \theta_K,$$

$$\cos(\theta_K) = \frac{(\mathrm{K}+2\delta)\mathrm{V}_0\sin\alpha}{\sqrt{\mathrm{AK}^2+2\mathrm{BK}+\mathrm{C}}},$$

$$A = \delta^2\mathrm{V}_1 + 2\delta\mathrm{V}_1\mathrm{V}_0\cos\alpha + \mathrm{V}_0^2, \quad B = 2\delta\left(\mathrm{V}_0^2 - (1-\delta)\mathrm{V}_1\mathrm{V}_0\cos\alpha - \delta\mathrm{V}_1^2\right),$$

$$C = 4\delta^2\left(\mathrm{V}_1^2 - 2\mathrm{V}_1\mathrm{V}_0\cos\alpha + \mathrm{V}_0^2\right), \quad (4)$$

$$\sin\beta = 2\delta\frac{\mathrm{V}_1-\mathrm{V}_0\cos\alpha}{\sqrt{\mathrm{C}}}, \quad \cos\beta = \frac{2\delta\mathrm{V}_0\cos\alpha}{\sqrt{\mathrm{C}}}$$

$$\sin\gamma = \frac{\delta\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_0\cos\alpha}{\sqrt{\mathrm{A}}}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathrm{V}_0\sin\alpha}{\sqrt{\mathrm{A}}},$$

K – произвольное действительное число, ρ_1, ν_1, κ_1 и $\rho_0 = \rho, \nu_0 = \nu, \kappa_0 = \kappa,$ $(\rho >> \rho_1)$ – плотности, вязкости и турбулентные сопротивления воздуха и воды. В соотношения (1) – (4) гравитация g не входит, поэтому описываемые волны являются негравитационными. Они являются турбулентными в своей основе, так как при $\kappa_1 = \kappa = 0$ на основании классических уравнений Навье-Стокса нельзя построить исходного невозмущенного погранслойного течения. В дальнейшем негравитационные волны называем K (каппа) волнами. Окружности (2) на плоскости полярных координат $(\lambda_\mathrm{K}, \theta)$ называются диаграммой длин, окружность (3) на плоскости $(\dot{\lambda}_\mathrm{K}, \theta)$ – азимутальным K – годографом скоростей K – волн. Из соотношений (2) следует, что осью диаграммы длин волн является прямая $\theta = \beta \pm \pi/2$. Окружности диаграммы длин волн имеют общую касательную $\theta = \beta(+\pi)$. Поэтому в направлениях $\theta = \beta(+\pi)$ длина K – волн равна нулю. Такое направление всегда видно как при визуальном наблюдении, так и на аэрофотосъемках [5]. Центр окружности азимутального годографа лежит на луче $\theta = \theta'_K$. Диаметр K – годографа в направлении $\theta = \theta'_K$ называется главным диаметром годографа. Скорость K – волн в направлении $\theta = \theta'_K$ максимальна и равна Σ_K. Касательная к K – годографу в полюсе O имеет уравнение $\theta = -\theta_K(+\pi)$. Поэтому по азимутам $\theta = -\theta_K(+\pi)$ K – волны неподвижны. Они не изменяют своего положения на волновой поверхности, а их амплитуда при $K < 1$ убывает до нуля, а при $K > 1$ – неограниченно возрастает. Но при $K \to \infty$ роста объема волны нет, так как (см. (2)) длина волны при $K \to \infty$ – неограниченно убывает. Поэтому при увеличении K – волны быстро опрокидываются. При $K = 1$ нейтральные неподвижные 1-волны представляют собой синусоидальную гофрировку поверхности воды, динамически вмороженную в волновую поверхность. Во впадинах такой гофрировки скапливается пена, водоросли и другой мелкий материал, который маркирует неподвижные нейтральные волны в виде светлых полос Ленгмюра, наблюдаемых визуально и на аэрофотосъемках. Впадины волн в своем пересечении образуют изогональную сетку, состоящую из параллелограммов-ячеек. K ячейки также видны на аэрофотосъемках. Из формул (1) – (4) следует, что все волновые ячейки в самом деле являются параллелограммы, которые движутся как твердое тело с постоянной скоростью Σ_K. В каждой волновой ячейки возвышение и понижение волновой поверхности повторяется. Тем самым моделируется трехмерная бугристость волновой поверхности. Все узлы – линии пересечения гребней – K-волновых ячеек движутся со скоростью Σ_K. Это создает видимость, что все трехмерные волны распространяются в одну сторону и движутся с постоянной скоростью. Среди всех K – ячеек выделяются ячейки Ленгмюра, одна из сторон которых равна длине $\lambda_{K0} = \lambda_K \left|\sin\left(\theta_K + \beta\right)\right|$ неподвижных K-волн (см. формулу (2) при $\theta = -\theta_K$).

Длинноволновая ячейка Ленгмюра в качестве своей второй стороны имеет максимальную длину волн L_K. Площадь нейтральной длинноволновой ленгмюровской ячейки $S_L = L_1 \lambda_{10} \left|\cos^{-1}\left(\theta_1 + \beta\right)\right|$. Ортогональная ячейка Ленгмюра – прямоугольник, вторая сторона которого – длина самых быстрых волн (см. (2) при $\theta = \theta'_K$) $\ell_K = L_K \left|\sin\left(\theta'_K - \beta\right)\right|$. Площадь нейтральной ортогональной ячейки Ленгмюра $S_\ell = \ell_1 \lambda_{10}$. Скорость самых длинных волн $\sigma_K = \Sigma_K \cos\left(\theta_K + \beta\right)$.

Среди всех K – годографов особое место занимает годограф, который в полюсе O касается оси $\theta = \beta \pm \pi/2$ диаграммы длин волн. Такой годограф называется сигма – годографом. Центр σ – годографа лежит на общей касательной $\theta = \beta(+\pi)$ к окружностям диаграммы длин волн (на луче $\theta = \beta$ при $0 \le \alpha \le \pi$ и на луче $\theta = \beta + \pi$ при $-\pi < \alpha < 0$). Поэтому при выходе динамики K – волн на σ – годограф волны равной длины распространяются с одинаковой по модулю скоростью, а волны, идущие с одной и той же по абсолютной величине скоростью, равны по длине. В общем случае – когда K – годограф пересекает ось диаграммы длин волн – это не так: волны равной длины движутся с разными скоростями. Такой процесс моделирует зыбь – проблема, которая в динамике ветровых волн считается наиболее трудной. Из формул (1) – (4) при $K=1$ следует, что самой распространенной ситуацией для нейтральных волн является их движение в сторону против ветра, так как главный диаметр годографа скоростей нейтральных волн в большинстве случаев составляет с направлением ветра угол по модулю больший прямого. Это и есть зыбь. Так как центр σ – годографа лежит на луче, по направлению которого длина волн равна нулю, главный диаметр σ – годографа определяет скорость волн нулевой (в пределе) длины, т. е. скорость ряби на воде по азимуту $\theta=\beta(+\pi)$:

$$\sigma=\frac{\sqrt{A}\sin(\beta+\gamma)}{1+\delta}=\frac{V_1V_0\sin\alpha}{\sqrt{V_1+2\delta V_1V_0\cos\alpha+V_0^2}}=\frac{2\delta V_0\sin\alpha}{\sqrt{C}}. \tag{5}$$

Длины и скорость K – волн обладают всеми свойствами хорд окружностей. Например, из приведенных формул легко проверить теорему Пифагора для наиболее характерных длин волн и их скоростей: $\lambda_{K0}^2+\ell_K^2=L_K^2$, $\sigma_K^2+\sigma^2=\Sigma_K^2$. Замечательное свойство скорости σ (см. (5)) состоит в том, что скорость σ не зависит от инкремента. Это значит, что любой K – годограф в качестве одной из своих хорд содержит главный диаметр σ – годографа. Поэтому геометрическим местом центров K – годографов является прямая линия MN, перпендикулярная вектору σ и проходящая через его середину (параллельно оси $\theta=\beta\pm\pi/2$ диаграммы длин волн), а геометрическим местом концов главных диаметров K – годографов является прямая линия PQ, перпендикулярная вектору σ и проходящая через его конец. Прямые MN, PQ, $\theta=\beta\pm\pi/2$ и $\theta=\beta(+\pi)$ входят в скелет динамики K – волн. Полный скелет состоит из этих прямых и K-нулевой линией – геометрического места точек на плоскости полярных координат $(|K|,\theta)$, в которых скорость K – волн равна нулю. Уравнение K – нулевой линии выводим из уравнения (3):

$|K|=\dfrac{\sin(\beta-\theta)}{\sin(\beta+\theta)}\sqrt{\dfrac{C}{A}}signK$. Кривая состоит из двух зигзагообразных ветвей, которые пересекаются в общей точке перегиба – полюсе O. Ветвь K<0 соответствует сильнозатухающим волнам. Деление волн на сильно- (K<0) и слабозатухающие (0<K<1) обусловлено тем, что сектора ориентации главных диаметров годографов скоростей сильнозатухающих и слабозатухающих волн разделены сектором ориентации главных диаметров скоростей незатухающих K>1) волн. Она по касательной к лучу $\theta=\beta$ из полюса O выходит на асимптоту $\theta=\beta-\gamma$. Ветвь K>0 соответствует незатухающим, нейтральным и слабозатухающим волнам. Она по касательной $\theta=\beta$ из полюса выходит на асимптоту $\theta=-\gamma$. Основной результат, связанный с K-нулевой линией: любая хорда этой линии, проходящая через точку самопересечения O, является касательной к K – годографу, которому соответствует значение параметра K, равное половине длины этой хорды. Возьмем Т – образную линейку, ножку которой разметим в единицах скорости (м/с), а полку – в единицах $K=\kappa c_i'+1$ в разные стороны от основания ножки в зависимости от знака размерного инкремента c_i' волн (1). Прикрепим Т-линейку шарнирно в полюс O основанием ножики так, чтобы <<отрицательная>> часть полки имела выход на азимут $\theta=\pi-\gamma$, когда ножка направлена в полуплоскость, содержащую луч $\theta=\gamma'=(\pi/2)-\gamma$. По азимуту $\theta=\gamma'$ ориентированы главные диаметры К – годографов при $K\to\pm\infty$. В любом фиксированном положении Т – линейка, K – нулевая линия и прямые линии MN, PQ, $\theta=\beta\pm\pi/2$ образуют жесткую конструкцию. Поэтому, если известна одна из шести величин: инкремент c_i' К – волн, определяющий отрезок К Т – полки от основания ножки с учетом его знака, азимут $\theta=-\theta_K'$ (или $\theta=-\theta_K'+\pi$, перпендикулярный фронту неподвижных К – волн, направление $\theta=\theta_K'$ максимальной скорости Σ_K К – волн, или скорости узлов Σ_K – ячеек, или линий впадин неподвижных К – волн, максимальная скорость Σ_K, положение центра К – годографа, величина и направление скорости σ_K (по одному из азимутов $\theta=\beta\pm\pi/2$) К – волн максимальной длины, то она определяет положение МТ -линейки, а вместе с ним и остальные пять характеристик турбулентных волн. Если МТ – полка пересекает ветвь К – нулевой линии, выходящую на асимптоту $\theta=-\gamma$, то К – волны либо не затухают, либо нейтральны, либо слабозатухающие. Если МТ – полка пересекает ветвь с асимптотой $\theta=\pi-\gamma$, то К – волны являются сильнозатухающими. Для построения окружности К – годографа достаточно знать величину и направление скорости двух различных К – волн для одного и того же значения инкремента.

Замечательным свойством К – волн является повышенная живучесть нейтральных волн. Если скорость потока воды составляет острый угол с направлением ветра $\left(|\alpha|\le\alpha_0=\arcsin(1+\delta)/(1+3\delta)\right)$, то при увеличении скорости ветра динамика К – волн из незатухающих превращается в слабозатухающие и при дальнейшем увеличении V_1 – снова превращается в незатухающие. В этом процессе нейтральные волны возникают дважды. Существует простое физическое объяснение этому явлению. Вектор V_0 скорости течения воды является одним из главных диаметров годографов скоростей незатухающих волн (К=2). Это значит, что вода развивает свои возмущения. Вектор V_1 скорости ветра – главный диаметр годографа скоростей сильнозатухающих волн $(K=-2\delta)$. Поэтому вода гасит посторонние волновые возмущения. Антагонизм между этими двумя противоположными свойствами воды и приводит к тому, что при увеличении V_1 волновая динамика развивается <<вспять>> по оси инкрементов от незатухающих волн к слабозатухающим.

Максимальная скорость Σ_K при $\alpha=0$ и при $\alpha=\pi$ обращается в нуль при $K=K_0=\dfrac{2\delta(V-V_0)}{\delta V+V_0}$, $K=K_\pi=\dfrac{2\delta(V+V_0)}{\delta V-V_0}$. При таких значениях характеристики инкремента K_0 – и K_π – волны неподвижны во всех направлениях. Если убрать все К – волны и оставить только K_0 – и K_π – волны, то поверхность воды будет представлять собой неподвижную в пространстве барханообразную деформацию поверхности воды. Длина таких барханообразных волн

$$\lambda_{Ko}=\frac{\pi\left(\delta V_1+V_0\right)^2\left|\cos\theta\right|}{\kappa\delta\left|V_1-V_0\right|}\ (\alpha=0),\quad \lambda_{K\pi}=\frac{\pi\left(\delta V_1-V_0\right)^2\left|\cos\theta\right|}{\kappa\delta\left|V_1+V_0\right|}\ (\alpha=\pi).$$

При $\delta_0V_1=(1+2\delta)V_0$ имеется $L_K=4\pi V_0/\kappa(\mathrm{v}=V_1/V_0)$. При этом $K_0=1$. Поэтому барханообразные волны K_0 – волны с минимальной по v длиной нейтральны и их <<высота>> не зависит от времени.

Барханообразные волны встречаются в окрестности юго-восточной Африки и, реже, по течению Гольфстрим. В том случае, когда амплитуда барханообразной волны быстро растёт со временем (K>0), абсолютно неподвижная волна называется «волна-убийца», «аномальная волна» и др. Такие волны иногда топят корабли. В районе юго-восточной Африки волны-убийцы возникают на Агульясовом течении (течение Игольного мыса) как раз в том случае, когда ветер ориентирован по течению воды α [6]. На Гольфстриме в районе Бермудского треугольника волны-убийцы возникают мгновенно и достигают 18-ти метров. В 1912-м году в районе Бермудских островов трёхмачтовое парусное судно <<Маркес>> накрыло волной-убийцей высотой в 30 метров. Следующая волна-убийца его потопила (передача <<Discovery>>, 17-го декабря 2004-го года).

Проведенные исследования, результаты которых минимум качественно совпадают как с визуальными наблюдениями, так и с аэрофотосъемкой, убеждают нас, что основные морские и речные волны имеют не гравитационную, а турбулентную природу: исходные соотношения не содержат ускорения g. Эти соотношения имеют глубокую гидродинамическую природу – кластерную и микрогетерогенную структуру жидкостей и, как следствие, их турбулентное сопротивление – главный физический стимулятор ветровых волн, так как в его отсутствие ($\kappa=\kappa_1=0$) нельзя построить исходного невозмущенного погранслойного течения. Вряд ли является случайным, что общее дисперсионное уравнение имеет кратный корень и, как следствие, очень простые и исключительно информативные дисперсионные соотношения. Эти соотношения не только объясняют все основные свойства рассматриваемых волн (многообразие, трёхмерность, направление движения, скорость, длина, зыбь и др.), но и обнаруживают новые – неподвижные – волны.

Предсказание неподвижных и барханообразных волн свидетельствует о том, что модель жидкости, основанная на уравнениях Навье-Стокса с турбулентным сопротивлением обладает прогностическими возможностями. Разработанная методика моделирования ветровых волн может без труда выносить картинку, аналогичную аэрофотосъемке, но с направлением распространения и с величинами скоростей и длин волн на экран монитора компьютера в рубки подводных и надводных кораблей, гидросамолётов, а также в диспетчерские портов, маяков, нефтяных вышек на шельфе и т.п.

Литература

1. *Заволженский М.В., Руткевич П.Б.* Большие числа Рейнольдса: обтекание контуров. Препринт Пр-2117. М.: ИКИ РАН, 2006, 60 с.
2. *Заволженский М.В., Руткевич П.Б.* Уточнённый прогноз траекторий тропических циклонов. Препринт Пр-2112. М.: ИКИ РАН, 2005, 24 с.
3. *Заволженский М.В., Руткевич П.Б.* Колебательная фаза хобота смерча. Препринт Пр-2116. М.: ИКИ РАН, 2006, 28 с.
4. *Кондратьев К.Я., Никаноров А.М., Пантюхин Я.В., Заволженский М.В.* Некоторые турбулентные течения в водоемах // ДАН России, 1992, т. 324, № 3, с. 676 – 680.
5. *Титов Л.Ф.* Ветровые волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1969, 294 с.
6. *Mallory J.K.* Abnormal waves on the south-east of South Africa // Instr. Hydrod. Rerv – 1974 – № 51, p. 89 – 129.