

Порядковая статистика долин, найденных по цифровой модели рельефа. Масштабный фактор и уравнения Хортона

А. А. Златопольский¹, Е. А. Шекман²

¹ *Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия
E-mail: aazlat@gmail.com*

² *Тихоокеанский институт географии ДВО РАН, Владивосток, 690041, Россия
E-mail: shekman.e@gmail.com*

Представлено продолжение исследования средних структурных характеристик сети водотоков, построенных по цифровой модели рельефа (ЦМР) стандартным алгоритмом моделирования речной сети. Называем такие сети М-сетями, состоящими из М-долин. М-долины разделяются на масштабные уровни в соответствии с системой порядков Хортона – Стралера. Масштабный уровень М-долины определяется номером её порядка и начальным масштабом (порогом на минимальную площадь водосбора в квадратных километрах). Эксперимент на шести больших территориях показал, что средние характеристики М-долин одного масштабного уровня для всех исследованных территорий очень близки. Исходя из этого эмпирического факта, отношения Хортона были преобразованы в уравнения, названные уравнениями Хортона, которые позволяют рассчитать ожидаемые средние значения характеристик М-долин, если заданы их порядок и начальный масштаб. По среднему значению одной из характеристик эти уравнения позволяют рассчитать для той же группы М-долин средние значения других характеристик. Уравнения Хортона даны в нескольких вариантах, что позволяет выбрать параметры, на которые удобно опираться в конкретной ситуации. Сопоставление значений плотности и числа М-долин, полученных по уравнениям Хортона, с практическими измерениями показало, что различие расчётных и экспериментальных данных меньше 10 % (а чаще меньше 2 %), если выполняются два условия: 1) на исследуемой территории достаточно много М-долин выбранного порядка (больше 100); 2) построение М-долин проводится по ЦМР с достаточно хорошим разрешением. В случае грубой ЦМР, когда долины 1-го порядка начинаются с небольшой (в пикселях) площади водосбора (например, 50 пикселей), различие возрастает вдвое. Скорее всего, в обеих ситуациях недостаточна точность результата экспериментального измерения средних значений.

Ключевые слова: ЦМР, расчёт сети долин, порядок долин, статистические характеристики долин, соотношения Хортона, масштабный фактор

Одобрена к печати: 26.09.2022

DOI: 10.21046/2070-7401-2022-19-5-113-122

Введение

В настоящей статье мы продолжим излагать результаты статистических исследований сетей тальвегов (линий водотоков), построенных по цифровым моделям рельефа (ЦМР) (Златопольский, 2022). Чтобы помнить, что речь идёт не о реальных гидросетях и долинах, называем сети водотоков, автоматически построенные по модели рельефа, М-сетями, состоящими из М-долин. Для построения М-сетей используем широко распространённый алгоритм ГИС-моделирования (ГИС — геоинформационные системы) стока (в восьми направлениях), который описан, например, в работе (Гарцман и др., 2015). Иерархия М-долин организуется системой порядков Хортона – Стралера: первый порядок присваивается истокам, а М-долина порядка $k + 1$ образуется при слиянии М-долин порядка k .

В предыдущей публикации показана необходимость учитывать масштаб анализа ЦМР. Так, если различные большие территории ($>400\,000\text{ км}^2$) анализировать в едином масштабе, то средние статистические характеристики их М-долин одного порядка оказываются очень близкими. Как правило, исследователи масштабный фактор не учитывают и исследуют не абсолютные, а относительные свойства характеристик М-долин — как их характеристики меняются при смене порядка. Закономерность этих изменений отражается в отношениях, называемых

отношениями Хортон (Хортон, 1948). За многие годы исследований эти отношения хорошо изучены и их параметры определены достаточно уверенно (Pelletier, 1999; Wang et al., 2022). Но если дополнительно учитывать и масштабный фактор, то появляется возможность от отношений перейти собственно к уравнениям, которые показывают, какие значения характеристик М-долин можно ожидать при том или ином масштабе анализа.

Цель настоящей работы — показать, как именно учесть масштаб, как сформировать масштабный фактор, и в результате дать пример уравнений. Эти уравнения сопоставлены с результатами статистических измерений по шести совершенно разным территориям. Начнём изложение с описания используемых обозначений.

Статистические характеристики М-сетей. Отношения Хортон

Приведём обозначения статистических характеристик М-сетей, стараясь использовать те, которые обычно встречаются в публикациях:

- A_k — средняя площадь водосбора в устье М-долин порядка k .
- N_k — среднее число М-долин порядка k на квадратный километр.
- D_k — суммарная длина М-долин порядка k в километрах на квадратный километр (плотность).
- L_k — средняя длина М-долин порядка k , $L_k = D_k/N_k$.

Используем значения на квадратный километр — число долин и плотность — для того, чтобы можно было сопоставить результаты по территориям разного размера.

Отношения Хортон фиксируют тот эмпирический факт, что изменение средних значений этих характеристик от порядка k к порядку $k+1$ происходит с постоянным мультипликативным шагом — коэффициентом Хортон R . Величина этого шага для каждой характеристики своя, но одинакова для различных территорий.

- $R_B = N_{k+1}/N_k$ — изменение среднего числа М-долин за один порядок, которое называют коэффициентом бифуркации и полагают равным $1/4,4$ (Wang et al., 2022).
- $R_A = A_{k+1}/A_k$ — изменение средней площади водосбора в устье М-долин за один порядок. Поскольку суммарная площадь водосбора Q_k мало меняется от порядка k к порядку $k+1$, а средняя площадь водосбора $A_k = Q_k/N_k$, то R_A близко к $1/R_B$. В работе (Pelletier, 1999) приводятся результаты экспериментов, из которых следует, что $R_B = (R_A)^{-p}$, где p для разных территорий было в диапазоне $0,95–0,99$. Мы будем ориентироваться на середину диапазона, величину $0,97$, а значит, на $R_A = (R_B)^{-1,031} = 4,6$. Обратим внимание, что М-долина порядка $k+1$ образуется из двух М-долин порядка k , а значит, в среднем площадь водосбора у истоков М-долин порядка $k+1$ равна $2A_k$. Так как средняя площадь водосбора в устье М-долин порядка $k+1$ равна $A_k R_A$, то в среднем площадь водосбора у долин каждого порядка растёт в $R_A/2$ раз.
- $R_L = L_{k+1}/L_k$ — изменение средней длины М-долин за один порядок. Из экспериментальных результатов в работе (Pelletier, 1999) $R_L = (R_A)^q$, где q для разных территорий было в диапазоне $0,5–0,55$. Если ориентироваться на середину диапазона, то $R_L = 2,2$. Мы будем измерять не характеристику L , а связанную с ней плотность D .
- $R_D = D_{k+1}/D_k$ — изменение плотности М-долин за один порядок. Так как $D_k = L_k N_k$, то и $R_D = R_L R_B = 0,5$.

Упомянем ещё одну характеристику М-долин, описанную нами ранее, W_k — среднюю ширину М-долин порядка k (Златопольский, 2022). Шириной М-долины мы называем локальное расстояние между водоразделами, ограничивающими долину. Эту нестандартную для отношений Хортон характеристику оценить удалось менее точно, чем остальные. Здесь мы с ней работать не будем, но для единообразия приведём полученный ранее результат.

Итак, мы ввели необходимые нам обозначения и привели указанные в литературе значения коэффициентов Хортон, которые показывают отношения характеристик последующих порядков: $R_B = 1/4,4$; $R_A = 4,6$; $R_D = 0,5$; $R_L = 2,2$.

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство, отмеченное в опубликованных экспериментальных исследованиях. Средние характеристики М-долин связаны между собой, и если одна из них, скажем площадь водосбора, изменилась во столько-то раз, то совершенно определённым образом изменяются и другие характеристики. В цитированной работе (Pelletier, 1999) именно площадь водосбора A служит основой для определения изменения всех остальных характеристик: среднее число М-долин пропорционально $A^{-0,95}$, их средняя длина пропорциональна $A^{0,52}$, средний уклон пропорционален $A^{-0,37}$ и т. д. Эти экспериментальные соотношения мы будем учитывать далее при построении уравнений.

Масштабный фактор

Отмеченная выше взаимосвязь характеристик М-долин одного порядка обусловлена их единым масштабным уровнем. При изменении масштаба, размера, порядка анализируемых М-долин синхронно изменяются их длина, ширина, площадь водосбора и т. д. Система порядков Хортона – Стралера фактически делит М-долины на «наборы» близкого масштабного уровня. Если у М-долин некоторого порядка среднее значение одной из характеристик обозначить C , а коэффициент Хортона для этой характеристики — R , то значения этой характеристики для данного порядка можно преимущественно ожидать между $CR^{-0,5}$ и $CR^{0,5}$, для следующего порядка — между $CR^{0,5}$ и $CR^{1,5}$ и т. д.

Таким образом, шаг изменения этой последовательности от порядка к порядку фиксирован и описывается коэффициентами Хортона, а начало последовательности задаёт «начальный масштаб» — тот уровень детальности, который исследователь выбрал для поиска М-долин 1-го порядка. Меняя начальный масштаб, исследователь может сдвинуть последовательность этих интервалов так, как ему удобно, скажем на целый порядковый шаг или на его четверть. Отметим, что ни в своих экспериментах, ни в публикациях мы не обнаружили, что какое-то одно или несколько положений начального масштаба больше соответствуют реальному рельефу.

В использованном ГИС-алгоритме построения М-долин начальный масштаб задаётся порогом на минимальную площадь водосбора S (км²) для М-долин 1-го порядка. Значение порога t задаётся в пикселях, и с учётом разрешения ЦМР r (км/пиксель) получаем $S = tr^2$. Через коэффициент Хортона эта величина позволяет определить средний водосбор для всех порядков. Поскольку М-долины 1-го порядка начинаются с водосбора площадью S , то, как мы показали выше, средняя площадь водосбора в устье этих долин будет $A_1 = 0,5SR_A$ и далее $A_k = 0,5SR_A^k$.

Таким образом, масштабный уровень М-долины определяется тремя параметрами: её порядком k , разрешением ЦМР r и порогом на минимальную площадь водосбора t в пикселях. Один и тот же уровень масштаба можно получить при разной комбинации этих параметров. Наборы М-долин, образующиеся при той или иной комбинации, могут строго не совпадать друг с другом, и сами линии М-долин при разном разрешении r различаются из-за разной степени их генерализации, но статистические характеристики М-долин этих наборов одинаковы (включая и локальную среднюю ориентацию М-долин (Златопольский, 2022)).

Величины k , t и r можно объединить в единый масштабный фактор, что даёт численную характеристику масштабного уровня и позволяет сопоставлять М-долины по данному значению. В этом качестве в предыдущей работе было предложено использовать порядок М-долин, построенных при фиксированных «базовых» параметрах расчёта: $r = 0,065$ км/пиксель, $t = 200$ пикселей, а значит $S = 0,85$ км². Очень приблизительно М-сеть, рассчитанная с такими параметрами, схожа с речной сетью («синими линиями») карты масштаба 1:100 000. Параметры построения М-долин, которые выбираются обычно, принципиально отличаются от этого базового варианта. Порядок М-долин k , построенных с другим начальным масштабом S , можно «привести» к базовому варианту, рассчитав «приведённый порядок» $p = k - \log_{4,6}(0,85/S)$. Эта величина p служит масштабным фактором и позволяет соотнести масштаб М-долин, построенных при разных параметрах расчёта. (Заметим,

что по сравнению с предыдущей работой числовые коэффициенты этой и других формул уточнены.)

В качестве масштабного фактора можно также использовать и среднюю площадь водосбора A_k . Эта характеристика наглядна и включает в себя значения как порога, так и порядка: $A_k = 0,5SR_A^k$.

Естественно, не только при автоматическом, но и при ручном построении гидросети по топографической карте результат зависит от выбранного масштаба. В этом случае масштаб долины определяется её порядком и масштабом использованной карты. При автоматическом расчёте роль, аналогичную масштабу карты, играет минимальная площадь водосбора S . К сожалению, не нашлось публикаций, в которых указывалось бы численное соответствие масштаба карты и порога на площадь водосбора. В качестве первого приближения будем считать, что «синим линиям» карты масштаба 1:m соответствуют М-долины, построенные с порогом $S = 1,2(m/10^5)^2 \text{ км}^2$. То есть гидросети карты масштаба 1:100 000 примерно соответствует расчёт по ЦМР с минимальной площадью водосбора $1,2 \text{ км}^2$. Если исследователи продлят «синие линии» ещё на порядок или два, опираясь на рисунок горизонталей, то первый множитель должен быть 0,25 или 0,06 соответственно. Несомненно, этот множитель необходимо в дальнейшем уточнять. Обратим внимание, что масштаб карт меняется с шагом 2–2,5, т. е. примерно $\sqrt{R_A}$, поэтому, если при анализе гидросети перейти к следующему, более мелкому масштабу, то полученные там долины 1-го порядка будут соответствовать долинам 2-го порядка с карты прежнего масштаба.

Уравнения Хортона

Построение М-сетей по разным территориям, но с единым масштабным уровнем позволило обнаружить, что для этих территорий сохраняются не только отношения средних значений характеристик М-долин последующих порядков — коэффициенты Хортона, — но и абсолютные значения этих характеристик, которые могут быть описаны уравнениями (Златопольский, 2022). Другими словами, учёт масштабного фактора позволяет перейти в описании статистических характеристик М-долин от отношений Хортона непосредственно к уравнениям, которые соответствуют этим отношениям, прямо включают коэффициенты Хортона, так что естественно называть их уравнениями Хортона. Параметр, который необходимо было добавить к отношениям, — множитель, учитывающий начальный масштаб анализа, — получен нами из экспериментов.

В предыдущей работе масштаб характеризовался значением «приведённого порядка» p , и уравнения Хортона там имели вид:

$$N_p = 0,3035R_B^{(p-1)}; \quad D_p = 0,388R_D^{(p-1)}; \quad L_p = 1,28R_L^{(p-1)}; \quad W_p = 2^{(p-1)}. \quad (1)$$

Здесь и далее числовые параметры уравнений приведены такими, какими они получены по данным экспериментов, хотя, скорее всего, точность чисел избыточна. С помощью этих формул можно оценивать характеристики М-долин. Предположим, необходимо выбрать размер окна статистического анализа М-долин 3-го приведённого порядка, при этом можно опираться на ожидаемое значение плотности этих М-долин, которое из формулы получается около $0,1 \text{ км}/\text{км}^2$. Или можем определить число М-долин 6-го приведённого порядка на площади в $500\,000 \text{ км}^2$ — 93 шт.

Чтобы опираться на другие показатели масштаба, достаточно формально преобразовать эти уравнения. Поэтому результаты всех представленных вариантов формул практически идентичны. Если в качестве масштабного фактора использовать площадь водосбора, то уравнения приобретают следующий вид:

$$N_k = \frac{0,5775}{A_k^{0,97}}; \quad D_k = \frac{0,5245}{A_k^{0,45}}; \quad L_k = 0,91A_k^{0,52}; \quad W_k = 0,74A_k^{0,45}. \quad (2)$$

Показатели степени для N и L взяты нами из работы (Pelletier, 1999). Обратим внимание, что номер порядка k не участвует в формулах (2). Он только показывает, что средние значения характеристик считаются по М-долинам одного и того же масштабного уровня. Если у таких долин средняя площадь водосбора A , то можно просто записать:

$$N = \frac{0,5775}{A^{0,97}}; \quad D = \frac{0,5245}{A^{0,45}}; \quad L = 0,91A^{0,52}; \quad W = 0,74A^{0,45}. \quad (3)$$

Так как средние характеристики М-долин одного масштабного уровня связаны между собой и формулы их соответствия известны, аналогичные уравнения можно получить и с опорой на другие характеристики, например на плотность D , которую легко рассчитать в ГИС:

$$N = 2,33D^{2,168}; \quad A = \frac{0,238}{D^{2,22}}; \quad L = \frac{0,43}{D^{1,168}}; \quad W = \frac{0,388}{D}; \quad (4)$$

И наконец, если масштаб характеризовать непосредственно порогом на минимальную площадь водосбора и номером порядка, то уравнения выглядят следующим образом:

$$N_k = \frac{0,26}{S^{0,97}} R_B^{(k-1)}; \quad D_k = \frac{0,3606}{S^{0,45}} R_D^{(k-1)}; \quad L_k = 1,385S^{0,52} R_L^{(k-1)}; \quad W_k = S^{0,45} 2^{(k-1)}. \quad (5)$$

Обратим внимание, что, зная средние характеристики и порядок М-долин, по этим формулам можно найти параметр расчёта S . Например, если известна плотность D_k , то $S = \left(0,3606 R_D^{(k-1)} / D_k\right)^{2,22}$.

Прежде чем перейти к сопоставлению этих формул с экспериментально полученными характеристиками М-долин различных территорий, укажем на следующее обстоятельство. Как мы отмечали, выбрав начальный масштаб, можно задать нужное расположение масштабных диапазонов фиксированного размера для М-долин последовательных порядков. Но есть возможность выделить М-долины определённого масштаба, опираясь не на систему порядков, а непосредственно на характеристики М-долин, которые статистически связаны с масштабным уровнем. Например, выбрать для анализа М-долины с площадью водосбора в интересующем интервале вокруг некоторого значения A . Для этих М-долин по формулам (3) можно найти оценки других средних характеристик. Можно разбивать М-долины на масштабные диапазоны нужного размера, используя и другие характеристики, например длину М-долин.

Экспериментальные результаты

Сопоставим полученные уравнения Хортон с результатами статистических измерений по шести территориям. Построения выполнялись для больших территорий ($>400\,000\text{ км}^2$), так как при площади на порядки меньше средние значения характеристик существенно зависят от локальных особенностей, а кроме того, не обеспечивается достаточная выборка для статистического анализа М-долин высоких порядков. В нашем случае М-долин порядка 6 и выше оказывается слишком мало (меньше 100, 20 и т. д.), так что результаты для них ниже приводятся только для сведения. Использована достаточно надёжная и доступная для многих территорий модель рельефа SRTM (*англ.* Shuttle Radar Topographic Mission) в проекции UTM (*англ.* Universal Transverse Mercator, универсальная поперечная проекция Меркатора). Территория «Русская платформа» обрабатывалась с разрешением ЦМР 0,13 км/пиксель, а все остальные — 0,0651 км/пиксель. Небольшие участки почти каждой территории, такие как поверхность водоёмов и места без явно выраженных элементов рельефа, были исключены из статистического расчёта с помощью подготовленной маски, так как там не обеспечивается корректное моделирование сети долин. Ниже указывается площадь только той части территории, которая участвовала в измерении:

1. «Шилка» (от р. Аргуни до р. Витим); 49,3–54,96° с. ш., 112,22–121,65° в. д.; 685,5×640 км; 433 539 км².

2. «Амур» (от горной системы Сихотэ-Алинь до р. Буреи); 47,15–53,5° с. ш., 130,66–140,11° в. д.; 717,5×719,4 км; 502 663 км².
3. «Кама» (Татарстан и вокруг); 52–58° с. ш., 48–57° в. д.; 617,7×683,4 км; 412 885 км².
4. «Нигер» (Гвинея и Сьерра-Лионе); 7–12,9° с. ш., 7,5–13,3° з. д.; 641×656,3 км; 408 092 км².
5. «Пара» (юго-восток бассейна р. Амазонки); 3–10° ю. ш., 48–54° з. д.; 667,08×775,29 км; 515 576 км².
6. «Русская платформа»; 49,5–59,5° с. ш., 34–55° в. д.; 1519,18×1164,28 км; 1 753 437 км².

Обратим внимание, что использованные в формулах коэффициенты Хортона определялись по отдельным гидросетям, а мы анализируем территории полностью, включая и обретенные части соседних гидросетей.

Наша задача — по возможности аккуратно оценить точность предложенных соотношений. Поскольку средние характеристики М-долин жёстко связаны между собой, достаточно сопоставить с экспериментальными результатами ту из них, которую можно наиболее точно рассчитать в ГИС. Поэтому основное внимание мы уделили статистическому анализу плотности М-долин D_k . На нескольких территориях мы также оценили и формулу для числа М-долин N_k . Значения L_k однозначно определяются через D_k и N_k , а значения A_k вычисляются из S . Результаты разных вариантов уравнений одинаковы (неважно, какую именно их форму выбрать для сопоставления), мы использовали уравнения (1).

В *табл. 1* приведено среднее для первых пяти территорий значение плотности М-долин семи порядков. Везде М-долины строились с едиными базовыми параметрами: $r = 0,0651$ км/пиксель, $t = 200$ пиксель, т. е. $S = 0,85$ км² (а значит, полученные порядки соответствуют приведённым). Разброс средних значений для этих территорий оцениваем стандартным отклонением, делённым на среднее. Разброс совсем невелик, и это самое существенное в результатах данной таблицы — при единых параметрах анализа характеристики М-долин разных территорий очень близки. В третьем столбце приведено отношение средней плотности последовательных порядков, которое очень близко к обратному коэффициенту Хортона: $1/R_D = 2$. Отличие экспериментального результата от расчётного (столбец 5) невелико. В последнем столбце в качестве наглядной характеристики масштаба каждого порядка приведено расчётное значение средней площади водосбора A_k .

Таблица 1. Среднее значение плотности М-долин

Порядок k	Среднее D_k , м/км ²	Разброс D_k , %	Отношение средних D_k/D_{k+1}	Отличие среднего D_k от расчётного, %	Расчётное A_k , км ²
1	401,75620	4,282150	2,043472	–3,550	1,9550
2	196,60470	2,804187	2,015396	–1,340	8,9930
3	97,55143	1,514267	2,161131	–0,570	41,3678
4	45,13906	4,613734	2,039404	6,930	190,2919
5	22,13346	8,572321	1,764478	8,730	875,3426
6	12,54391	10,582560	2,150327	–3,455	4 026,5760
7	5,83349	4,703502	–	3,780	185 22,2500

Как видим, формулы достаточно хорошо (отличие менее 10 %) описывают средние характеристики М-долин, построенных при базовых параметрах алгоритма. Поскольку первый сомножитель формул получен из этих данных, а второй — это коэффициент Хортона, то необходимо оценить соответствие расчёта и эксперимента при существенно иных параметрах построения М-долин. Рассмотрим М-долины территории «Амур» при семи вариантах параметров расчёта, приведённых в *табл. 2*. Масштаб анализа этих вариантов можно оценить по рассчитанным для М-долин 1-го порядка ожидаемым значениям их числа, средней пло-

щадии водосбора и приведённого порядка. В качестве варианта 8 указаны параметры анализа территории «Русская платформа».

Таблица 2. Параметры М-долины территории «Амур»

Вариант	Разрешение r , км/пиксель	Порог t , пиксель	Порог S , км ²	Водосбор A_1 , км ²	Приведённый порядок	Число М-долин
1	0,0651	200	0,85	2,00	1,00	15 3008
2	0,1390	44	0,85	2,00	1,00	15 3008
3	0,0651	283	1,20	2,76	1,23	10 9331
4	0,0950	200	1,70	3,90	1,45	7 8111
5	0,5210	50	13,56	31,20	2,80	1 0422
6	0,0651	3200	13,56	31,20	2,80	1 0422
7	0,0950	3200	27,12	62,38	3,27	5320
8	0,1300	200	3,38	7,774	1,90455	13 9899

Дадим несколько пояснений к этим вариантам. Есть пары — 1 и 2, 5 и 6 — с одинаковым начальным масштабом (а значит, масштабные уровни всех порядков одинаковы), но с различными разрешением и порогом в пикселях. Статистически они должны быть идентичны, хотя линии М-долин будут различаться из-за разной генерализации ЦМР. Относительно порядков варианта 1 масштабный уровень порядков варианта 3 сдвинут на четверть масштабного шага, а у порядков варианта 4 — почти на половину шага. М-долины 1-го порядка в варианте 6 — это почти М-долины 3-го порядка варианта 1. Аналогично у вариантов 3 и 7.

В табл. 3 показаны результаты измерений для варианта 1. Отличие от расчётного значения у первых пяти порядков меньше 1 %, кроме 4-го порядка, где оно 8,2 %. Поскольку параметры расчёта базовые, хорошее сходство ожидаемо, а вот отличие результатов измерений для М-долин 4-го порядка, возможно, повод обратить внимание на особенности долин этого порядка.

Таблица 3. Результаты измерений для варианта 1

Номер порядка k	Плотность D_k , м/км ²	Отличие D_k от расчётного, %	Расчётное число М-долин
1	391,43840	0,890	15 3008
2	192,65320	-0,690	3 4775
3	96,94633	-0,055	7903
4	44,52192	-8,200	1 796
5	24,16091	-0,370	408
6	11,79751	-2,700	93
7	6,075055	0,210	21

При остальных вариантах расчёта, включая и расчёт по территории «Русская платформа», отличие измеренной средней плотности от расчётной больше чем на 10 % встречалось только на высоких порядках, когда на территории оказывалось слишком мало М-долин для надёжной оценки — меньше 30. Один раз отличие больше 10 % было на 5-м порядке при 200 М-долинах (вариант 4).

Исключение составляют расчёты по ЦМР с недостаточным разрешением, когда пороговая площадь водосбора в пикселях получается совсем небольшой — 50 и меньше. Так, в расчёте по варианту 2 отличие на 12 % получается для 4-го порядка при 1800 М-долинах, тогда как в варианте 1 с теми же масштабными уровнями отличие у 4-го порядка — 8 %. А при

ещё большем «заглублении» ЦМР (вариант 5, разрешение уменьшено в 8 раз) отличие в 12 % оказалось у М-долин 2-го порядка, их 2200, и 21 % — у М-долин 3-го порядка, их 500. Если М-долины тех же масштабных уровней строить при полном разрешении (вариант 6), то отличие от расчёта для этих порядков получается 4 и 8 % соответственно.

В *табл. 4* приведено среднее для трёх территорий («Шилка», «Амур», «Пара») число М-долин N_k , построенных с базовыми параметрами. Хотя измерение этой характеристики в ГИС менее точно, чем расчёт плотности, но и здесь отличие полученных значений от расчётных невелико. Для М-долин «Русской платформы» отличие для первых пяти порядков меньше 3 %. Таким образом, уравнение для числа М-долин также отражает практические результаты достаточно хорошо. Для территории «Амур» сделаны также расчёты числа М-долин с параметрами варианта 2 из *табл. 2*. Результат аналогичен результату расчёта плотности: при большем разрешении отличие от расчёта у первых пяти порядков было меньше 4 %, а во втором случае доходило до 9 %.

Таблица 4. Среднее для трёх территорий число М-долин с базовыми параметрами

Номер порядка k	Среднее число М-долин N_k , шт./км ²	Отличие среднего N_k от расчётного, %
1	0,305085297	-0,520
2	0,067975160	1,450
3	0,015385471	1,860
4	0,003563622	-0,021
5	0,000781005	3,550

Выводы

В статье представлены уравнения Хортонa, основанные на известных отношениях Хортонa. Эти уравнения позволяют рассчитать ожидаемые средние значения характеристик М-долин заданного масштабного уровня. Масштабный уровень М-долины определяется номером её порядка и начальным масштабом (порогом на минимальную площадь водосбора М-долин 1-го порядка в квадратных километрах для ГИС-алгоритма). Уравнения даны в нескольких вариантах, что позволяет выбрать параметры, на которые удобно опираться в конкретном расчёте.

Используя уравнения Хортонa, также можно по среднему значению одной характеристики рассчитать для этой же группы М-долин средние значения других характеристик. Кроме того, по среднему значению характеристики М-долин известного порядка можно оценить начальный масштаб расчёта.

Поскольку характеристики М-долин связаны между собой, сопоставить расчёт с экспериментальными результатами достаточно для одной из них. Мы выбрали плотность М-долин, которая аккуратно рассчитывается штатными процедурами ГИС. Менее объёмно было проверено уравнение для числа М-долин.

Проверка на шести различных территориях с площадью больше 400 000 км² показала, что формулы дают довольно хороший результат: отличие от экспериментальных данных меньше 10 % (а чаще меньше 2 %), если выполняются два условия, обеспечивающие достоверность экспериментальных измерений:

1. На исследуемой территории достаточно много М-долин выбранного порядка. Как правило, достаточно сотни М-долин, хотя в одном случае отличие больше 10 % было при 200 М-долинах.
2. Построение М-долин должно проводиться по ЦМР с достаточно хорошим разрешением. Для грубой ЦМР, когда долины 1-го порядка начинаются с небольшой в пикселях (!) площади водосбора, скажем с 50 пикселей, отличие больше 10 % можно получить и при 2000 М-долинах. В этих ситуациях отличие, скорее всего, происходит из-за недостаточной точности экспериментальных измерений.

В дальнейшей работе нужно уточнить предложенные формулы. В первую очередь это относится к первому сомножителю, хотя, возможно, будут уточняться и коэффициенты Хортона. Кроме того, имеет смысл найти аналогичные формулы и для других характеристик М-долин с известными коэффициентами Хортона. А возможно, удастся таким же образом связать с масштабом М-долин и иные показатели рельефа, например возраст заложения долин. Также было бы полезно уточнить соответствие начального масштаба при автоматическом и ручном построении М-долин. Ручной вариант сейчас встречается редко, но такое соотнесение позволило бы адекватно учитывать результаты прежних исследований.

Ещё одно направление работы — опробовать разбиение М-долин на масштабные диапазоны не по порядкам, а по их характеристикам. Вполне возможно, к таким диапазонам удастся привязать особенности рельефа, связанные с размером структур, такие как ориентация, возраст и др.

Авторы благодарят Б. И. Гарцмана за обсуждение результатов, сделанные замечания и предложения по продолжению исследования.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Мониторинг», госрегистрация № 122042500031-8).

Литература

1. Гарцман Б. И., Бугаец А. Н., Тегай Н. Д., Краснопеев С. М. Анализ структуры речных систем и перспективы моделирования гидрологических процессов // Речные системы Дальнего Востока России: четверть века исследований. Владивосток: Дальнаука, 2015. С. 265–277.
2. Златопольский А. А. Порядковая статистика долин, найденных по цифровой модели рельефа. Базовый расчет и приведенный порядок // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2022. Т. 19. № 3. С. 133–142. DOI: 10.21046/2070-7401-2022-19-3-133-142.
3. Хортон Р. Е. Эрозионное развитие рек и водосборных бассейнов. Гидрофизический подход к количественной морфологии: пер. с англ. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 158 с.
4. Pelletier J. D. Self-organization and scaling relationships of evolving river networks // J. Geophysical Research. 1999. V. 104. No. B4. P. 7359–7375.
5. Wang K., Zhang L., Li T., Li X., Guo B., Chen G., Huang Y., Wei J. Side Tributary Distribution of Quasi-Uniform Iterative Binary Tree Networks for River Networks // Frontiers in Environmental Science. 2022. V. 9. Art. No. 92289. DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.

Ordinal statistics of the valleys found by the digital terrain model: Scale factor and Horton's equations

A. A. Zlatopolsky¹, E. A. Shekman²

¹ Space Research Institute, Moscow 117997, Russia
E-mail: aazlat@gmail.com

² Pacific Geographical Institute FEB RAS, Vladivostok 690041, Russia
E-mail: shekman.e@gmail.com

The article presents a continuation of the study of the average structural characteristics of a network of watercourses constructed using a digital terrain model (DTM) by a standard algorithm for modeling a river network. We call such networks M-networks consisting of M-valleys. M-valleys are divided into scale levels according to the Horton-Strahler system of orders. The scale level of the M-valley is determined by its order number and initial scale (threshold for the minimum catchment area in km²). The experiment on 6 large territories showed that the average characteristics of M-valleys of the same scale level for all the studied territories are very close. Based on this empirical fact, the Horton relations

were transformed into equations called Horton equations, which allow us to calculate the expected average values of the characteristics of M-valleys, if their order and initial scale are given. Based on the average value of one of the characteristics, these equations allow us to calculate the average values of the other characteristics for the same group of M-valleys. The Horton equations are given in several variants, which allows one to choose parameters that are convenient to rely on in a specific situation. Comparison of the density values and the number of M-valleys obtained by the Horton equations with practical measurements showed that the difference between the calculated and experimental data is less than 10 % (and often less than 2 %) if 2 conditions are met: 1) there are a large number of M-valleys of the selected order (more than 100) in the study area; 2) the construction of M-valleys is carried out according to the DTM with a good resolution. In the case of a rough DTM, when valleys of the 1st order begin with a small (in pixels) catchment area (for example, 50 pixels), the difference doubles. Most likely, in both situations, the accuracy of experimental measurement results of average values is insufficient.

Keywords: DTM, valley network calculation, valley order, statistical characteristics of valleys, Horton ratios, scale factor

Accepted: 26.09.2022

DOI: 10.21046/2070-7401-2022-19-5-113-122

References

1. Gartsman B. I., Bugaets A. N., Tegai N. D., Krasnopeev S. M., Analysis of the structure of river systems and the prospects for modeling hydrological processes, *River system of Pacific Russia: A quarter century of research*, Vladivostok: Dalnauka, 2015, pp. 273–285 (in Russian).
2. Zlatopolsky A. A., Ordinal statistics of the valleys found by the digital terrain model. Basic calculation and converted order, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2021, Vol. 18, No. 6, pp. 141–151 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2021-18-6-141-151.
3. Horton R. E., Erosional development of streams and their drainage basins. Hydrophysical approach to quantitative morphology, *Bull. Geological Society of America*, 1945, Vol. 56, pp. 275–370.
4. Pelletier J. D., Self-organization and scaling relationships of evolving river networks, *J. Geophysical Research*, 1999, Vol. 104, No. B4, pp. 7359–7375.
5. Wang K., Zhang L., Li T., Li X., Guo B., Chen G., Huang Y., Wei J., Side Tributary Distribution of Quasi-Uniform Iterative Binary Tree Networks for River Networks, *Frontiers in Environmental Science*, 2022, Vol. 9, Art. No. 792289, DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.