Определение функции рассеяния точки оптической системы звёздных датчиков

Н. А. Строилов, Т. В. Купцов, Е. А. Базина, А. В. Никитин, Я. Д. Эльяшев, Б. А. Юматов

Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия
E-mail: stroilov@iki.rssi.ru

В ходе юстировки оптической системы звёздного датчика необходимо оценивать изображения одиночных звёзд или точечных тест-объектов. Такую обработку удобно проводить, используя функции рассеяния точки (ФРТ). По параметрам функции можно оценивать степень рассеянности звезды, качество фокусировки прибора, а также аберрации его оптической системы. При удовлетворительной фокусировке оптической системы диск Эйри предпочтительно аппроксимировать двумерной функцией распределения Гаусса. Критерием расфокусировки изображения в данном случае является параметр дисперсии функции. Однако функция Гаусса даёт грубую аппроксимацию для расфокусированных изображений, когда максимум интенсивности приходится на концентрические кольца. Для оптических систем со значительными аберрациями функция Гаусса также даёт грубые результаты, особенно для изображений на краях поля зрения. В настоящей работе проведено сравнение трёх аппроксимирующих функций: 1) двумерной функции Гаусса, 2) функции Гаусса, учитывающей поворот, 3) функции, представляющей собой сумму двух двумерных функций Гаусса. Выполнен сравнительный анализ качества аппроксимации с использованием трёх ФРТ. Проведено сравнение, оценены их параметры, критерии качества аппроксимации и дисперсии. Продемонстрировано, что двойная функция показывает более качественные результаты при любых допустимых аберрациях и дефокусировках оптической системы по всему полю изображения.

Ключевые слова: функция рассеяния точки, ФРТ, обработка изображений, фокусировка, юстировка, оптическая система, точка, тест-объект, звезда, аппроксимация, аппроксимирующая функция, функция Гаусса

Одобрена к печати: 01.12.2022
DOI: 10.21046/2070-7401-2022-19-6-41-49

Введение

Функция рассеяния точки (ФРТ, *англ.* point spread function — PSF) аппроксимирует профиль изображения одиночной звезды или точечного источника. При этом допускается, что яркость исходного изображения будет влиять только на амплитуду сигнала на выходе оптической системы (Еремин, Харламов, 2019). Знание ФРТ оптической системы необходимо для обработки изображений в ходе юстировки звёздного датчика. Подобранные параметры позволяют анализировать степень рассеянности изображения, которая, в свою очередь, характеризует дефокусировку прибора и аберрации его оптической системы (Suszyński, Wawryn, 2015). Сложные ФРТ имеют множество параметров и полноценно описывают все аберрации при различных фокусировках. Однако на практике использование сложных функций увеличивает время обработки изображений. Поэтому становится актуальной задача поиска оптимальной функции, позволяющей аппроксимировать наиболее широкий класс экспериментальных данных с высокой точностью и с приемлемым временем обработки.

Требования к аппроксимирующей функции

Для выбранной аппроксимации ФРТ должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \mathrm{PSF}(x, y, \vec{\lambda}) \geqslant 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{PSF}(x, y, \vec{\lambda})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \mathrm{const}, \end{cases} \tag{1}$$

где PSF(x, y, $\vec{\lambda}$) — выбранная аппроксимация ФРТ; $\vec{\lambda}$ — вектор параметров аппроксимирующей функции; x, y — координаты пикселя изображения на фотоприёмной матрице.

Так как на снимке присутствуют минимальный пороговый сигнал и случайный шум (Аванесов и др., 2020), их необходимо учитывать при оценке параметров ФРТ; тогда оцениваемая функция будет иметь вид:

$$F(x, y, \vec{\lambda}) = n(x, y) + PSF(x, y, \vec{\lambda}),$$

где $n(x, y)$ — сумма минимального порогового сигнала и шума.

На практике случайный шум обладает малой дисперсией относительно минимального порогового сигнала и практически не зависит от координат (x, y), так что в первом приближении можно считать:

$$n(x, y) = z_0 = \text{const},$$

где z_0 — значение порогового сигнала, при этом z_0 станет одним из параметров оцениваемого вектора $\vec{\lambda}$. Для удобства и высокой быстроты оценки вектора $\vec{\lambda}$ выбранная аппроксимирующая функция должна зависеть от как можно меньшего числа параметров и быть как можно более простой.

Аппроксимация ФРТ функцией распределения Гаусса

Идеальная оптическая система при наилучшей фокусировке формирует изображение одиночной звезды в фокальной плоскости в виде диска Эйри. При незначительной расфокусировке меняется распределение энергии между основным пятном и кольцами. Наиболее простой функцией для аппроксимации основного сигнала, которая удовлетворяет условию (1), выступает двумерная функция распределения Гаусса (Аванесов и др., 2009):

$$G(x, y) = z_0 + a \cdot \exp\left(-\left(\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right)\right),$$

где a — амплитуда функции; x_0, y_0 — координаты x, y центра функции; $2\sigma_x^2$, $2\sigma_y^2$ — параметры, характеризующие дисперсию функции Гаусса.

Пример кривой G изображён на *рис. 1*.

Так как у данной функции переменные x и y статистически независимы, критерием рассеянности звезды с такой ФРТ могут служить параметры σ_x и σ_y, соответствующие расстоянию между точками перегиба функции Гаусса. Внутри этого диаметра сосредоточено 68 % энергии изображения звезды.

Как будет продемонстрировано ниже, данная аппроксимация показывает приемлемый результат для оптических систем с незначительными аберрациями. Для расфокусированных устройств на краях поля изображений и при наклоне приёмника относительно фокальной плоскости показатели качества резко ухудшаются. Следовательно, функция Гаусса не позволяет в полной мере оценить качество изображения для любых оптических систем.

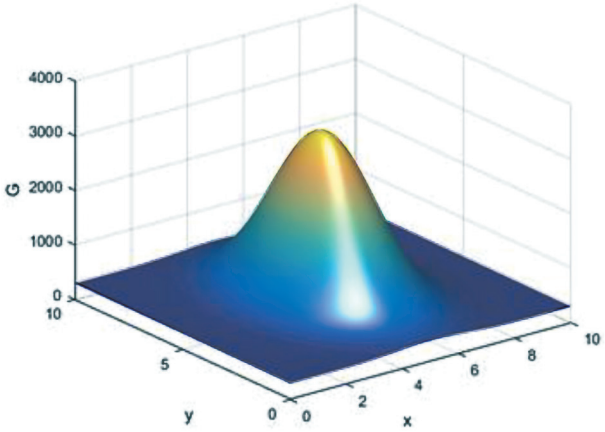


Рис. 1. Пример кривой G

Функция G не учитывает возможную статистическую зависимость переменных x и y, поэтому следует провести аппроксимацию одной функцией Гаусса, повёрнутой на угол θ. Данная аппроксимация будет иметь вид:

$$G_1(x,y) = z_0 + a\cdot\exp\left(-\left(\frac{\left((x-x_0)\cdot\cos(\theta)-(y-y_0)\cdot\sin(\theta)\right)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{\left((x-x_0)\cdot\sin(\theta)+(y-y_0)\cdot\cos(\theta)\right)^2}{2\sigma_y^2}\right)\right).$$

Альтернативная аппроксимация ФРТ

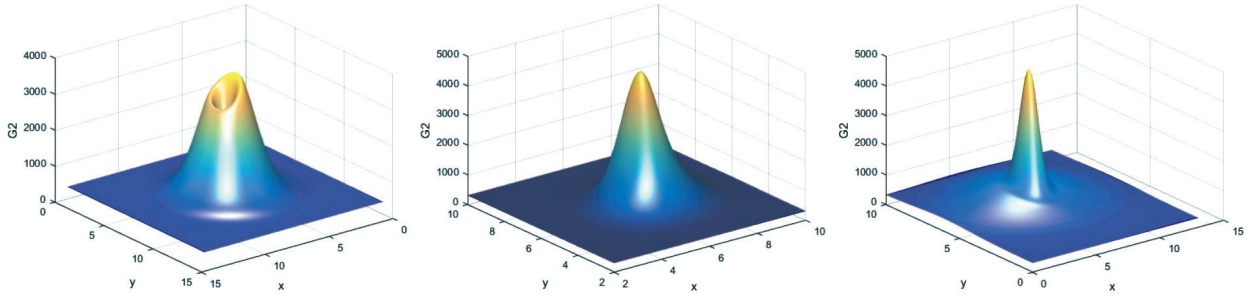
В результате анализа различных снимков звёзд при разных дефокусировках и положениях звезды на матрице была выбрана следующая функция, представляющая собой сумму двух функций распределения Гаусса, повёрнутых на определённый угол и смещённых друг относительно друга:

$$G_2(x,y) = z_0 + a_1\cdot\exp\left(-\left(\frac{\left((x-x_{01})\cdot\cos(\theta)-(y-y_{01})\cdot\sin(\theta)\right)^2}{2\sigma_{x1}^2}+\frac{\left(x-x_{01})\cdot\sin(\theta)+(y-y_{01})\cdot\cos(\theta)\right)^2}{2\sigma_{y1}^2}\right)\right)+$$

$$+a_2\cdot\exp\left(-\left(\frac{\left((x-x_{02})\cdot\cos(\theta)-(y-y_{02})\cdot\sin(\theta)\right)^2}{2\sigma_{x2}^2}+\frac{\left((x-x_{02})\cdot\sin(\theta)+(y-y_{02})\cdot\cos(\theta)\right)^2}{2\sigma_{y2}^2}\right)\right), \quad (2)$$

где a_1, a_2 — амплитуды 1-й и 2-й функций Гаусса (при этом a_2 может принимать отрицательные значения); x_{01}, x_{02}, y_{01}, y_{02} — координаты x, y центра 1-й и 2-й функций Гаусса; $2\sigma_{x1}^2$, $2\sigma_{x2}^2$, $2\sigma_{y1}^2$, $2\sigma_{y2}^2$ — параметры, характеризующие дисперсию 1-й и 2-й функций Гаусса; θ — угол поворота обеих функций Гаусса.

На *рис. 2* изображены примеры функции G_2 с разными параметрами.



а *б* *в*

Рис. 2. Примеры кривой G_2 с параметрами *табл. 1* № 10 (*а*), 5 (*б*) и 7 (*в*)

Для оценки рассеянности изображения звезды будем пользоваться σ. У данной функции в отличие от функции распределения Гаусса переменные x и y имеют статистическую зависимость, поэтому помимо компонент σ_x и σ_y будет присутствовать совместная компонента σ_{xy}. Однако повёрнутые на угол θ координаты

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos(\theta) - y\cdot\sin(\theta), \\ y' = x\cdot\sin(\theta) + y\cdot\cos(\theta) \end{cases}$$

будут статистически независимыми. Поэтому для уменьшения количества компонент σ оно рассчитывалось в координатах x', y'.

Для нахождения σ выражения (2) по x' приравняем $\theta = 0$, z_0 также будем считать равным 0, так как этот параметр не оказывает влияния на значение σ. Тогда $\sigma_{x'}$ будет находиться следующим образом:

$$\sigma_{x'} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Ax^2 G_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \sqrt{\frac{2a_1\left(\sigma_{x1}^2 + (M_X - x_{01})^2\right)\sigma_{x1}\sigma_{y1} + 2a_2\left(\sigma_{x2}^2 + (M_X - x_{02})^2\right)\sigma_{x2}\sigma_{y2}}{a_1\sigma_{x1}\sigma_{y1} + a_2\sigma_{x2}\sigma_{y2}}},$$

где $M_X = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} AxG_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \dfrac{a_1\sigma_{x1}\sigma_{y1}x_{01} + a_2\sigma_{x2}\sigma_{y2}x_{02}}{a_1\sigma_{x1}\sigma_{y1} + a_2\sigma_{x2}\sigma_{y2}}$ — математическое ожидание;

$A = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{-1} = \dfrac{1}{\pi(a_1\sigma_{x1}\sigma_{y1} + a_2\sigma_{x2}\sigma_{y2})}$ — нормирующий коэффициент.

Аналогично σ по y' будет равняться:

$$\sigma_{y'} = \sqrt{\frac{2a_1\left(\sigma_{y1}^2 + (M_Y - y_1)^2\right)\sigma_{x1}\sigma_{y1} + 2a_2\left(\sigma_{y2}^2 + (M_Y - y_2)^2\right)\sigma_{x2}\sigma_{y2}}{a_1\sigma_{x1}\sigma_{y1} + a_2\sigma_{x1}\sigma_{y1}}}.$$

Вектор параметров функции G_2 примет вид:

$$\vec{\lambda} = (z_0, a_1, a_2, x_{01}, x_{02}, y_{01}, y_{02}, \sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \sigma_{y1}, \sigma_{y2}, \theta).$$

Для оценки данного вектора будем пользоваться критерием максимума коэффициента взаимной корреляции, который вычисляется согласно следующему выражению:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(G_2(x_i, y_j, \vec{\lambda}) - \overline{G_2}\right)\cdot\left(Ge_{i,j} - \overline{Ge}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(G_2(x_i, y_j, \vec{\lambda}) - \overline{G_2}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left(Ge_{i,j} - \overline{Ge}\right)^2}} \times 100\,\%,$$

где N и M — размеры окна по x и y, в котором находится изображение звезды; Ge — яркость пикселя в исходном изображении. Использование данного критерия позволит добиться максимального совпадения формы экспериментальных данных и аппроксимации.

Сравнение функций аппроксимации

Для сравнения качества аппроксимации функций G_2, G_1 и G была проведена обработка 200 изображений тест-объектов и реальных звёзд, полученных на различных оптических системах при различной дефокусировке.

Результаты в виде графиков коэффициента взаимной корреляции σ_x и σ_y в зависимости от индекса звезды представлены на *рис. 3*. Значения отсортированы в порядке возрастания σ_x для функции G_2. На *рис. 4* (см. с. 45) показаны зависимости σ_x и σ_y от ρ.

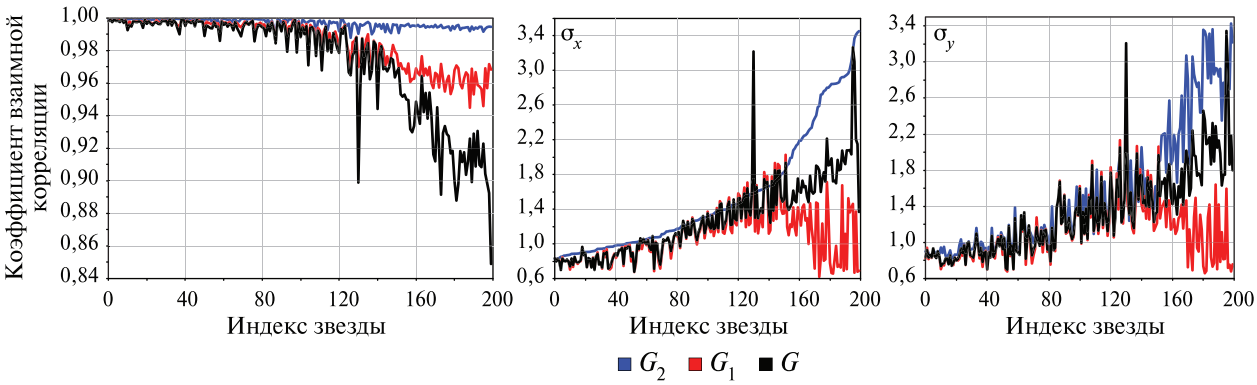


Рис. 3. Результаты аппроксимации выборки для 200 изображений

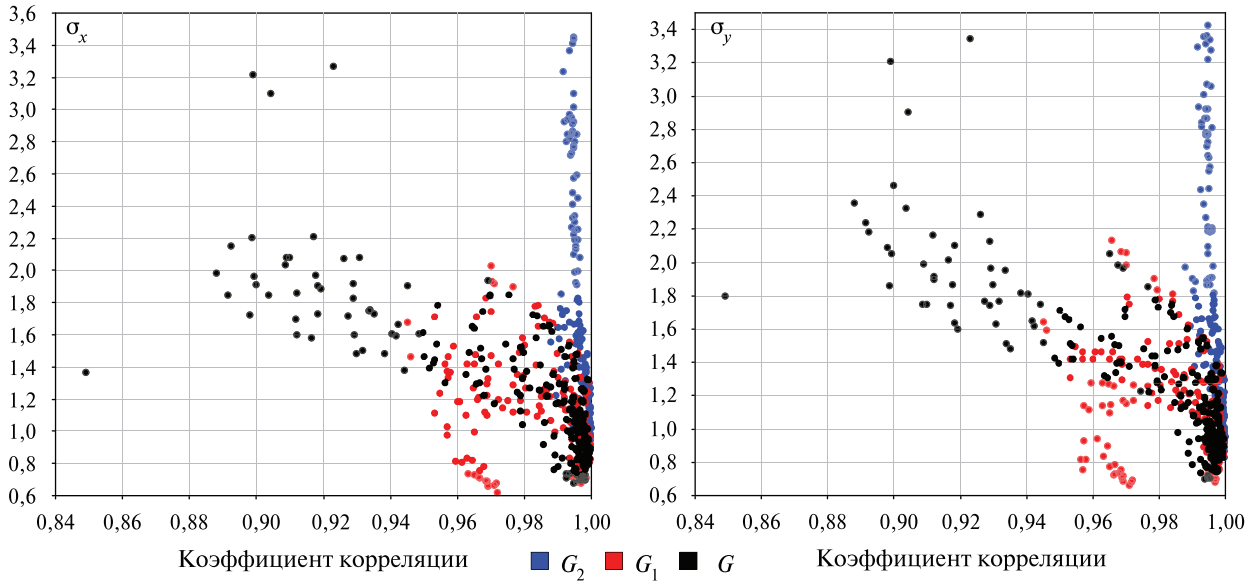


Рис. 4. Зависимость σ_x и σ_y от коэффициента взаимной корреляции выборки в 200 изображений

По *рис. 3* и *4* видно, что функция G_2 даёт стабильные показатели качества во всей выборке и демонстрирует менее выраженную зависимость оценки рассеянности изображения от ρ. Во всех случаях коэффициент взаимной корреляции ρ для функции G_2 не опускается ниже 98,9 %, что говорит о хорошем подборе параметров. Для функций G_1 и G коэффициент ρ принимает различные значения и падает до 94 и 85 % соответственно.

На *рис. 3* видны различия в значениях σ_x и σ_y трёх исследуемых функций для звёзд с индексом более 150 (σ_x и σ_y больше 1,7). Видно, что функция G сильно, а G_1 — незначительно занижают параметры σ_x и σ_y. Это ошибочные результаты, поскольку коэффициент ρ функций G_1 и G уменьшается, в отличие функции G_2. Визуальный анализ подтверждает ошибку: звёзды значительно расфокусированы вплоть до кольцеобразной формы. Это показано ниже на конкретных примерах. На *рис. 4* прослеживаются линейные зависимости параметров σ_x и σ_y от ρ для функций G_1 и G, что также говорит о неадекватности результатов.

Подробные результаты для десяти наиболее показательных примеров приведены в *табл. 1–3*. Результаты в виде изображений представлены на *рис. 5а* (см. с. 46). На *рис. 5б* показаны остаточные рассогласования в ходе аппроксимации, номер строки соответствует номеру примера в *табл. 1–3*. Контраст яркости пикселей подобран по максимальному пикселю в каждом примере отдельно для изображений на *рис. 5а* и *б*.

Таблица 1. Примеры аппроксимации функцией G_2

№	z_0	a_1	x_{01}	y_{01}	$2\sigma^2_{x1}$	$2\sigma^2_{y1}$	a_2	x_{02}	y_{02}	$2\sigma^2_{x2}$	$2\sigma^2_{y2}$	θ, град	σ_x	σ_y	ρ, %
1	311	4186,0	6,52	5,66	3,78	4,03	–2622,0	6,51	5,98	0,60	0,17	9,2	1,41	1,45	99,7
2	305	1753,0	6,17	5,51	4,85	2,81	2010,0	6,05	5,97	0,26	0,34	–9,7	1,49	1,15	99,2
3	313	4163,0	7,14	8,07	5,71	4,49	–2849,0	7,69	8,07	1,15	0,50	4,6	1,75	1,57	98,9
4	316	1539,0	6,45	5,58	2,22	7,84	2874,0	5,85	5,76	0,37	0,48	5,2	1,01	1,83	99,7
5	312	1701,0	6,44	6,27	2,44	1,80	2633,0	5,70	6,27	0,44	0,76	–16,0	1,02	0,87	99,9
6	300	981,5	5,68	6,21	10,6	3,20	2733,0	6,84	7,01	0,58	0,33	17,2	2,15	1,20	99,1
7	316	3832,0	5,83	5,31	0,47	0,42	849,7	6,05	5,99	18,00	6,77	1,0	2,77	1,72	99,2
8	306	2358,0	5,83	5,37	0,61	1,96	1385,0	5,60	5,83	4,95	4,76	–22,0	1,37	1,43	99,3
9	262	353,7	6,29	6,34	2,47	6,86	369,6	6,30	6,57	0,45	7,94	39,5	0,95	1,90	99,9
10	330	3939,0	6,80	7,00	4,80	5,40	–2059,0	7,10	7,10	0,48	0,60	13,9	1,58	1,69	99,7

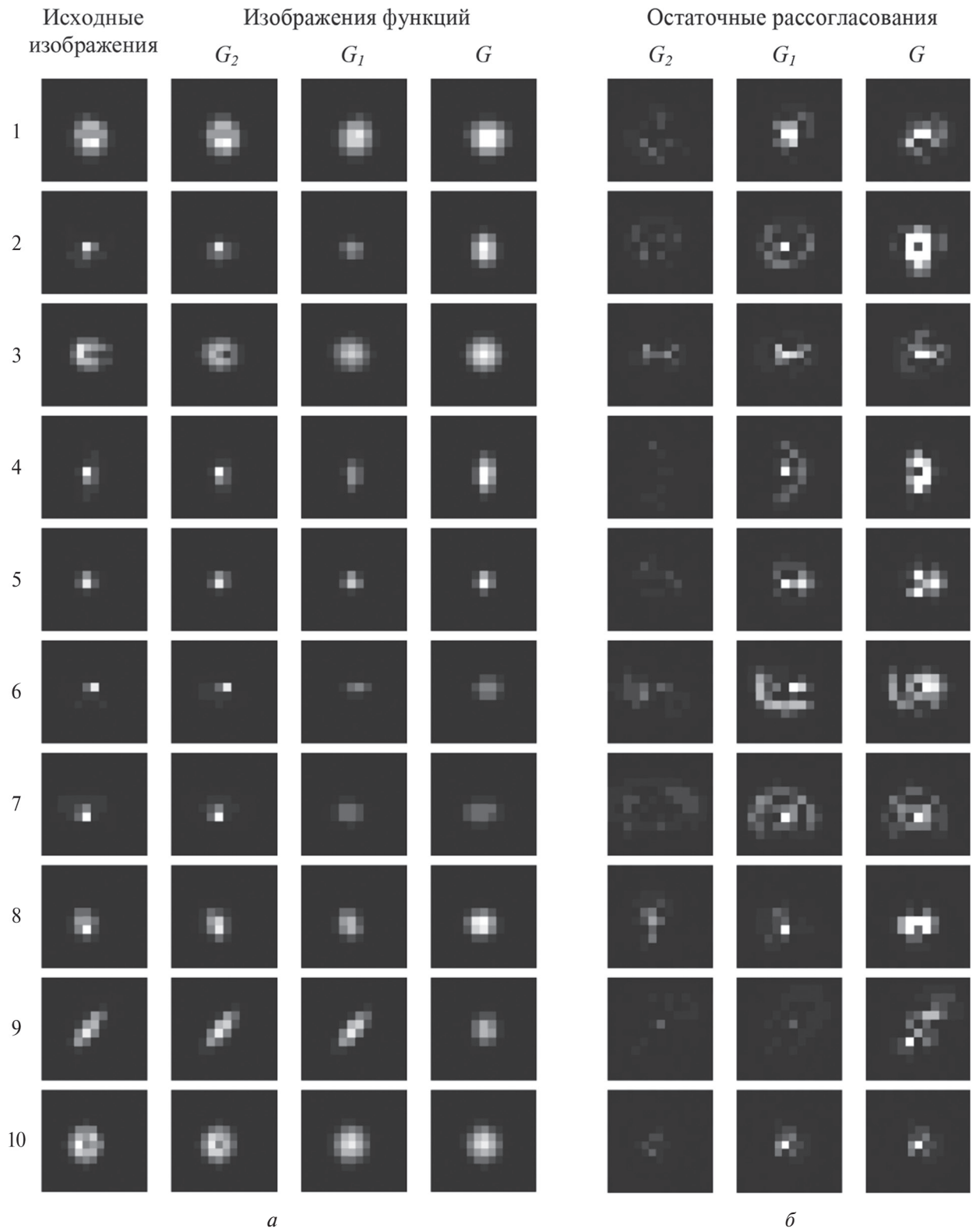


Рис. 5. Результаты аппроксимации ФРТ для примеров 1–10

Из *табл. 1–3* и *рис. 5б* видно, что функция G_2 показывает лучшее качество аппроксимации в примерах 2–4, 6, 7, соответствующих расфокусированным приборам и изображениям на краю матрицы. Показательным является пример 6, который даёт сильно отличающиеся результаты для различных функций. Однако в остальных случаях разница не столь существенна и использование функции G_2 для аппроксимации ФРТ выглядит избыточным.

Таблица 2. Примеры аппроксимации функцией G_1

№	z_0	a	x_0	y_0	$2\sigma_x^2$	$2\sigma_y^2$	θ, град	σ_x	σ_y	ρ, %
1	311	3362	6,538	5,579	4,587	4,986	11,5	1,514	1,579	98,6
2	305	2281	6,109	5,671	2,540	1,778	–5,7	1,127	0,943	96,7
3	313	3195	6,995	8,081	6,836	6,075	17,1	1,849	1,743	97,1
4	316	2512	6,211	5,671	1,324	4,124	2,1	0,814	1,436	97,3
5	312	3173	6,063	6,227	1,565	1,269	4,0	0,885	0,796	99,4
6	300	1959	6,558	6,827	3,353	0,874	–5,1	1,295	0,661	93,6
7	316	1788	5,790	5,547	4,947	2,519	0,9	1,573	1,122	94,9
8	306	2889	5,731	5,608	2,258	3,325	–14,8	1,063	1,289	98,8
9	262	688	6,249	6,403	1,144	6,832	39,2	0,756	1,848	99,8
10	330	3242	6,813	7,040	5,637	6,309	3,8	1,679	1,776	98,6

Таблица 3. Примеры аппроксимации функцией G

№	z_0	a	x_0	y_0	σ_x	σ_y	ρ, %
1	324	3999,0	6,538	5,579	1,545	1,430	98,5
2	312	2281,0	6,109	5,671	1,364	1,112	94,4
3	335	4039,0	6,995	8,081	1,731	1,645	96,9
4	321	2512,0	6,211	5,671	0,830	1,527	97,3
5	315	3871,0	6,063	6,227	0,875	0,776	99,2
6	304	1959,0	6,558	6,827	1,394	1,099	88,6
7	316	1788,0	5,790	5,547	1,874	1,191	86,2
8	313	2889,0	5,731	5,608	1,262	0,983	98,3
9	262	532,8	6,249	6,403	1,210	1,368	99,0
10	330	3229,0	6,813	7,040	1,679	1,776	98,6

Заключение

В настоящей работе были рассмотрены три аппроксимирующие ФРТ:

1) функция Гаусса,
2) функция Гаусса, учитывающая поворот,
3) двойная функция Гаусса.

Одиночная функция Гаусса даёт приемлемые результаты при обработке симметричных изображений одиночных звёзд, которые расположены в центре поля зрения. Функция, учитывающая наклон изображения, также качественно аппроксимирует изображения, искажённые комой. Данные функции приемлемы для оценки размытости изображений звёзд, имеющих σ_x и σ_y не более 1,3. При обработке расфокусированных изображений эти функции показывают недостоверные результаты, занижая параметры оценки.

Наилучший результат демонстрирует функция, состоящая из суммы двух функций Гаусса. Она даёт точную оценку ФРТ оптической системы при любых видах аберраций и показывает высокое качество аппроксимации. В 100 % рассмотренных случаях коэффициент взаимной корреляции выше 98,9 %, что говорит о высокой степени достоверности подобранных параметров. Данная аппроксимация показала лучшие результаты на краях поля зрения и при сильной дефокусировке изображения. Функция позволяет обрабатывать расфокусированные кольцеобразные изображения звёзд и показывает достоверный результат.

Недостатком двойной функции является сложный алгоритм подбора параметров аппроксимации и как следствие — длительное время обработки.

Литература

1. *Аванесов Г. А.*, *Кондратьева Т. В.*, *Никитин А. В.* Исследование смещения энергетического центра изображений звезд относительной геометрического центра на ПЗС-матрице и коррекция методической ошибки // Всероссийская научно-техн. конф. «Современные проблемы ориентации и навигации космических аппаратов»: сб. тр. Таруса, 22–25 сент. 2008. М.: ИКИ РАН, 2009. С. 421–446.
2. *Аванесов Г. А.*, *Белинская Е. В.*, *Брысин Н. Н.*, *Филиппова О. В.*, *Шамис В. А.*, *Эльяшев Я. Д.* Астрометрическая модель звездного датчика ориентации космического аппарата // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2020. Т. 17. № 1. С. 89–98. DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-1-89-98.
3. *Еремин Е. О.*, *Харламов Г. Ю.* Инструментальный фотометрический стандарт для бортовых оптико-электронных приборов космических систем мониторинга околоземного пространства // Тр. МАИ. 2019. № 104. 18 с.
4. *Suszyński R.*, *Wawryn R.* Stars' centroid determination using PSF-fitting method // Metrology and Measurement Systems. 2015. No. 22(4). P. 547–558. DOI: 10.1515/mms-2015-0047.

Determination of the point spread function of an optical system of star trackers

N. A. Stroilov, T. V. Kuptsov, E. A. Bazina, A. V. Nikitin, Ya. D. Elyashev, B. A. Yumatov

Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia
E-mail: stroilov@iki.rssi.ru

During the alignment of the optical system of the star sensor it is necessary to evaluate images of single stars or point test objects. It is convenient to carry out such processing using point scatter functions (PSF). According to the function parameters, we can estimate the degree of stellar scattering, the quality of focusing of the instrument, as well as the aberrations of its optical system. If the focusing of the optical system is satisfactory, it is preferable to approximate the Eiri disk by a two-dimensional Gaussian distribution function. The criterion for defocusing the image in this case is the dispersion parameter of the function. However, the Gaussian function gives a rough approximation for defocused images when the maximum intensity falls on concentric rings. For optical systems with significant aberrations, the Gaussian function also gives coarse results, especially for images at the edges of the field of view. This paper compares three approximating functions: 1) a two-dimensional Gaussian function, 2) a rotation-aware Gaussian function, and 3) a function that is the sum of two two-dimensional Gaussian functions. The quality of approximation using the three PSFs has been compared. Their parameters, approximation quality and variance criteria have been compared and evaluated. It is shown that the dual function shows better results for all admissible aberrations and defocusing of the optical system over the whole image field.

Keywords: point spread function, PSF, image processing, focusing, adjustment, optical system, point, test object, star, approximation, approximation function, Gaussian function

Accepted: 01.12.2022
DOI: 10.21046/2070-7401-2022-19-6-41-49

References

1. Avanesov G. A., Kondrat'eva T. V., Nikitin A. V., Investigation of the displacement of the energy center of star images relative to the geometric center on a CCD matrix and correction of a methodological error, *Vserossyiskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya "Sovremennye problemy orientatsii i navigatsii kosmicheskikh apparatov"* (Proc. All-Russia Scientific and Technological Conf. "Contemporary problems of spacecraft attitude determination and control"), Tarusa, 22–25 Sept., 2008, Moscow: IKI RAS, 2009, pp. 421–446 (in Russian).
2. Avanesov G. A., Belinskaya E. V., Brysin N. N., Filippova O. V., Shamis V. A., Elyashev Ya. D., Astrometric model of a stellar spacecraft orientation sensor, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2020, Vol. 17, No. 1, pp. 89–98 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-1-89-98.
3. Eremin E. O., Kharlamov G. Yu., Instrumental photometric standard for on-board optoelectronic devices of space systems for monitoring near-Earth space, *Trudy MAI*, 2019, No. 104, 18 p. (in Russian).
4. Suszyński R., Wawryn R., Stars' centroid determination using PSF-fitting method, *Metrology and Measurement Systems*, 2015, No. 22(4), pp. 547–558, DOI: 10.1515/mms-2015-0047.