

Масштабная статистика рельефа — порядки, диапазоны, распределение притоков, ориентация, возраст, инвариантность

А. А. Златопольский

*Институт космических исследований РАН, Москва 117997, Россия
E-mail: aazlat@gmail.com*

Представлены результаты многолетнего экспериментального исследования по цифровой модели рельефа (ЦМР) свойств флювиального рельефа. Масштаб водотоков обычно определяют значением порядка по Хортону. Предложен более гибкий способ разделения по масштабам — «диапазон», когда непосредственно задаётся интервал значений площади водосбора. Для обоих вариантов группирования водотоков найдены законы, названные законами Хортонa, которые определяют число и плотность водотоков определённого масштаба. Эти законы работают и вне связи со структурой порядков и могут быть записаны как однородные степенные с показателями степени Хортонa. Из этих законов аналитически выведены и экспериментально проверены: принцип и формулы распределения водотоков одного порядка по водотокам старших порядков; формула для коэффициента Токунага и формула площади водосбора прямого стока. Разностные базисные поверхности, построенные по водотокам, которые отобраны по диапазонам и по порядкам, сходны. Использование программы LESSA (*англ.* Lineament Extraction and Stripe Statistical Analysis) позволило найти по ЦМР оси долин и провести их статистический анализ. Масштабным фактором для долин служит их ширина. Для ширины долин установлено соответствие с площадью водосбора в виде закона Хортонa. Ориентационные характеристики и плотность у долин и водотоков того же масштаба очень близки. Но с помощью анализа водотоков можно получить результаты, которые гораздо детальнее по масштабу. Это позволило уточнить масштаб, при котором происходит скачкообразное изменение ориентации элементов рельефа. Для поиска формального соответствия масштаба водотоков и их возраста сопоставлены шкалы датировок порядков, найденные исследователями трёх территорий. Для одной из территорий соотношение масштаба и возраста представлено в виде закона Хортонa. Масштабная инвариантность свойств рельефа проявилась в степенном характере законов, в константности суммарных площадей (водосбора и долин) и в постоянстве ряда характеристик при измерении их в пикселях.

Ключевые слова: ЦМР, аппроксимация, плотность водотоков, площадь водосбора, законы Хортонa, показатели степени Хортонa, масштабная инвариантность, возраст долин, ориентация долин

Одобрена к печати: 15.03.2024

DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-2-103-121

Введение

В статье изложены основные результаты многолетнего мультимасштабного исследования рельефа. Это не финальные результаты, а фиксация того, что уже найдено. Нас интересуют не особенности территорий, а общие свойства рельефа. Возможно, прикладные поисковые признаки могут образоваться из отличия свойств территории от этих общих свойств. Не будем повторять таблицы, иллюстрации и детали прошлых публикаций, которые находятся в свободном доступе, коротко перескажем необходимое, а основное внимание уделим новым результатам.

Исследуем рельеф флювиального типа и в первую очередь приведём результаты анализа характеристик водотоков. Принцип разделения водотоков на группы одного масштаба по их порядку (Хортон, 1948) — очень удачная идея, которая позволила без компьютерных технологий изучать статистику гидросетей и найти отношения, описывающие, как средние характеристики водотоков изменяются от порядка к порядку. Однако законы, позволяющие оценить абсолютные значения характеристик, не были сформулированы, в частности потому, что сохранялся произвол в выборе первого порядка. По правилу Хортонa — Стралера первый

порядок присваивается истокам, а водоток порядка $k+1$ образуется при слиянии водотоков порядков k . Но произволен выбор масштаба карт, по «синим линиям» которых определяются истоки, а случается, линии тальвегов дорисовывают, ориентируясь на рисунок горизонталей.

При компьютерном анализе сети тальвегов, построенных по цифровым моделям рельефа (ЦМР), к водотокам первого порядка относятся водотоки, чья площадь водосбора начинается с некоторого порогового значения (A_T), и произвол выражается в выборе этого порога. Обычно он задаётся из практических соображений, но интуитивно казалось, что существует настоящий, природный, истинный первый порядок и соответствующий ему порог. Наше исследование начиналось с поисков такого порога, но по мере получения экспериментального статистического материала становилось понятно, что истинного первого порядка нет, что система порядков — это удобный измерительный инструмент, линейка, ноль которой можно приложить в любом месте измеряемого объекта. Выяснилось, что найденные с помощью порядков закономерности связаны с характеристиками водотоков одного масштаба (Златопольский, 2023а), а система порядков неплохо разделяет водотоки на группы одного масштаба.

Здесь мы обобщим экспериментальные результаты, которые привели нас к такому выводу, уточним полученные ранее закономерности и представим новые данные. Начнём с описания тех закономерностей, которые удалось найти для водотоков, разделённых на порядки по правилу Хортон — Стралера, а затем рассмотрим и другие, более гибкие возможности подобного деления.

Важно учитывать, что закономерности, приведённые в настоящей статье, имеют статистический характер и относятся к измерениям на больших территориях для начальных порядков с большим числом водотоков и при не слишком грубом разрешении ЦМР. Возможно, наши утверждения верны только для территорий с рельефом флювиального типа, на котором ГИС-технологии (ГИС — геоинформационные системы) уверенно строят водотоки, благодаря чему мы можем эти утверждения проверить.

Исходные данные

Изучали водотоки, построенные по ЦМР известным алгоритмом ГИС-моделирования стока (восемь направлений), изложенным, например, в работе (Гарцман и др., 2015). Исследованы большие территории (около 500 000 км²), на которых ГИС-моделирование работает адекватно (рельеф сформирован флювиальными процессами). Если работать с существенно меньшей территорией, то средние значения характеристик будут зависеть от локальных особенностей, а кроме того, не будет обеспечена выборка данных, достаточная для статистического анализа.

Таблица 1. Территории, ЦМР которых использовались для экспериментальных расчётов

Территория	Широта	Долгота	Размер, км	Размер, пиксель	Разрешение, км/пиксель	Площадь суши, км ²
«Амур»	47,15–53,5° с. ш.	130,66–140,11° в. д.	717,5×719,4	11033×11004	0,0651	502 663
«Шилка»	49,3–54,96° с. ш.	112,22–121,65° в. д.	685,5×640	10546×9846	0,065	433 539
«Кама»	52–58° с. ш.	48–57° в. д.	617,7×683,4	9488×10498	0,0651	412 885
«Пара»	3–10° ю. ш.	48–54° з. д.	667,08×775,29	10245×11907	0,0651	510 418
«Нигер 65»	7–12,9° с. ш.	7,5–133° з. д.	641,0×656,3	9847×10081	0,0651	408 092
«Нигер 100»	7–15° с. ш.	7–16° з. д.	1001,9×902,2	10019×9022	0,1	770 165
«Русская платформа»	49,5–59,5° с. ш.	34–55° в. д.	1519,18×1164,28	11686×8956	0,13	1 753 437

По этой же причине не анализировали водотоки больших масштабов. Такие большие территории включают фрагменты нескольких бассейнов, так что какие-то водотоки «вытекают» за край территории, а какие-то «втекают» из-за края, что важно учитывать при анализе малочисленных крупных водотоков.

Используем достаточно надёжную и доступную для многих территорий модель рельефа SRTM (*англ.* Shuttle radar topographic mission) в проекции Меркатора UTM (*англ.* Universal Transverse Mercator). Основной для нас была территория «Амур», а по остальным проверяли устойчивость полученных результатов. Условные названия территорий даны для краткости: «Амур» — от горной системы Сихотэ-Алинь до р. Буреи; «Шилка» — от р. Аргуни до р. Витима; «Кама» — Татарстан и вокруг; «Пара» — юго-восток бассейна Амазонки; «Нигер» — Гвинея и Сьерра-Лионе, два схожих варианта с ЦМР разного разрешения (*табл. 1*).

Статистика порядков

Используем следующие обозначения статистических характеристик для водотоков порядка k : S — площадь территории анализа (суша), км²; G_k — суммарная длина водотоков, км; Q_k — число водотоков; B_k — сумма площадей водосбора в устьях всех водотоков, км²; $U_k = B_k/S$ — суммарная площадь водосбора всех водотоков порядка как часть всей территории; $D_k = G_k/S$ — плотность водотоков, км/км²; $N_k = Q_k/S$ — среднее число водотоков на 1 км²; $Am_k = B_k/Q_k = U_k/N_k$ — средняя площадь водосбора в устье водотоков, км²; $L_k = G_k/Q_k = D_k/N_k$ — средняя длина водотоков, км. Показатели удельного числа водотоков и плотности используем для сопоставимости результатов по территориям разного размера. Подчеркнём, что все приведённые в статье эмпирические соотношения этих характеристик справедливы для значений в указанных единицах измерения.

Широко известные отношения Хортон (Pelletier, 1999) отражают тот эмпирический факт, что изменение этих характеристик водотоков от порядка к порядку происходит с постоянным мультипликативным шагом — коэффициентом Хортон. Значение этого шага для каждой характеристики своё, но одинаково для различных территорий: $R_A = Am_{k+1}/Am_k$ — около 4,6; $R_N = N_{k+1}/N_k$ — около $1/4,45 = 0,225$; $R_D = D_{k+1}/D_k$ — около 0,5; соответственно, $R_L = L_{k+1}/L_k = R_D/R_N$ — около 2,2.

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. Средние характеристики водотоков связаны между собой: если одна из них, скажем площадь водосбора, изменилась от порядка к порядку во столько-то раз, то совершенно определённым образом изменяются и другие характеристики. В цитированной работе (Pelletier, 1999) именно площадь водосбора предлагается основой для определения изменения всех остальных характеристик: N_k пропорционально $Am_k^{-0,97}$ (указан интервал значений степени $-0,95...-0,99$), L_k пропорциональна $Am_k^{0,516}$ (указано $0,5-0,55$), откуда D_k пропорционально $Am_k^{-0,414}$. Предлагаются и другие соотношения, которые стоит иметь в виду для дальнейших исследований, например продольный уклон пропорционален $Am_k^{-0,37}$. Эти показатели степени могут быть получены непосредственно из коэффициентов Хортон. Например, когда Am_k изменяется в R_A раз, D_k изменяется в R_D раз, а чтобы это согласовать, нужен показатель степени $\log_{R_A}(R_D) = -0,454$; $4,6^{-0,454} = 0,5$. Таким образом, R_A и набор этих показателей степени эквивалентны набору коэффициентов Хортон. Будем называть этот набор показателями степени Хортон или сокращённо *HE* (*англ.* Horton Exponents) с соответствующими индексами, например HE_D . Далее мы предоставим аргументы, почему, на наш взгляд, *HE* «более первичные», более фундаментальные показатели, чем коэффициенты Хортон.

В цитированной публикации приведены экспериментально полученные интервалы значений *HE*. В начале исследований мы ориентировались на данные выше значения коэффициентов и на средние значения этих интервалов. Значения, найденные в наших экспериментах, попадают в эти интервалы и соответствуют более поздним публикациям (Wang et al., 2022), но

немного отличаются от указанных выше. Результаты, полученные в начале нашего исследования, даны здесь такими, как были посчитаны и опубликованы. С найденными теперь коэффициентами Хортона можно ожидать улучшения этих результатов, но не принципиального. Характеристику L_k , как правило, не рассматриваем, так как в наших расчётах она не измеряется, а получается опосредованно как D_k/N_k .

Чтобы наглядно представлять ситуацию, рассмотрим, как выглядят на территории «Амур» гистограммы числа водотоков, разбитых на порядки (использовали $A_T = 0,85 \text{ км}^2$, порог в пикселях 200). Порядков, в которых водотоков достаточно для статистического анализа, немного из-за степенного падения числа водотоков. Даже для расчёта средних значений на такой территории с неплохим разрешением можно исследовать порядки с 1-го по 6-й, причём в 6-м порядке объектов уже мало (около 100). А для более детального статистического анализа (гистограмма) их мало и в 5-м порядке. Это объективная ситуация, которую необходимо учитывать. В сторону меньших водотоков (если ресурсы компьютера позволят это для территории такого размера) можно сдвинуть начало анализа на 1 порядок, $A_T = 0,185 \text{ км}^2$, так как ещё через шаг $A_T < 0,05 \text{ км}^2$.

Для последовательности небольших степенных интервалов — от A до $1,165A$ — подсчитано число водотоков каждого порядка с площадью водосбора в этом интервале ($1,165$ — это корень 10-й степени из R_A , что при логарифмической шкале даёт 10 отсчётов между центрами порядков). Сопоставить кривые для водотоков нескольких порядков на одном графике сложно (рис. 1а), так как число водотоков очень различно: для первых пяти порядков их соответственно 152 160, 33 032, 7509, 1720, 368. Так что амплитуды графиков (среднее по трём соседним отсчётам в максимуме) различаются существенно: 19 783, 2990, 702, 166, 33. Диапазоны возможных значений площади водосбора также различаются в разы: средние для порядка значения площади водосбора, Am_k , идут с мультипликативным шагом примерно 4,42 и составляют соответственно 2,0; 9,265; 41,24; 173,2; 813,8 км^2 .

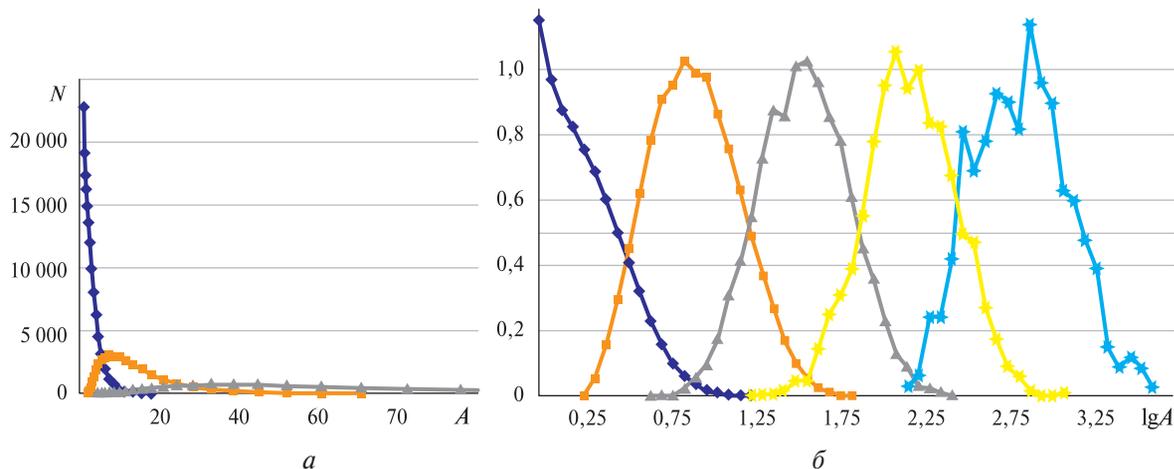


Рис. 1. Гистограммы числа водотоков одного порядка в зависимости от их площади водосбора, A (гистограммы расположены по номеру их порядка слева направо): a — гистограммы первых трёх порядков от A , км^2 ; b — нормированные гистограммы первых пяти порядков от $\lg A$

Поэтому строим графики гистограмм, нормированных на их амплитудное значение, и в логарифмическом масштабе для A (рис. 1б). Гистограмма водотоков 1-го порядка, которые образованы не слиянием истоков, а по пороговому уровню площади водосбора, имеет форму, близкую к экспоненте, и резко отличается от остальных. Это не связано с конкретным масштабом водотоков, так как при увеличении A_T в 32 раза ($27,2 \text{ км}^2$) форма гистограммы 1-го порядка остаётся той же. Для гистограммы 5-го порядка водотоков уже мало, что сказывается на её форме. А вот остальные кривые настолько схожи, что мы их опишем единым образом.

Гистограммы почти симметричны, кривая быстро спадает от центра к значениям 0,5. Основной участок гистограммы — тот, что между спадами к 0,5, — включает около 80 % всех водотоков порядка. Значения площади водосбора по краям этого участка различаются в среднем в 4,9 раза. Центр основного участка, геометрическое среднее его границ, близок к значению медианы. Медиана меньше среднего значения, Am_k , в 1,18 раз, центр — в 1,15 раз, а начало основного участка — в 2,54 раза. Основные участки последовательных порядков почти не перекрываются (соседние кривые пересекаются примерно на уровне 0,5). Гистограмма одного порядка в целом занимает интервал почти в 10 раз больше, чем основной участок, в обе стороны перекрывает основные участки гистограмм соседних порядков и даже часть интервала следующих порядков. Отметим, что и гистограммы суммарной длины водотоков очень похожи на гистограммы их числа. А значит, эта форма гистограмм представительна, не случайна.

Порядки. Законы Хортона

Первый принципиально важный экспериментальный результат данного исследования состоял в том, что средние характеристики водотоков одного порядка на разных территориях очень близки между собой, если использован одинаковый порог A_T . В силу жёсткой взаимозависимости этих характеристик для определения их сходства на разных территориях достаточно было тщательно исследовать поведение одной из них. Аккуратнее всего по растровым данным считается плотность, D_k , поэтому в первую очередь исследовали эту характеристику, контролируя и Am_k , N_k (Златопольский, Шекман, 2022). Сравнивали плотность водотоков на первых пяти из перечисленных выше территорий при $A_T = 0,85 \text{ км}^2$. Разброс значений для первых шести порядков составил всего 4,28; 2,8; 1,51; 4,61; 8,57; 10,58 %. (Разбросом называем отношение среднеквадратичного отклонения к среднему по выборке, в процентах.) Как мы покажем ниже, у этих территорий значения характеристик Am_k и N_k также близкие.

Обнаруженное сходство средних характеристик водотоков разных территорий позволило от отношений Хортона перейти к уравнениям, оценивающим средние значения характеристик водотоков заданного масштабного уровня. Масштабный уровень водотоков определяется номером порядка, k , и начальным масштабом (порогом A_T). Поскольку размер степенного шага (коэффициент Хортона) известен, понадобилось найти только множители, соответствующие характеристикам первого порядка:

$$Am_k = (0,5A_T R_A) R_A^{k-1}, \quad N_k = (0,26/A_T^{0,97}) R_N^{k-1}, \quad D_k = (0,361/A_T^{0,45}) R_D^{k-1}.$$

Эти соотношения мы назвали законами Хортона (Златопольский, Шекман, 2022). Они действуют для разных территорий, для разного разрешения ЦМР и для разных порогов. Отличие значения D_k , среднего по первым пяти территориям, от рассчитанного по предложенной формуле составляет для шести порядков: $-3,55$; $-1,34$; $-0,57$; $6,93$; $8,73$; $-3,455$ %. По территории «Русская платформа» ($A_T = 3,38 \text{ км}^2$) отличие измеренной средней плотности от расчётной также меньше 10 %.

Приведём новые экспериментальные результаты, полученные при ином подходе. Не опираемся на известные из литературы коэффициенты Хортона, а с помощью аппроксимации получаем эти соотношения, включая коэффициенты, из статистических измерений характеристик водотоков для первых пяти порядков. Сопоставим результаты аппроксимации, полученные по четырём территориям: «Амур», $A_T = 0,85 \text{ км}^2$; «Пара», $A_T = 0,85 \text{ км}^2$; «Нигер 100», $A_T = 1 \text{ км}^2$; «Русская платформа», $A_T = 1,7 \text{ км}^2$. (На эксперименты по этим территориям мы будем ссылаться и в трёх следующих разделах.) Формулы получаются одинаковые, и разброс их численных параметров меньше 4 %. Средние значения коэффициентов Хортона мало (меньше 4,2 %) отличаются от тех, что были взяты нами из работы (Pelletier, 1999): $R_A = 4,433$ (было 4,6), $R_N = 0,225$ (так и было), $R_D = 0,486$ (было 0,5). Соответственно, $HE_N = -1,003$ (было $-0,97$) и $HE_D = -0,485$ (было $-0,454$); эти значения лежат в интервалах, данных в указанном источнике. Получаем:

$$Am_k = (0,522A_T R_A) R_A^{k-1}, \quad N_k = (0,27/A_T^{1,003}) R_N^{k-1}, \quad D_k = (0,3707/A_T^{0,485}) R_D^{k-1}. \quad (1)$$

Скажем несколько слов о точности представляемых результатов, формул, которые в основном получены аппроксимацией экспериментальных данных. Процедура аппроксимации даёт три-четыре знака в значениях параметров и оценку сходимости аппроксимирующей кривой с экспериментальной: квадрат коэффициента их корреляции, r^2 , в основном у нас $> 0,99$ (Златопольский, 2023а, б; Златопольский, Шекман, 2023). Для каждого параметра формулы, рассчитанной по нескольким территориям, определяем среднее значение и указываем разброс. Как правило, разброс существенно меньше 10 %, но и в этом случае уже второй знак среднего значения может быть неточным, и логично округлить средние параметры формул, т.е. вместо $A^{0,485}$, $L^{-1,92}$, $D^{0,97}$ писать $A^{0,5}$, L^{-2} , D . Такая запись легче читается, а главное, возможно, именно таковы точные значения, которые когда-то будут установлены. Это предположение мы обсудим в конце, но в тексте сохраним значения без округления, чтобы у читателя не сложилось ложного представления, что «круглые» значения уже обоснованы.

Другой вариант представления законов Хортонa необходим для сопоставления характеристик водотоков, найденных различными методами, и в первую очередь расчётов с разным порогом, A_T , от которого зависит реальный масштаб водотоков порядка k . Разные результаты можно соотнести с помощью единой шкалы «приведённого» порядка, v , при базовом значении $A_T = 0,85 \text{ км}^2$ (Златопольский, 2022). Принципиально не конкретное значение A_T , а то, что оно едино. Значение приведённого порядка может оказаться и нецелым, и отрицательным, $v = k + \log_R (A_T/0,85)$ или $v = k + 0,109 + 1,546 \lg A_T$. Из формул (1) получим:

$$Am_v = 1,967 R_A^{v-1}, \quad N_v = 0,317 R_N^{v-1}, \quad D_v = 0,399 R_D^{v-1}.$$

С помощью этих соотношений можно найти приведённый порядок для результатов, у которых утеряны параметры расчёта порядка, если известна одна из средних характеристик водотоков порядка (если известна плотность, D , то $v = 1 + (\lg D + 0,399)/\lg R_D$).

Для сопоставления результатов исследований по порядкам, определённым вручную по «синим линиям» карты, можно приблизительно найти их приведённые порядки (Златопольский, Шекман, 2022). Порядок k , полученный с карты масштаба $1:m$, соответствует приведённому $v = k + 0,229 + 3,09 \lg (m/10^5)$. Так, 1-й порядок с карты масштаба $1:100\,000$ соответствует приведённому 1,229, а 1-й порядок с карты $1:500\,000$ соответствует приведённому 3,39. К данному соотношению относимся как к первому приближению, которое должно уточняться (в первую очередь — численное слагаемое формулы).

В следующем варианте формул, который в основном и будем использовать дальше, масштаб водотоков задаётся их площадью водосбора (как упоминали выше):

$$N_k = 0,623 Am_k^{-1,003}, \quad D_k = 0,547 Am_k^{-0,485}. \quad (2)$$

В этих формулах не присутствуют коэффициенты Хортонa, только HE , и не участвует значение номера порядка. Индекс k лишь показывает, что средние значения характеристик считаются по водотокам одного масштабного уровня, одного порядка.

Хорошее совпадение расчётов по всем этим формулам с экспериментальными данными мы получаем, если выполняются два условия, обеспечивающие достоверность экспериментальных измерений. На исследуемой территории должно быть достаточно водотоков выбранного масштаба, как правило около сотни. Также должно быть достаточно высоким разрешение ЦМР (порог A_T в пикселях больше 50).

Ни в найденных закономерностях, ни в экспериментах с разными порогами не было никаких «указаний» на то, что какой-то порог особенный, истинный. Напротив, зависимости (2) относятся к однородным степенным функциям (*англ.* homogeneous power function, $f(x) = cx^a$, где c и a — константы), которые не имеют «естественных», специальных масштабов.

Порядки. Следствия из законов Хортона

Уже из соотношений Хортона можно заключить, что поскольку N_k обратно пропорционально Am_k , то суммарная площадь водосбора всех потоков одного порядка, $U = N_k Am_k$, у каждого порядка одна и та же, а из закона Хортона получаем, что U составляет 0,623 от всей территории. Равенство выполняется статистически, т. е. для порядков с достаточным числом водотоков. Измерения по четырём территориям показали, что разброс значений U между порядками одной территории составляет 2–6 %, а среднее значение по всем территориям 0,62 (с разбросом между территориями 1 %) совпадает с тем, что даёт закон Хортона (Златопольский, 2023в).

Этот факт позволяет найти закономерность впадения водотоков порядка k в водотоки более высоких порядков. Обозначим через $N_{k,j}$ среднее число водотоков порядка k , впадающих в водотоки порядка j , через $U_{k,j}$ — часть площади водосбора водотоков порядка k , которая прямо передаётся водотокам порядка j , и через $p = j - k$ — разницу порядков. Часть водотоков порядка k , сливаясь, образуют водотоки порядка $k+1$, а остальные впадают в водотоки порядка $k+1$ и выше, назовём их «впадающие».

Гипотеза. Водотоки впадают в более крупные водотоки равномерно по их длине.

Если принять эту гипотезу, то получится, что «впадающие» водотоки распределяются между водотоками более высокого порядка пропорционально суммарной длине водотоков этих порядков. (Если V водотоков одного масштаба впадает в более крупные водотоки, суммарная длина которых $Gall$, то в среднем будет по одному впадению на каждые $Gall/V$ км.) Это даёт соотношения, описывающие статистику распределения водотоков одного порядка между водотоками старших порядков. Представленные в работе (Златопольский, 2023в) формулы здесь даны с уточнёнными нами коэффициентами Хортона и компактнее, через две константы: $C_1 = 1 - R_D(1 - 2R_N) = 0,7327$ и $C_2 = (1 - 2R_N) \cdot (1 - R_D) = 0,2827$.

$$N_{k,k+1} = N_k C_1, \text{ а при } p > 1 \ N_{k,k+p} = N_k C_2 R_D^{p-1}.$$

В этих соотношениях нет зависимости от конкретных номеров порядков, а только от их разницы, p . Специальный вид у соотношения для водотоков порядка $k+1$, т. е. $p = 1$, связан с тем, что для них кроме «впадающих» водотоков порядка k есть ещё и «образующие» водотоки порядка k . Для впадающих притоков вторая формула едина для всех p .

В той же работе приведены четыре следствия из этих соотношений, подтверждённые результатами статистических измерений.

1. Коэффициент Токунага, который определяется как соотношение притоков $T(p) = N_{k,k+p} / N_{k+p}$, можно получить из наших соотношений как

$$T(p) = (C_2 / R_N) \cdot (R_D / R_N)^{p-1} = 1,254 \times 2,154^{p-1}.$$

В исследовании (Wang et al., 2022) сообщается, что должно выполняться соотношение $T(p) = ac^{(p-1)}$, при этом указаны коэффициенты a и c , рассчитанные для бассейна Амазонки: $a = 1,26$, $c = 2,23$ — и для бассейна Жёлтой реки: $a = 1,34$, $c = 2,25$, которые очень близки к тем, что мы получили аналитически.

2. Распределение площади водосбора водотоков порядка k по водосборам последующих порядков:

$$U_{k,k+1} = U_k C_1, \text{ а при } p > 1 \ U_{k,k+p} = U_k C_2 R_D^{p-1}.$$

Таким образом, почти три четверти площади водосбора каждого порядка «переходит» к водотокам на 1 большего порядка, к следующему — 0,14, к ещё следующему — 0,07 и так далее.

3. Формирование площади водосбора водотоков порядка k из водосборов предыдущих порядков:

$$U_{k-1,k} = U_k C_1 \text{ при } k > 1, \text{ а при } k > q > 1 \ U_{k-q,k} = U_k C_2 R_D^{q-1}.$$

То есть 0,72 от своей площади водосбора водотоки порядка k получают от водотоков порядка $k-1$; 0,14 — от водотоков порядка $k-2$; 0,07 — от водотоков порядка $k-3$ и т. д.

4. Площадь водосбора прямого стока в водотоки порядка k , обозначим её U_k^{dir} :

$$U_1^{dir} = U, \text{ а при } k > 1 \ U_k^{dir} = U(1 - C_1)R_D^{k-1} = U(0,267 \times 0,486^{k-1}) = 0,166 \times 0,486^{k-1}.$$

Далее покажем, что закономерности, полученные выше, не связаны с порядковой организацией водотоков, а диктуются их масштабом, так как аналогичные экспериментальные результаты можно получить, разделив сеть водотоков на участки одного масштаба не с помощью системы порядков, а непосредственно по их площади водосбора: попадает ли она в заданный интервал значений.

Диапазоны

Система порядков делит водотоки довольно приблизительно и только на группы с фиксированным масштабным шагом. Кроме того, она непрозрачна, т. е. не всегда известны детали получения значения порядка. Измерение масштаба водотока площадью водосбора — способ гораздо более точный и определённый. Чтобы получить группу водотоков одного масштаба, достаточно задать нужный интервал значений площади водосбора. Именно такой подход мы рассмотрим в этом разделе.

Пусть задан интервал значений площади водосбора от As до Af . Диапазоном будем называть группу всех участков водотоков, в которых площадь водосбора во всех точках находится в заданном интервале. Ориентируясь на степенной характер зависимостей Хортона, размером интервала называем $F = Af/As$, его центром — $Ac = As\sqrt{F}$, а если необходима последовательность интервалов этого размера, то границами k -го интервала будут AsF^{k-1} и AsF^k .

На территории «Амур» мы непосредственно, попиксельно, сопоставили водотоки порядков и соответствующих диапазонов (Златопольский, Шекман, 2022). Использовали последовательность диапазонов размером $F = 4,6$, их центры соответствовали серединам порядков, Am_k . Внешне участки водотоков по диапазону могут отличаться от порядковых тем, что оканчиваются не в месте впадения в больший водоток, и тем, что у участка может быть два начала в водотоках до их слияния, а конец — где-то ниже слияния. При этом водотоки первых шести порядков на 70–85 % состоят из тех же пикселей, что и водотоки соответствующих диапазонов. Средние характеристики водотоков для порядков и диапазонов близки: плотность в них различалась на 4,5; 0,1; 0,3; 1,2; 10,8; 0,87 %, а число водотоков на 1–17 %.

Важнее сравнить не значения отдельных характеристик, а связывающие их закономерности для порядков и для диапазонов. Зависимости для диапазонов мы нашли, аппроксимируя результаты измерений по той же технологии и по тем же четырём территориям, что и при получении формул (2) для порядков. Если взять средние параметры аппроксимирующих формул при $F = 4,6$, то получим: $N_k = 0,614Am_k^{-0,99}$ и $D_k = 0,582Am_k^{-0,478}$. Разброс множителей этих зависимостей для четырёх территорий составлял всего 2,5 и 5 % соответственно, а разброс показателей степени — 1,5 и 0,5 %. Эти соотношения практически не отличаются от соотношений (2) для порядков: множитель в формуле для D_k отличается на 6 %, а остальные параметры — не больше чем на 2 %. Таким образом, разделяя водотоки не на порядки, а на диапазоны, мы получаем при $F = R_A$ статистически очень сходное разделение по масштабам. Однако для диапазонов мы можем задать и иной, нужный для конкретного исследования интервал значений (ниже есть пример).

Для сопоставления с порядками мы измеряли среднее значение площади водосбора по диапазону Am_k , но для диапазонов удобнее опираться на центральное значение, Ac_k , которое задаётся непосредственно. Аппроксимирующие формулы для Ac_k получены по той же технологии и по тем же территориям (для $F = 4,6$): $N_k = 0,508Ac_k^{-0,991}$ и $D_k = 0,531Ac_k^{-0,476}$. Параметры в формулах — средние для территорий. Разброс значений множителей этих формул составляет 2 и 4,6 %, а разброс показателей степени — 0,8 и 1,5 %.

Эксперименты показали, что законы Хортона работают и в диапазонах, которые меньше, чем порядковые, в десятки раз (Златопольский, 2023а). Для этого законы модифицированы

так, чтобы учитывался размер диапазона. Для «Амура» рассмотрели шесть последовательностей диапазонов, каждая со своим размером, F : 4,6; 2,14; 1,36; 1,17; 1,063; 1,031. Из аппроксимации результатов измерений получили соотношения:

$$D = 0,778(\lg F)Ac^{-0,462}, \quad N = 0,609(\lg F)^{0,385} Ac^{-0,993}.$$

Как и у порядков, суммарная площадь водосбора у диапазонов константна (Златопольский, 2023в), причём при $F = R_A$ эта площадь очень близка к суммарной площади водосбора соответствующего порядка. Фактически, как показала проверка по «Амуру», эти области перекрываются почти на 90 %. По четырём территориям для шести диапазонов с $F = 4,6$ среднее значение U равно 0,643. Разброс значений U_k по диапазонам территории меньше 5,5 %, а разброс средних значений U по этим территориям — 1,47 %.

На территории «Амур» рассмотрели четыре последовательности диапазонов с разным F и получили аппроксимацию $U = 0,758(\lg F)^{0,437}$.

Характеристики Am_k и Ac_k также оказались связаны: $Am_k / Ac_k = 0,324(\lg F) + 1,018$. А значит, из константности $U = NAm$ следует и константность NAc . При $F = R_A$ $Am_k / Ac_k = 1,23$, что только на 7 % отличается от аналогичного отношения, найденного выше при анализе гистограмм порядков. Так что у диапазона, соответствующего порядку k , интервал от $As = 0,386Am_k$ до $Af = 1,712Am_k$ и $Ac = 0,813Am_k$.

Распределение суммарной площади водосбора по диапазонам большего масштаба происходит примерно по тем же соотношениям, что и у порядков, и также в зависимости от разницы масштабов (Златопольский, 2023в).

Коэффициенты и показатели степени Хортона

Подытожим приведённые результаты. Те найденные закономерности, которые основаны на метрических характеристиках масштаба (здесь использована площадь водосбора, но возможны длина, ширина), — однородные степенные. Почти одинаковые значения показателей степени для них, HE , мы получили как из аппроксимации по четырём территориям с $F = 4,6$: $HE_D = -0,476$, $HE_N = -0,991$, так и по диапазонам разного размера на территории «Амур»: $HE_D = -0,462$, $HE_N = -0,993$.

Для HE_D удалось осуществить и другие измерения (Златопольский, 2023б), которые ближе к свойствам рельефа, так как не использовался даже поиск водотоков. Анализировали растр стока (площадь водосбора для каждого пикселя), который строится непосредственно по ЦМР. Точнее, исследовали гистограмму этого растра, отражающую как область водотоков, так и участки начального стока. Интегрирование этой гистограммы даёт функцию плотности, $D(A)$, и функцию обеспеченности, $Dall(A)$, обратную к функции распределения. Аппроксимируя ту часть функции $Dall(A)$, которая отражает область водотоков, получили средний результат для четырёх территорий $Dall = 0,732A^{-0,485}$. Различие параметров этой зависимости для территорий невелико: отношение разницы максимального и минимального значений к среднему составляет для множителя 10 %, а для показателя степени — только 4 %. $HE_D = -0,485$, что близко к указанным чуть выше значениям (найденным иными путями), на него мы и будем опираться. Если $Dall$ рассчитать из модифицированных уравнений Хортона, то получим очень похожий результат $Dall = 0,756As^{-0,476}$.

Отметим для дальнейшего обсуждения, что для четырёх территорий упомянутые гистограммы растра стока (в пикселях и нормированные) мало различаются между собой, несмотря на то что они рассчитаны при существенно разном разрешении ЦМР (площадь пикселя на местности отличается в четыре раза).

Если масштаб задан номером порядка, то законы для характеристик водотоков показательные, с коэффициентами Хортона в основании. Причём, если известно значение R_A , то остальные коэффициенты рассчитываются из него по HE . R_A — это фиксированный размер масштабного шага, присущий системе порядков, тогда как при использовании диапазонов

можно прямо задать необходимые шаг и размер интервала. Экспериментально получено значение $R_A = 4,433$, близкое к указанным в публикациях. Исходя из $HE_D = -0,485$, $HE_N = -1$, получаем $HE_L = HE_D - HE_N = 0,515$ и $R_N = 4,433^{-1} = 0,2246$ (в работе (Wang et al., 2022) по литературным данным указано значение, обратное к R_N , коэффициент бифуркации, 4,4); $R_D = 4,433^{-0,485} = 0,4858$; $R_L = 4,433^{0,515} = 2,153$; продольный уклон $R_{Slope} = 4,433^{-0,37} = 0,5764$.

Можно не опасаться, что полученные значения R и HE завязаны на дискретную структуру ЦМР, так как сходные значения R были получены и ранее при работе с картой.

Ориентационные характеристики

Рассмотрим другой способ мультимасштабного анализа ЦМР и сравним его результаты с анализом водотоков, полученных в ГИС. С помощью программы линеamentного анализа LESSA (англ. Lineament Extraction and Stripe Statistical Analysis) (Златопольский, 2020) ищем не водотоки, а оси долин (линейные отрицательные формы рельефа). Локальной шириной долины (или просто шириной долины) будем здесь называть расстояние между осями водоразделов, ограничивающих долину. LESSA выявляет долины с шириной 6–8 пикселей и более. Если в LESSA перейти на другой масштабный уровень анализа, сжав ЦМР, то линии самых узких долин исчезнут. Последовательность таких результатов разного масштабного уровня аналогична анализу схемы гидросети, в которой шаг за шагом удаляются долины самого младшего порядка. Линии долин не составляют связную сеть, их сопоставление с водотоками можно найти на рисунке в работе (Златопольский и др., 2021).

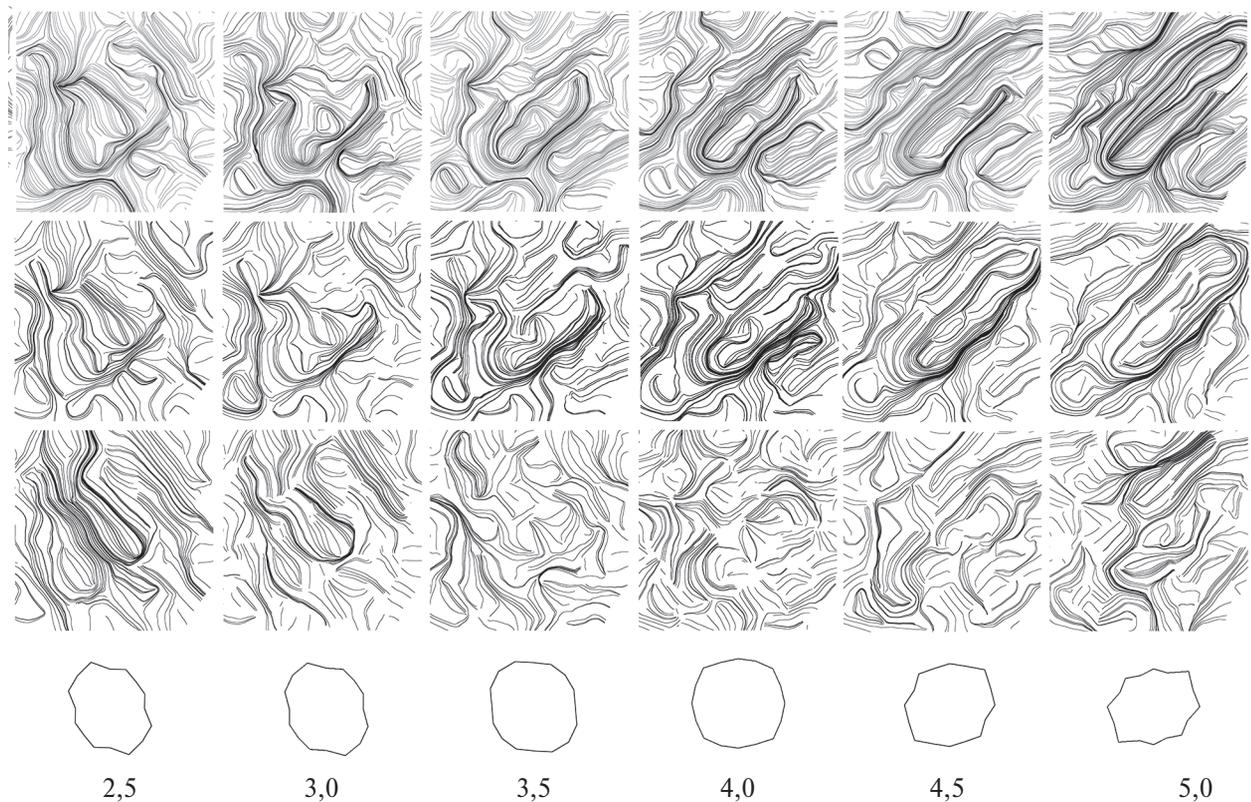


Рис. 2. Ориентационные характеристики: в 1-м ряду — ЛВ по долинам; во 2-м ряду — ЛВ по всем водотокам с водосбором от As ; в 3-м и 4-м рядах — ЛВ и розы-диаграммы по водотокам с водосбором от AsR_A ; в 5-м ряду — номер соответствующего приведённого порядка

В LESSA как по растрам долин, так и по растрам водотоков можно рассчитать их локальную плотность, общую и локальные розы-диаграммы, среднее направление вытянутости

роз-диаграмм (в диапазоне 180°) и многие другие характеристики. Векторы локального направления вытянутости роз-диаграмм объединяются в «линии вытянутости» (ЛВ), которые наглядно отражают распределение преимущественных направлений по территории (рис. 2, см. с. 112). По рисунку ЛВ сопоставим результаты мультимасштабного анализа долин и водотоков. В LESSA на каждом масштабном шаге выявляются оси долин шириной W (в км) и больше, поэтому сравнивать ЛВ долин определённого масштабного шага нужно с ЛВ водотоков всех масштабов, начиная с некоторого минимального, т. е. все порядки, начиная с некоторого, или диапазон, включающий все водотоки с водосбором больше заданного, As .

В работе (Златопольский, Зайцев, 2021) удалось соотнести масштаб анализа долин, который задаётся W , и масштаб анализа водотоков, который задаётся As . Это соответствие найдено как попиксельным сопоставлением линий долин и линий водотоков, так и сравнением ориентационных характеристик рельефа с опорой на явные особенности ориентации при том или ином масштабе. Была использована территория «Шилка», где при переходе к одному из масштабов происходит резкая и повсеместная смена направления, и территория «Кама», где такая смена направления происходит на двух масштабах. В обоих случаях результат сопоставления для приведённого порядка, ν , был около $W = 2^{(\nu-1)}$.

Применим здесь этот подход для территории «Амур». Линии вытянутости в первом ряду рис. 2 рассчитаны в скользящем окне (диаметр 94 км) для долин с шириной $W = 2,946$ км и больше (самая левая позиция). Далее на каждом шаге W растёт в $\sqrt{2}$ раз (половина порядкового шага). Во втором ряду показаны ЛВ, рассчитанные в том же окне для водотоков. Поскольку рисунки ЛВ по водотокам одного порядка и по водотокам соответствующего диапазона идентичны (Златопольский, Шекман, 2023), используем группировку в диапазоны, так как это более удобная и гибкая форма. На первой позиции во втором ряду даны ЛВ для водотоков с водосбором от $As = 9$ км² (соответствует приведённому порядку 2,5). Далее на каждом шаге As растёт в 2,145 раз (+0,5 порядка). При этом рисунок ЛВ изменяется преимущественно северо-западного направления на почти полностью северо-восточное около 3-го порядка: у порядка 2,5 ещё преобладает северо-западная ориентация, а у порядка 3,5 — уже северо-восточная.

Совершенно синхронное изменение рисунка ЛВ в рядах 1 и 2 свидетельствует о правильно найденном соответствии параметров W и As : $W = 1,15As^{0,466}$ или $W = 0,813Ac^{0,466}$, $HE_W = 0,466$ и $As = 0,741W^{2,148}$; если ввести коэффициент Хортона, то $R_W = R_A^{0,466} = 2$ и $W = 2^{(\nu-1)}$. Теперь полученный в LESSA рисунок ЛВ можно соотносить с ориентацией водотоков всех порядков, начиная с $\nu = \log_2 W + 0,941$. Учитывая, что эти соотношения получены за счёт визуального сопоставления ЛВ, всё же обратим внимание на то, что оценки ширины долин, W , и длины водотоков (плотности), D , оказались обратно пропорциональны друг другу (за порядковый шаг W растёт в два раза, D падает в два раза). Их произведение формально можно рассматривать как оценку суммарной площади долин диапазона на единицу площади. Из модифицированных законов Хортона получим, что $WD = 0,632(\lg F)$ — ещё одна постоянная оценка суммарной площади, аналогичная постоянной суммарной площади водосбора U . Естественно, и отношение этих площадей постоянно: $U/WD = Am/WL = 1,2(\lg F)^{-0,564}$, в частности при $F = 4,433$, $Am/WL = 1,516$.

Так как установлено масштабное соответствие долин (LESSA) и водотоков (ГИС), проведём следующий эксперимент. На территории «Амур» для 11 значений W найдём плотность $Dval$ всех долин с шириной W и больше. Результат этих измерений хорошо аппроксимируется функцией $Dval = 0,842W^{-0,973}$. Если в формуле значения плотности всех водотоков с площадью водосбора больше As , которая получена по растру стока на четырёх территориях, $Dall = 0,732As^{-0,485}$, формально заменить As на $0,741W^{2,148}$, то получим $Dall = 0,847W^{-1,042}$. Удивительно сходство формул $Dall$ и $Dval$, полученных столь разными технологиями на разных территориях. Видимо, формулы отражают глубинное свойство рельефа.

Рассмотрим ситуацию с линиями вытянутости в ином аспекте. В LESSA вынужденно анализируется широкий масштабный интервал долин, а интервал водотоков можно задать гораздо уже. В 3-м ряду рис. 2 представлены ЛВ для диапазонов, у которых то же начало интервалов,

что и при расчёте 2-го ряда, но ограниченная ширина $F = 4,6$. Рисунок этих ЛВ гораздо точнее отражает масштабные особенности и общую смену направлений, которая происходит на масштабе не 3-го, а 4-го порядка. В 4-м ряду показаны общие розы-диаграммы водотоков этих диапазонов, которые описывают ориентацию водотоков гораздо грубее, чем ЛВ, но факт смены направления на 4-м порядке виден очень чётко. Точность анализа можно и ещё увеличить. Использованные здесь диапазоны рассчитаны с «половинным» шагом смещения, \sqrt{F} , а значит, они на половину перекрываются. Поэтому мы рассмотрели диапазоны с интервалом \sqrt{F} и шагом \sqrt{F} . По их ЛВ и розам-диаграммам видно, что смена направления происходит именно внутри 4-го порядка: у диапазона первой половины 4-го порядка северо-западное направление превалирует над северо-восточным, а у диапазона второй половины — наоборот.

Таким образом, расчёт в LESSA ориентации водотоков позволяет уточнить анализ рельефа за счёт большей избирательности по масштабу. Хотя в работе с элементами рельефа, которые даёт LESSA, есть и свои возможности: можно использовать больше данных, выявляя не только долины, но и хребты; нет необходимости строить связные сети, что бывает проблематично (такие трудности возникли при анализе ЦМР Тибета).

Масштаб и возраст

Начнём рассмотрение этого вопроса с метода базисных поверхностей, который уже многие годы используется для анализа изменений рельефа во времени. Базисные поверхности строятся по высотам всех водотоков, начиная с некоторого порядка. Для более детального анализа, для изучения ситуации в определённом временном интервале, используют разницу двух последовательных базисных поверхностей (Чернова и др., 2010). В верхнем ряду *рис. 3* дан пример разностных базисных поверхностей, рассчитанных для территории «Нигер 100», по водотокам приведённых порядков 4, 5, 6.

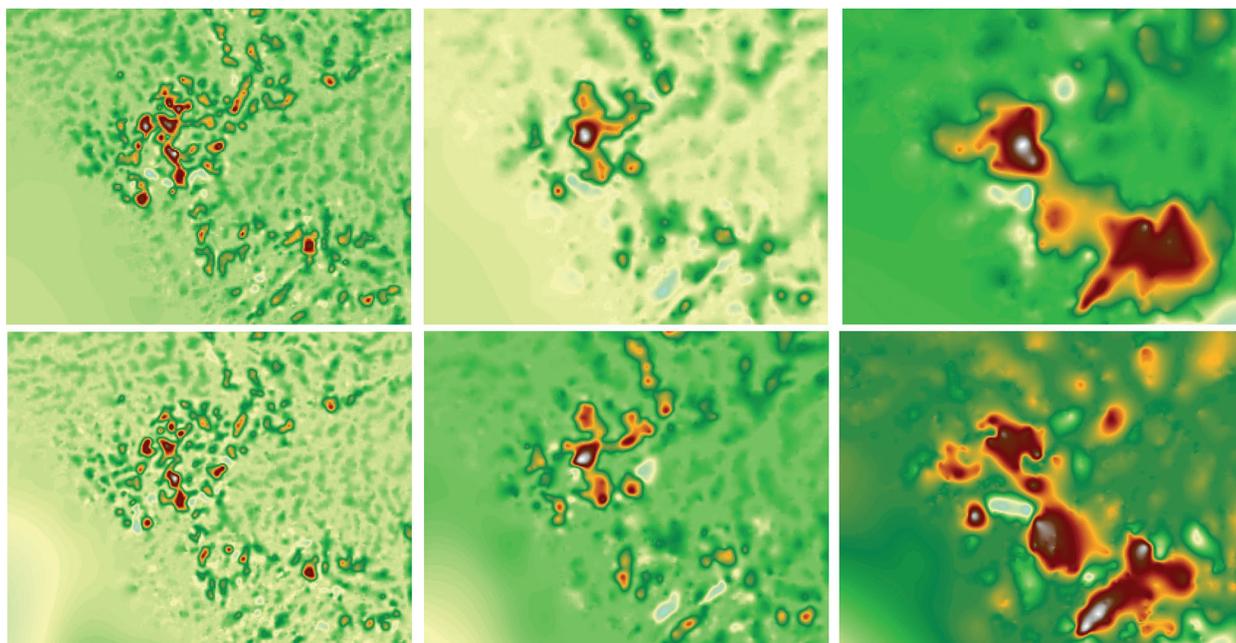


Рис. 3. Разностные базисные поверхности, рассчитанные по водотокам приведённых порядков 4, 5, 6 (верхний ряд) и по соответствующим диапазонам (нижний ряд); раскраска высот от тёмно-зелёного цвета, через коричневый к белому

В нижнем ряду показаны разностные базисные поверхности, построенные по водотокам диапазонов соответствующих масштабов. Как видим, поверхности по диапазонам в целом сходны с поверхностями по порядкам, хотя для крупных водотоков, которых мало, отличие

растёт. Не удалось получить качественной оценки, какой вариант — по порядкам или по диапазонам — лучше согласуется с остальными данными по этой территории. Но сейчас для нас важно отметить сходство результатов, которое показывает, что для получения сведений о рельефе в определённый период времени важен именно масштаб водотоков, а не порядок их впадения друг в друга. При этом, используя разбиение на диапазоны, можно аккуратнее варьировать шаг по масштабу, а значит, и «по времени».

Отметим, что, строя базисные поверхности, водотоки одного масштаба (порядка) на больших территориях (10^6 км² и больше) относят к одному периоду формирования рельефа. А значит, возможно, что водотоки этого масштаба и на соседних территориях — того же возраста. Попробуем проверить смелое предположение, что примерно к одному времени относится заложение всех водотоков флювиального рельефа одного масштаба, если масштаб определять одинаково. Ограничиваем тип рельефа, потому что пока неясно, как аккуратно распространить этот подход на рельеф любого типа. Возможно, есть ограничение и по масштабу водотоков — рассматривать не очень крупные и не самые мелкие.

Будем искать соответствие между масштабом водотока и его возрастом, сделаем небольшой шаг в этом направлении. Исследователи давно рассматривают это соответствие на интересующих их территориях, а мы постараемся найти и состыковать такие данные. Сложность поиска соответствия состоит в том, что нет каталога, в котором можно было бы найти датировку водотоков, а в публикациях, где возраст указан, его определяют и приводят с разной точностью: кто прямо даёт временной интервал, а кто — код геохронологической таблицы. Кроме того, исследователи редко сообщают тонкости своего расчёта порядков, так что приходится спрашивать авторов о давно сделанных работах, а воспоминания могут быть неточными. Так что, понимая приблизительность имеющихся у нас данных, все же приведём их, надеясь, что при накоплении материала закономерность прояснится.

Удалось найти три публикации с анализом базисных поверхностей почти на тех же территориях, которые исследовали мы: «Кама» (Чернова и др., 2013), «Нигер 100» (Мамедов и др., 2022) и «Амур» (Симонов и др., 2021). Расчёт водотоков шёл с разными порогами на минимальную площадь водосбора, и «Амур» оказался с нецелыми приведёнными порядками, +0,43. Этот сдвиг мы отобразили в форме табл. 2, где дана датировка базисных поверхностей. Возраст авторы определяли разным способом и с очень разной точностью, самая высокая — для территории «Нигер 100». Датировки у территорий «Кама» и «Нигер 100» близки, при том что возраст долин определялся абсолютно разными методами. У «Амура» датировка сдвинута относительно них примерно на 1,5 порядка.

Таблица 2. Датировка водотоков для трёх территорий (по публикациям)

Порядок ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Водосбор A_{ν} , км ²	0,444	1,967	8,72	38,65	171,4	760	3367	14 928	66 174
«Кама», 10^6 лет	10^{-4}	10^{-2}	0,781–0,0117		1,8–0,781	2,6–1,8	5	23	
«Нигер 100», 10^6 лет					1,2–0,7	5,3–1,8	15,9–5,3	37,7–20,4	72,1–41,2
«Амур», 10^6 лет		0,781–0,0117	1,8–0,781	2,6–1,8	23–2,6	33,9–23	56–33,9		

Надеемся, что пополнение этой подборки данными других исследований поможет найти привязку масштаба водотоков к их возрасту. Данные для территории «Нигер 100» и получены, и приведены аккуратнее, чем остальные. Их аппроксимация ($r^2 = 0,991$) даёт пример зависимости возраста водотоков от их масштаба, которую хотелось бы получить в итоге исследований: возраст (в миллионах лет) $T = 0,029A^{0,7}$, $HE_T = 0,7$ или $T = 0,04678R_T^{\nu-1}$, $R_T = 2,818$ (почти значение e).

Анализ базисных поверхностей территории «Амур» (Симонов и др., 2021) позволил обнаружить, что во время заложения долин 4-го и 5-го порядков произошла смена структурного плана региона, которая «предположительно была синхронна с проявлением миоцен-плио-

ценового базальтового вулканизма». А значит, можно предположить, что резкое изменение ориентировки между долинами 3-го и 5-го порядка на *рис. 2* связано со сменой структурного плана в тот период времени.

Нас интересует датировка таких скачков, так как при мультимасштабном анализе ЦМР (Златопольский, 2015) скачкообразное изменение общего направления элементов рельефа было обнаружено на многих территориях; в частности, такие скачки происходят во всех исследованных здесь территориях. Причём оказалось, что на приведённых порядках 4,5–4,75 такой скачок происходит существенно чаще, чем на других масштабах. Так, он есть в «Шилке» и «Каме», а также на других территориях по всему миру: в Конго, Памире, верховьях Амазонки и др. Если обнаружится общее соответствие масштаба водотоков (элементов рельефа) их возрасту, то объяснение скачков на разных территориях при одном масштабе можно будет искать в глобальных событиях соответствующего периода. Если ориентироваться на приведённую выше формулу, данное событие могло произойти около миллиона лет назад, так как с этим периодом связаны водотоки с водосбором около 170 км².

Основания найденных закономерностей. Масштабная инвариантность

Во вступлении мы упоминали, что это исследование начиналось как поиск «естественной дискретности» в структуре водотоков, поиск последовательности порядков, идущей от истинного первого порядка. Однако таких особенностей найти не удалось, все найденные зависимости от масштабных факторов оказались гладкими, без неоднородностей, которые указывали бы на «особенные» масштабы. Напротив, зависимости, включая ширину долин и пример связи возраста и масштаба, хорошо аппроксимируются однородными степенными функциями, свойственными масштабной инвариантности (см. обзор в работе (Петухов и др., 2012)). Эта инвариантность проявляется, возможно, и в таких обнаруженных особенностях, как независимость от масштаба анализа суммарной площади водосбора (а также суммарной площади долин) и постоянство некоторых средних характеристик водотоков, если их измерять не в метрических единицах, а в пикселях, когда исключён абсолютный размер объектов. Инвариантности нет в ориентационных характеристиках, что позволило соотнести масштабы водотоков и долин.

При ином способе поиска элементов рельефа (в LESSA) также отмечалось (Златопольский, 2015), что плотность в пикселях — отношение суммарной длины найденных долин в пикселях к площади территории в пикселях — меняется очень мало как при изменении территории, так и при изменении разрешения ЦМР. Плотность меняется только на 10–15 % около значения 0,1 (0,2 для долин и хребтов). Речь идёт о плотности, полученной с большим усреднением; так, на территории «Амур» суммарная длина долин — около 10⁷ пикселей. При локальных измерениях, когда суммарная длина долин составляет, скажем, около 10⁴ пикселей, плотность в пикселях может отличаться от 0,1 в разы.

Было бы важно установить, что формирует найденные закономерности, какие физические (пространственные, гидрологические, геодинамические и др.) законы их порождают, почему зависимости имеют именно степенной характер и почему показатели степени, HE , именно такие, как получены в наших измерениях. К сожалению, у нас пока на этот счёт только два предположения, относящиеся к HE , — почему они так близки к следующим «круглым» значениям: $HE_N = -1$; $HE_D = -0,5$; $HE_L = 0,5$; $HE_W = 0,5$.

Первое соображение, не доказательство, состоит в следующем естественном предположении. Если при смене масштаба исследования территории средняя площадь изучаемых объектов (областей водосбора) изменяется, например растёт в C раз, то объектов большего масштаба поместится на территории в C раз меньше ($HE_N = -1$), а средние линейные характеристики объектов — длина и ширина — вырастут в $C^{0,5}$ раз ($HE_L = 0,5$ и $HE_W = 0,5$). (Напомним, что WL меняется пропорционально средней площади водосбора.) И плотность $D = NL$ станет в $C^{0,5}$ раз меньше ($HE_D = HE_N + HE_L = -0,5$).

Второе соображение. Значения HE создают формальную основу для отмеченных особенностей: для константности суммарной площади водосбора, $U = AN$, N должно быть обратно пропорционально A , т. е. $HE_N = -1$, а для постоянства в пикселях плотности и удельного числа водотоков нужны значения $HE_D = -0,5$ и $HE_N = -1$ (пояснение ниже). Если будет установлено, что эти особенности — проявление какого-то фундаментального закона (скажем, масштабной инвариантности), то, значит, и значения HE диктуются этим законом. (Пояснение. Пусть разрешение ЦМР изменилось, пиксель стал больше в C раз. Площадь территории в пикселях уменьшилась в C^2 раз. Диапазон значений площади водосбора водотоков в пикселях сохранился, но масштаб водотоков (в км²) увеличился в C^2 раз, а значит, число водотоков, Q , и их суммарная длина (в км), G , уменьшились. Чтобы сохранилось удельное число водотоков в пикселях, уменьшение Q должно быть в C^2 раз, т. е. HE_N должно быть -1 . Чтобы сохранилось значение плотности в пикселях, G должно уменьшиться в C раз, т. е. HE_D должно быть $-0,5$, а ещё в C раз G в пикселях уменьшится из-за увеличения пикселя.)

Отметим числовые совпадения (при интервале диапазона, равном R_A), которые, судя по упоминаниям в работе (Петухов и др., 2012), возможно, также связаны с масштабной инвариантностью. Константное значение относительной суммарной площади водосбора $U = 0,626$ близко к золотому сечению $0,618$. Значение R_D численно равно $-HE_D$: $HE_D = -0,485$, $R_D = R_A^{-0,485} = 0,4858$ или $(-HE_D)/\lg(-HE_D) = -1/\lg(R_A) = -1,546$. А экспериментально найденное значение R_A только на $0,2\%$ отличается от $\pi\sqrt{2}$.

Заключение

Мы анализировали статистику элементов рельефа разного масштаба по ЦМР больших территорий, когда этих элементов достаточно много и разрешение ЦМР не слишком грубое. Получены взаимозависимости и зависимости от масштаба для средних характеристик линий водотоков (талвегов), построенных в ГИС. Закономерности найдены экспериментально по нескольким территориям, но есть и теоретически выведенные зависимости, которые экспериментально проверены. В найденных закономерностях проявилась масштабная инвариантность: их степенной характер, константность суммарных площадей и постоянство характеристик в пикселях.

Первая группа результатов относится к анализу водотоков, разделённых на порядки по правилу Хортон–Стралера. Поскольку значения средних характеристик водотоков одного порядка на разных территориях оказались очень близкими, для них были найдены и записаны в разных вариантах закономерности, которые мы назвали законами Хортон. По ним можно априорно оценить средние характеристики водотоков.

Например, для плотности водотоков, если масштаб задаётся номером порядка, k , и значением порога, A_T , это $D_k = (0,3707/A_T^{0,485})R_D^{-1}$, R_D — коэффициент Хортон для плотности. Для сопоставления результатов разных исследований предложен другой вариант, в котором масштаб задаётся номером приведённого порядка, v (действительное число), $D_v = 0,399R_D^{v-1}$. Показано, как к такому виду привести порядки, полученные вручную по «синим линиям» карты. Например, порядки по карте 1:100 000 начинаются с $v = 1,229$, и примерно такие же результаты можно получить, взяв ЦМР с разрешением $0,11$ км/пиксель и порог 100 пикселей, $A_T = 1,21$ км². В третьем варианте роль масштабного фактора играет средняя площадь водосбора порядка, Am_k , $D_k = 0,547Am_k^{-0,485}$. Тут «работает» более фундаментальная, чем коэффициент Хортон, характеристика рельефа, которую мы назвали показателем степени Хортон (англ. Horton Exponent), $HE_D = -0,485$. Из полученных соотношений аналитически выведены и экспериментально проверены: константность суммарной площади водосбора водотоков одного порядка; принцип и формулы равномерного распределения водотоков одного порядка по водотокам старших порядков; формула для коэффициента Токунага и формула площади водосбора прямого стока.

Предложено характеризовать масштаб водотоков не системой порядков, а непосредственно площадью их водосбора, и группировать водотоки не в порядки, а в диапазоны:

участки сети с водосбором в заданном интервале значений. Экспериментально установлено, что для диапазонов действуют закономерности, найденные для порядков. Законы Хортонa модифицированы по экспериментальным данным так, что учитывается размер интервала. При этом средние характеристики, включая и ориентационные, для диапазонов «порядкового размера» те же, что для порядков. Разностные базисные поверхности по диапазонам сходны с аналогичными поверхностями по порядкам. Но в отличие от порядков диапазоны могут быть одиночные и нужного размера.

То что закономерности, найденные для порядков, работают и для диапазонов произвольного размера, а что-то обнаруживается и «глубже» (при анализе раstra стока без выделения отдельных водотоков), может свидетельствовать, что эти закономерности определяются масштабом водотоков, а не порядком их впадения. Структуре порядков (как линейке) присущ определённый масштабный шаг, R_A , при этом положение «нуля линейки» исследователь задаёт произвольно. Предполагаем, что свойства рельефа определяют HE , а коэффициенты Хортонa — это реализация HE при делении водотоков по масштабу системой порядков. Значения HE получены нами из экспериментов, а также показано, как эти значения можно оценить из возможных проявлений масштабной инвариантности.

Результаты для водотоков сопоставлены с теми, которые получаются при ином способе исследования элементов рельефа, когда с помощью программы LESSA в ЦМР выявляются линии осей отрицательных форм рельефа, долин. Масштабным фактором для долин служит их ширина, W , как площадь водосбора, A , для водотоков. Установлено соответствие W и A в виде законов Хортонa, так что теперь можно определять, водотокам с каким водосбором (какого порядка) соответствуют результаты LESSA. Плотность долин при изменении масштаба анализа ведёт себя близко к закономерности, полученной из гистограммы раstra стока. Локальные ориентационные характеристики у долин и водотоков очень схожи. При этом, анализируя в LESSA не ЦМР, а водотоки, можно получить результаты, которые гораздо детальнее по масштабу.

Поиск формального соответствия между масштабом водотоков и их возрастом мы начали со сбора публикаций с экспериментально полученными шкалами датировки порядков. Найденны публикации, содержащие такие датировки для трёх территорий, использованных в данной работе. Номера порядков были переведены в приведённые, поэтому их можно было сопоставить. Две шкалы оказались близки в датировке 4-го и 5-го порядков. Для одной из шкал в качестве примера с помощью аппроксимации получены соотношения масштаба и возраста в виде закона Хортонa.

Исследования в этих направлениях продолжаются, так как частично необходимы проверки по другим территориям, а в чем-то мы в самом начале пути, например в таких вопросах, как возраст долин, анализ растровых характеристик.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Мониторинг», госрегистрация № 122042500031-8).

Литература

1. Гарцман Б. И., Бугаец А. Н., Тегай Н. Д., Краснопеев С. М. Анализ структуры речных систем и перспективы моделирования гидрологических процессов // Речные системы Дальнего Востока России: четверть века исследований. Владивосток: Дальнаука, 2015. С. 273–285.
2. Златопольский А. А. Мультимасштабный анализ цифровой модели рельефа. Экспериментальные закономерности // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2015. Т. 12. № 3. С. 21–29.
3. Златопольский А. А. Получение ориентационных характеристик территории с помощью технологии LESSA. Методика и тестирование на цифровой модели рельефа Предбайкалья // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2020. Т. 17. № 4. С. 98–110. DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-4-98-110.

4. Златопольский А. А. Порядковая статистика долин, найденных по цифровой модели рельефа. Базовый расчёт и приведённый порядок // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2022. Т. 19. № 3. С. 133–142. DOI: 10.21046/2070-7401-2022-19-3-133-142.
5. Златопольский А. А. (2023а) Масштабная статистика долин, найденных по цифровой модели рельефа. Модифицированные законы Хортона // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2023. Т. 20. № 3. С. 87–95. DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-3-87-95.
6. Златопольский А. А. (2023б) Структура раstra стока построенного по цифровой модели рельефа // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2023. Т. 20. № 4. С. 123–132. DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-4-123-132.
7. Златопольский А. А. (2023в) Константность площади суммарного водосбора водотоков одного масштаба и распределение этого водосбора между водосборами водотоков большего масштаба // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2023. Т. 20. № 5. С. 120–129. DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-5-120-129.
8. Златопольский А. А., Зайцев В. А. Соотношение порядка и ширины долин, автоматически найденных по цифровой модели рельефа // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2021. Т. 18. № 6. С. 141–151. DOI: 10.21046/2070-7401-2021-18-6-141-151.
9. Златопольский А. А., Шекман Е. А. Порядковая статистика долин, найденных по цифровой модели рельефа. Масштабный фактор и уравнения Хортона // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2022. Т. 19. № 5. С. 113–122. DOI: 10.21046/2070-7401-2022-19-5-113-122.
10. Златопольский А. А., Шекман Е. А. Порядковая и масштабная статистика долин, найденных по цифровой модели рельефа // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2023. Т. 20. № 2. С. 125–134. DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-2-125-134.
11. Златопольский А. А., Симонов Д. А., Захаров В. С., Порядковая статистика долин — длина, ширина, направление (на примере Буреинского хребта) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2021. Т. 18. № 5. С. 97–107. DOI: 10.21046/2070-7401-2021-18-5-97-107.
12. Мамедов В. И., Зайцев В. А., Макарова М. А., Пашков В. С., Чаусов А. А. Объяснительная записка к карте геоморфологических циклов бокситоносной провинции Фута Джаллон-Мендинго и ее обрамления (Западная Африка) / под ред. Мамедова В. И. М.: Акварель, 2022. 76 с.
13. Петухов А. В., Шелепов И. В., Петухов А. А., Куклин А. И. Степенной закон и принцип самоподобия при изучении трещиноватых нефтегазоносных коллекторов и гидродинамическом моделировании процесса разработки // Нефтегазовая геология. Теория и практика. 2012. Т. 7. № 2. 21 с. http://www.ngtr.ru/gub/3/33_2012.pdf.
14. Симонов Д. А., Захаров В. С., Гильманова Г. З., Диденко А. Н. Новейшая тектоника Северного Сихотэ-Алиня и сопредельных территорий и ее отражение в характеристиках самоподобия гидросети // Вестн. Московского ун-та. Сер. 4: Геология. 2021. № 5. С 19–30.
15. Чернова И. Ю., Нугманов И. И., Даутов А. Н. Применение аналитических функций ГИС для усовершенствования и развития структурно-морфологических методов изучения неотектоники // Геоинформатика. 2010. № 4. С. 9–23.
16. Чернова И. Ю., Нургалиев Д. К., Нургалиева Н. Г., Нугманов И. И., Чернова О. С., Кадыров Р. И. Реконструкция истории Татарского свода в неоген-четвертичный период по данным морфометрического анализа // Нефтяное хоз-во. 2013. № 6. 12–15.
17. Хортон Р. Е. Эрозионное развитие рек и водосборных бассейнов. Гидрофизический подход к количественной морфологии: пер. с англ. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 158 с.
18. Pelletier J. D. Self-organization and scaling relationships of evolving river networks // J. Geophysical Research. 1999. V. 104(B4). P. 7359–7375.
19. Wang K., Zhang L., Li T. et al. Side Tributary Distribution of Quasi-Uniform Iterative Binary Tree Networks for River Networks // Frontiers in Environmental Science. 2022. V. 9. Article 792289. DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.

Scale terrain statistics — orders, ranges, tributary distribution, orientation, age, scaling

A. A. Zlatopolsky

Space Research Institute, Moscow 117997, Russia

E-mail: aazlat@gmail.com

The results of a long-term experimental study using a digital elevation model (DEM) of the properties of fluvial relief are presented. The scale of streams is usually characterized by the Horton order value. A more flexible method of division by scale, “range,” is proposed, in case where the interval of values of the catchment area is directly specified. For both options of watercourses grouping, laws called Horton’s laws have been found, which determine the number and density of watercourses of a certain scale. These laws work independently of the orders structure and can be written as homogeneous power laws with Horton exponents. From these laws, the following were analytically derived and experimentally tested: the principle and formulas for the distribution of watercourses of the same order among watercourses of higher orders; formula for the Tokunaga coefficient and formula for the catchment area of direct runoff. The difference base surfaces constructed from watercourses, which are selected by range and order, are similar. Using the LESSA (Lineament Extraction and Stripe Statistical Analysis) program made it possible to find the valley axes in the DEM and carry out their statistical analysis. The scale factor for valleys is their width. For the valley width, a correspondence with the catchment area has been established in the form of Horton’s law. The orientation characteristics and density of valleys and watercourses of the same scale are very similar. But with the help of the analysis of watercourses, it is possible to obtain results that are much more detailed in scale. It made it possible to clarify the scale at which an abrupt change in the orientation of relief elements occurs. To search for a formal correspondence between the scale of watercourses and their age, order dating scales found by researchers of three territories were compared. For one of the territories, the relationship between scale and age is presented in the form of Horton’s law. The scale invariance of relief properties manifested itself in the power-law nature of the laws, in the constancy of the total areas (catchment and valleys) and in the constancy of a number of characteristics measured in pixels.

Keywords: DTM, approximation, density of watercourse lines, catchment area, Horton’s laws, Horton’s exponent, scaling, valley age, valley orientation

Accepted: 15.03.2024

DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-2-103-121

References

1. Gartsman B. I., Bugaets A. N., Tegai N. D., Krasnopee S. M., Analysis of the structure of river systems and prospects for modeling hydrological processes, *River system of Pacific Russia: A quarter century of research*, Vladivostok: Dalnauka, 2015, pp. 273–285 (in Russian).
2. Zlatopolsky A. A., Multiscale digital terrain map analysis. Experimental regularities, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2015, Vol. 12, No. 3, pp. 21–29 (in Russian).
3. Zlatopolsky A. A., Using LESSA technology to obtain territory orientation characteristics. Methodology and testing using digital elevation model for the pre-Baikal region, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2020, Vol. 17, No. 4, pp. 98–110 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2020-17-4-98-110.
4. Zlatopolsky A. A., Ordinal statistics of the valleys found by the digital terrain model. Basic calculation and converted order, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2021, Vol. 18, No. 6, pp. 141–151 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2021-18-6-141-151.
5. Zlatopolsky A. A. (2023a), Scale statistics of the valleys found by the digital terrain model. Modified Horton’s laws, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2023, Vol. 20, No. 3, pp. 87–95 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-3-87-95.
6. Zlatopolsky A. A. (2023b), The structure of the flow raster calculated from a digital terrain model, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2023, Vol. 20, No. 4, pp. 123–132 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-4-123-132.

7. Zlatopolsky A. A. (2023c), Constancy of the area of the total catchment of watercourses of the same scale and the distribution of this catchment between watercourses of a larger scale, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2023, Vol. 20, No. 4, pp. 123–132 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-5-120-129.
8. Zlatopolsky A. A., Zaitsev V. A., Relationship between order and width of valleys automatically found using a digital terrain model, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2021, Vol. 18, No. 6, pp. 141–151 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2021-18-6-141-151.
9. Zlatopolsky A. A., Shekman E. A., Ordinal statistics of the valleys found by the digital terrain model. Scale factor and Horton's equations, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2022, Vol. 19, No. 5, pp. 113–122 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2022-19-5-113-122.
10. Zlatopolsky A. A., Shekman E. A., Ordinal and scale statistics of the valleys found by the digital terrain model, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2023, Vol. 20, No. 2, pp. 125–134 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-2-125-134.
11. Zlatopolsky A. A., Simonov D. A., Zakharov V. S., Ordinal statistics of valleys — length, width, direction (applied to Bureya ridge), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2021, Vol. 18, No. 5, pp. 97–107 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2021-18-5-97-107.
12. Mamedov V. I., Zaitse V. A., Makarova M. A., Chausov A. A., Pashkov V. S., *Ob'yasnitel'naya zapiska k karte geomorfologicheskikh tsiklov boksitonosnoi provintsii Futa Dzhallon-Mendingo i ee obramleniya (Zapadnaya Afrika)* (Explanatory notes for map of geomorphic cycles of Fouta Djallon-Mandingo bauxite province and environs (West Africa)), Moscow: Akvarel, 2022, 76 p.
13. Petukhov A. V., Shelepov I. V., Petukhov A. A., Kuklin A. I., Power law and self-similarity principle for investigation of fractured reservoirs and hydrodynamical simulation, *Oil-and-gas geology, Theory and practice*, 2012, Vol. 7, No. 2, 21 p. (in Russian), http://www.ngtp.ru/rub/3/33_2012.pdf.
14. Simonov D. A., Zakharov V. S., Gilmanova G. Z., Didenko A. N., Neotectonic vertical movements of Northern Sikhote-Alin and adjacent territories and its relationship with the characteristics of the stream network, *Vestnik Moskovskogo universiteta, Ser. 4: Geologiya*, 2021, No. 5, pp. 19–30 (in Russian).
15. Chernova I. Yu., Nugmanov I. I., Dautov A. N., Application of GIS analytic functions for improvement and development of the structural morphological methods of the neotectonics studies, *Geoinformatika*, 2010, No. 4, pp. 9–23 (in Russian).
16. Chernova I. Yu., Nurgaliev D. K., Nurgalieva N. G., Nugmanov I. I., Chernova O. S., Kadyrov R. I., Reconstruction of history of the Tatar Arch in the Neogene-Quaternary time by means of the morphometric analysis, *Neftyanoe khozyaistvo*, 2013, No. 6, pp. 12–15 (in Russian).
17. Horton R. E., Erosional development of streams and their drainage basins. Hydrophysical approach to quantitative morphology, *Bull. Geological Society of America*, 1945, Vol. 56, pp. 275–370.
18. Pelletier J. D., Self-organization and scaling relationships of evolving river networks, *J. Geophysical Research*, 1999, Vol. 104(B4), pp. 7359–7375.
19. Wang K., Zhang L., Li T. et al., Side Tributary Distribution of Quasi-Uniform Iterative Binary Tree Networks for River Networks, *Frontiers in Environmental Science*, 2022, Vol. 9, Article 792289, DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.