

Статистические масштабные закономерности характеристик рельефа (по растрам модели стока)

А. А. Златопольский

*Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия
E-mail: aazlat@gmail.com*

Подробно описана методика получения мультимасштабных соотношений характеристик рельефа из частотных функций тех растров, которые в ГИС (геоинформационная система) по ЦМР (цифровая модель рельефа) создаёт стандартная модель стока. Приведены экспериментальные результаты по пяти несхожим территориям с разным разрешением ЦМР, но с флювиальным рельефом. Измеряется частота появления в растре тех или иных значений. Частотные функции соответствующих растров одинаковы на всех территориях как по форме, так и по структуре и близки по абсолютным значениям. Соответственно близки и аппроксимации частотных функций разных территорий. В качестве масштабного параметра использовалась длина линии стока. Представлены формулы зависимости от масштаба числа и плотности водотоков, их средней площади водосбора. Эти соотношения обобщают такие известные закономерности, как отношения Хортона и закон Хака. Соотношения однородные степенные и определяются своими показателями, которые мы назвали показателями Хортона. Суммарная площадь водосбора всех точек с одной длиной линии стока практически постоянна, не зависит от значения длины. Эта площадь близка к 0,3 от площади территории с очень небольшим отличием по территориям. Три полученные нами соотношения связаны между собой — два можно получить из третьего (любого) и из константности суммарной площади водосбора. Точное соответствие размерности левой и правой части этих соотношений позволяет предположить, что зафиксированы статистические физические законы. Предполагаем, что один закон — это зависимость числа линий стока от их длины, а второй — константность суммарной площади водосбора всех точек с одной длиной линии стока. Два других соотношения — это следствия из них. Показано, что на найденные соотношения никак не влияет изменение проекции ЦМР с равноугольной на равновеликую.

Ключевые слова: ЦМР, площадь водосбора пикселя, длина линии стока в пикселе, масштаб водотоков, статистические характеристики водотоков, законы Хортона, показатели Хортона, закон Хака

Одобрена к печати: 30.09.2024

DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-6-159-167

Введение

В мультимасштабном анализе характеристик флювиального рельефа мы опираемся на известные многолетние исследования систем водотоков, которые начинались с ручных измерений по картам. После того как в середине прошлого века Хортон предложил определять масштаб водотока с помощью системы порядков, эмпирически было установлено, что изменение характеристик водотоков от порядка к порядку происходит с постоянным мультипликативным шагом — коэффициентом Хортона. Размер этого шага для каждой характеристики свой, но одинаков для различных территорий. Он показывает «скорость» и «направление» (рост или падение) изменения характеристики при смене масштаба. Затем эти исследования были перенесены в геоинформационные системы (ГИС), где анализировали водотоки, построенные по цифровым моделям рельефа (ЦМР), и найденные ранее отношения уточнялись (Pelletier, 1999; Wang et al., 2022).

Продолжая этот ряд исследований, мы получили для некоторых характеристик зависимости их среднего значения от масштаба. Назвали их законами Хортона. Зависимости были найдены эмпирически в разной форме. Так, если масштаб задавать не номером порядка, а значением площади водосбора или длиной водотока от истока до указанной точки, то эти уравнения имеют однородный степенной вид. В них масштабную динамику и взаимозависи-

мости вместо коэффициентов Хортона определяют показатели степени, которые мы назвали показателями Хортона. Эти показатели можно найти из коэффициентов Хортона. А можно и, наоборот, найти систему коэффициентов Хортона из показателей Хортона и одного коэффициента, который необходим как параметр самой системы порядков Хортона — Страллера (размер масштабного шага). На наш взгляд, показатели Хортона «более первичные», более фундаментальные параметры, чем коэффициенты Хортона. О показателях Хортона (не используя специального названия) писали и раньше (Pelletier, 1999), и хотя их определяли по совершенно иной технологии, чем мы, приведённые там значения близки к нашим.

Показатели Хортона можно почти автоматически получить из статистического анализа растровых данных, которые рассчитываются в ГИС при работе общепринятого алгоритма модели стока (Златопольский, 2024б). При этом нет необходимости не только делить систему водотоков на порядки, но и вообще задавать какой-то способ её членения.

Наша задача — не анализ особенностей конкретной территории, а поиск общих закономерностей. Описание большинства предыдущих результатов собрано в публикации (Златопольский, 2024а). В этой статье мы хотим зафиксировать детали нашей методики работы с растрами модели стока и сопоставить результаты по разным территориям, при разном разрешении. Покажем взаимосвязь полученных законов Хортона и обсудим их особенности. Определим степень влияния на эти результаты типа проекции ЦМР.

Методика и территории исследования, принятые обозначения

Анализируем результаты известного алгоритма геоинформационных систем — моделирование стока (в восьми направлениях) по цифровым моделям рельефа, этот алгоритм описан, например, в статье (Чернова и др., 2010). Статистические закономерности, которые мы будем обсуждать, выполняются в среднем на достаточно большой выборке. Поэтому исследования проводим на значительных территориях, около 500 000 км² (включающих части нескольких бассейнов), и анализируем не самые крупные элементы рельефа, а те, которых статистически достаточно много. Результаты измерений характеристик рельефа аппроксимируем, получая экспериментальные зависимости. Сходство аппроксимирующей функции с экспериментальной оценивается квадратом коэффициента их корреляции, r^2 .

Основные использованные обозначения: S — площадь суши исследуемой территории, км²; h — разрешение ЦМР, км/пиксель; LL — длина линии водотока от истока, км; N — среднее число объектов на один километр квадратный; A — площадь водосбора, км²; D — плотность линейных объектов, км/км²; $Dall$ — плотность всех линейных объектов, масштаб которых не меньше заданного, км/км²; c — эмпирический коэффициент для учёта длины стока по диагонали, $c = 1,15$, он необходим при переводе длины водотоков из пикселей в метрические единицы. Индекс p сообщает, что характеристика измеряется в пикселях, например, $S = S_p h$. Приведённые в статье аппроксимации экспериментальных соотношений справедливы для значений характеристик в указанных выше единицах измерения.

Законы Хортона имеют вид однородных степенных уравнений $U = mXU \cdot X^{YXU}$. Обозначение показателей Хортона строим из трёх букв: первая, H , указывает показатель Хортона; вторая — характеристику, которая определяет масштаб и является основанием степени; третья — характеристику, значение которой получаем. Аналогично строится и обозначение множителя, которое начинается с буквы m .

Используем достаточно надёжную и доступную для многих территорий модель рельефа SRTM (*англ.* Shuttle Radar Topographic Mission) в проекции UTM (*англ.* Universal Transverse Mercator). Условные названия территорий даны для краткости: «Амур» — от горной системы Сихотэ-Алинь до р. Буреи; «Кама» — Татарстан и вокруг него; «Пара» — юго-восток бассейна Амазонки; «Нигер» — Гвинея и Сьерра-Лионе. Основной для нас была территория «Амур», а по остальным проверяли устойчивость полученных результатов, *табл. 1*.

Таблица 1. Территории, ЦМР которых использовались для экспериментальных расчётов

Название	Широта	Долгота	Размер		Разрешение, км/пиксель	Площадь суши	
			км	пиксель		км ²	пиксель
«Амур»	47,15– 53,5° с. ш.	130,66– 140,11° в. д.	717,5×719,4	11 033×11 004	0,0651	502 663	118 977 538
«Кама»	52–58° с. ш.	48–57° в. д.	617,7×683,4	9 488×10 498	0,0651	412 885	97 424 163
«Пара»	3–10° ю. ш.	48–54° з. д.	667,08×775,29	10 245×11 907	0,0651	510 418	121 608 897
«Нигер»	7–15° с. ш.	7–16° з. д.	1001,9×902,2	10 019×9 022	0,1	770 165	75 628 291
«Русская плат- форма»	49,5– 59,5° с. ш.	34–55° в. д.	1519,18×1164,28	11 686×8 956	0,13	1 753 437	103 753 670

Растры

На первых шагах гидрологического анализа ЦМР в ГИС, ещё до выявления водотоков, для каждого пикселя определяются: направление стока из пикселя (растр направлений), длина линий стока в пиксель (растр длины), площадь водосбора для пикселя (растр стока). Характеристики рельефа мы вычисляем непосредственно по этим растрам, поэтому рассмотрим их подробнее.

Обратим внимание на дискретность измерения площади и длины на растре. В закономерностях, которые отражают поведение характеристик рельефа при изменении масштаба, необходимо переходить к метрическим единицам измерения, но нельзя забывать о дискретности, которая сказывается при измерении небольших (в пикселях!) значений.

Растр направлений содержит в каждом пикселе коды восьми возможных направлений стока в соседние пиксели. Метрическое расстояние до четырёх диагональных соседей $h\sqrt{2}$, а до остальных — h . Этот растр в наших измерениях используется, но в данной статье он нам не понадобится.

Растр стока показывает, из какого числа пикселей происходит сток в данный пиксель. Для того чтобы получить площадь водосбора, A_p , нужно добавить и сам рассматриваемый пиксель, т.е. прибавить 1. Для перехода к измерению площади в километрах используем выражение: $A = A_p h^2$.

Растр длины указывает длину от истока самой длинной из линий стока, проходящих через пиксель, LL . В ГИС эта величина даётся в метрических единицах с учётом длины диагональных переходов между пикселями. Поскольку дискретность присутствует и в этом измерении, для её учёта и для удобства расчёта гистограмм переводим длину в пиксели: $LL_p = LL/h$. Немного теряем в точности, но учёт длины диагональных переходов в LL_p сохраняется.

Структура гистограммы и выбор участка анализа

Растры анализируем в целом, исследуя их частотную характеристику (гистограмму) — как часто встречается в растре то или иное значение. Так, для каждого наблюдающегося в растре длин значения длины линии стока LL_p подсчитываем число пикселей с этим значением, $Q(LL_p)$, нормируем на площадь суши в пикселях и получаем эмпирическую частотную функцию $H(LL_p) = Q(LL_p)/S_p$. По ней рассчитываем интегральную функцию обеспеченности, $Hall(LL_p)$, как сумму всех значений $H(x)$ при $x \geq LL_p$.

Отметим большое сходство гистограмм разных территорий и разного разрешения, хотя есть и различия, которые мы будем отмечать. Разброс значений измеряем отношением среднеквадратичного отклонения к среднему по выборке, в %. Разброс соответствующих значений $H(LL_p)$ четырёх территорий (без «Амура») составляет 3–6 % при LL_p от 0 до 7, к $LL_p = 26$ разброс растёт до 13 %, а затем падает до 7 % при $LL_p = 60$. А если добавить территорию

«Амур», то при LL_p от 4 до 9 разброс увеличивается до 15–19 % (далее снижается до 10–11 % к $LL_p = 34$, а к $LL_p = 60$ падает до 6 %). Соотнесём масштабы по LL_p с привычным параметром — порогом на минимальную площадь водосбора: масштаб $LL_p = 14$ соответствует площади примерно 50 пикселей, $LL_p = 20$ — площади 100 пикселей, $LL_p = 28$ — площади 200 пикселей.

Далее будем сопоставлять не сырые данные, а функции, которые аппроксимируют эти гистограммы. У функций $H(LL_p)$ и $Hall(LL_p)$ степенной характер, поэтому их удобно анализировать в двойном логарифмическом масштабе, в этом случае их графики — прямые линии. Точнее, в зависимости $\lg(H)$ от $\lg(LL_p)$ к прямой близок основной, средний участок, а на начальные 8–10 значений, видимо, существенно влияет неточность дискретного измерения малых величин. Это предположение основано на том, что у аналогичной гистограммы для ЦМР «Амур» с разрешением, отличающимся в два раза, $h = 0,13$ км на пиксель, получается точно такой же характер начального участка, хотя он и относится к элементам рельефа иного масштаба.

На этом начальном участке график имеет вид кривой с плавным ростом наклона. А ближе к концу графика, примерно после $LL_p = 1000$, его линия всё больше колеблется вокруг прямой из-за того, что такие значения длины встречаются реже и оценка их числа неустойчива. Особенно велики эти колебания после $LL_p = 2000$. Аналогична ситуация и в начале графика $Hall$, но из-за интегрального характера этой функции нет колебания её графика в конце (по крайней мере на интересующем нас интервале значений).

Начальный участок графиков пока не анализируем, но отметим, что он относится к основной части территории, так как значения $LL_p < 10$ присутствуют на 85–90 % территории, а $LL_p > 30$ только у 4–5 % пикселей, которые относятся к водотокам.

Переведём измерения из пикселей в метрические единицы: $LL = LL_p h$ и $N = H(LL)/h^2$ — среднее число на единицу площади (км^2) линий стока, достигших длины LL . В табл. 2 на примере территории «Амур» представлены результаты анализа основного участка графика, разбитого на логарифмически равные интервалы (LL растёт в 2,1 раза, что соответствует примерно диапазону значений одного порядка Хортон — Страллера).

Участок гистограммы каждого интервала аппроксимировался дважды — для значений в пикселях, $H(LL_p)$, и в метрических единицах, $N(LL)$. Полученные показатели степени и качество аппроксимации в этих вариантах одинаковы, а вот соответствующие множители mLN и mLH отличаются, что мы обсудим ниже. Оценка качества аппроксимации, r^2 , падает с ростом масштаба, так как в измерениях участвует всё меньше объектов, $H(L_{\max})$.

Таблица 2. Результаты аппроксимации участков гистограммы

$L_{p \min} - L_{p \max}$, пиксель	29–61	61–128	128–269	269–564	564–1184	1184–2487	32–1024
$H(L_{\max})$, пиксель	41 639	10 904	2596	547	139	39	183
$L_{\min} - L_{\max}$, км	1,89–3,96	3,96–8,33	8,33–17,48	17,48–36,72	36,72–77,1	77,1–161,92	2,1–66,7
$HLN = HLH$	–1,8583	–1,8106	–1,9284	–2,0871	–1,8243	–1,7494	–1,9807
mLN	1,0627	1,0023	1,3053	1,9857	0,7437	0,5564	1,389313
mLH	0,7238	0,5992	1,0767	2,527	0,4615	0,2813	1,322
r^2	0,9999	0,9995	0,9993	0,9979	0,9922	0,9728	0,999

Выбираем для дальнейших измерений участок графика с LL_p от 32 до 1024. Не включён последний интервал с самыми большими колебаниями значений, так что получается хорошее качество аппроксимации. Как мы покажем дальше, по площади водосбора это интервал примерно от 1,24 до 1189 км^2 (несколько меньше пяти порядков).

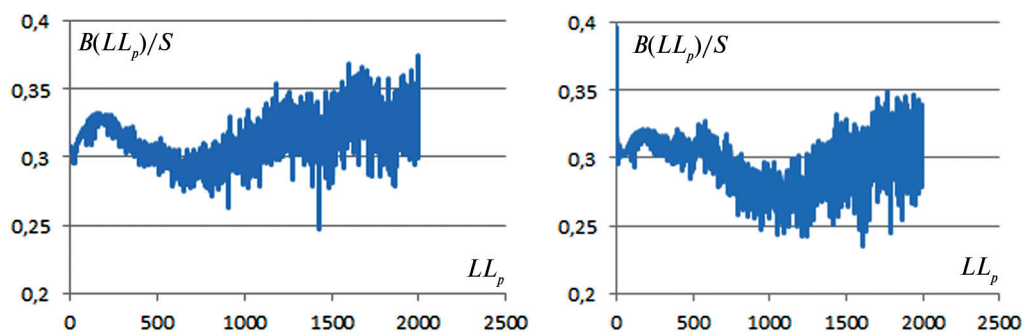
Результаты экспериментов

Для представленных выше пяти территорий рассчитываем растры длин, считаем их гистограммы и аппроксимируем выбранные средние участки (32–1024 пикселей). Несмотря на то, что территории совершенно разные и различно разрешение, полученные аппроксимации очень близки. Соотношение со средними параметрами $N = 1,233LL^{-1,968}$, разброс значений показателя 1,4 % и множителя 10,9 %, среднее $r^2 = 0,9994$.

Аналогично анализируем функцию *Hall*. Переходим к метрическим единицам: суммарное число пикселей пересчитываем в суммарную длину в км, площадь территории — в км², длину стока — в км. В результате получаем плотность всех фрагментов линий стока с длиной не меньше LL , $Dall(LL)$.

У «Амура» $Dall = 1,547LL^{-0,94}$, а среднее соотношение по пяти территориям $Dall = 1,376LL^{-0,9288}$ с разбросом значений показателя 5,1 % и множителя 14,2 %, среднее $r^2 = 0,999$. Разброс существенно больше, чем у соотношений для N , и это связано с отличием соотношения для территории «Нигер» от остальных. Без него по четырём территориям $Dall = 1,4596LL^{-0,95}$ с разбросом значений показателя 1,2 % и множителя 5,2 %, среднее $r^2 = 0,9996$, т.е. разброс даже меньше, чем у N . Предполагаем, что отличие территории «Нигер» обусловлено тем, что её размер (в пикселях) существенно меньше, чем у остальных, а значит и меньше объектов большого масштаба и менее надёжна оценка частоты этих фрагментов (число пикселей с длиной стока $LL_p = 1000$, у «Нигера» — 117, а у «Амура» — 183). Это обстоятельство сказывается именно на интегральной характеристике, которая постоянно включает все объекты большого масштаба, а на расчёт N не влияет.

Следующее измерение делаем по растрам длин и стока. По растру длин определяем все пиксели, в которые приходят линии стока длиной LL . По растру стока для всех этих пикселей находим суммарную площадь водосбора, B . Оказалось, что B мало меняется при изменении LL . Для сопоставления разных территорий рассматриваем относительное значение суммарной площади B/S . На рисунке приведен пример изменения $B(LL_p)/S$ на двух территориях при первых 2000 значениях LL_p . Плавно и несущественно (в пределах 10 %) меняется локальное среднее значение B/S , а колебания вокруг этого среднего растут для малочисленных водотоков с большой длиной стока. Среднее значение B/S обозначим β . Для «Амура» на выбранном ранее участке (LL_p от 32 до 1024) $\beta = 0,3055$ с разбросом 4,6 %, а у «Камы» $\beta = 0,299$ с разбросом 5,3 %. Разброс значений вокруг β и на других территориях небольшой: 4,5–6,4 %, только у «Нигера» 8,6 %.



Графики функции $B(LL_p)/S$, рассчитанные по территориям «Амур» (слева) и «Кама» (справа)

Значения β и на других территориях близки. Среднее по пяти территориям $\bar{\beta} = 0,3$ с разбросом между β по территориям 4 %. Подобное постоянство мы обнаруживали и при анализе водотоков одного масштаба, например одного порядка. Оно вытекает ещё из отношений Хортонa, в которых N и A при изменении масштаба меняются практически обратно пропорционально, так что их произведение, которое и есть относительная суммарная площадь водосбора порядка, постоянно.

Зависимость средней площади водосбора от масштаба, который задаётся величиной LL , можно найти как $A = B(LL)/(S \cdot N(LL))$. Аппроксимация этого соотношения на территории «Амур» для выбранного выше диапазона значений LL даёт $A = 0,25LL^{1,941}$. Но можно использовать среднее значение относительной суммарной площади водосбора, тогда $A = \beta/N(LL)$. Для «Амура» при том же диапазоне значений LL получим $A = 0,3055/1,389LL^{-1,9807} = 0,22LL^{1,9807}$, т.е. $HLA = -HLN$ и $mLA = 0,3/mLN$. Показатели степени при обоих подходах отличаются только на 2 %, а множители на 13 %. Соотношение $A(LL)$ по пяти территориям по первому варианту со средними коэффициентами получается $A = 0,274LL^{1,932}$, а через $\bar{\beta}$ и среднюю аппроксимацию $N(LL)$ получаем $A = 0,24LL^{1,968}$. Результаты очень близки, более уместным представляется использовать второй вариант расчёта при работе с усреднёнными формулами.

Обратное соотношение $LL = 2A^{0,508}$ известно как закон Хака — зависимость длины реки от площади водосбора. Параметры этого закона неоднократно вычисляли по рекам, результаты, собранные в работе (Соболь, Красильников, 2018), недалеко от наших. В статье (Pelletier, 1999) для закона Хака по ряду публикаций указан показатель степени 0,5, а мы получили то же значение почти автоматически, при анализе негенерализированных данных.

Экспериментально проверили, не зависят ли наши результаты от использованной равноугольной проекции ЦМР. Для этого ЦМР «Амур» из UTM перепроецировали в равновеликую коническую проекцию Альберса. Результаты для параметров зависимости $N(LL)$ и значения β приведены в табл. 3. Отличий практически нет.

Таблица 3. Сравнение результатов для равноугольной и равновеликой проекции ЦМР

LL_p	Проекция	HLN	mLN	r^2	β	Разброс B/S , %
32–1024	UTM	-1,9807	1,3893	0,999	0,3055	4,6
	Альберса	-1,98	1,3826	0,999	0,305	4,57
10–2000	UTM	-1,9113	1,1363	0,9982	0,313841	5,54
	Альберса	-1,9103	1,13	0,9982	0,31336	5,55

Обсуждение результатов

Выше показали взаимосвязь между соотношениями $N(LL)$ и $A(LL)$, а есть прямая связь $N(LL)$ и с $Dall(LL)$. Мы получаем $Dall(LL)$ из той же гистограммы, что и $N(LL)$, фактически численным интегрированием, но можно получить и аналитически, интегрируя функцию $N(LL)$. При интегрировании степенной функции её показатель увеличивается на 1, $HLD = HLN + 1$, что мы и видим в аппроксимированных соотношениях. А множитель для $Dall(LL)$, полученный интегрированием, равен $c \cdot mLN / (HLN + 1)$. Например, для территории «Амур» аппроксимацией получили $N = 1,389LL^{-1,9807}$, интегрирование правой части даёт $Dall = 1,629LL^{-0,9807}$, а по аппроксимации $Dall = 1,547LL^{-0,94}$, т.е. отличие параметров формул около 5 %.

Второй принципиальный момент состоит в том, что получаемое аппроксимацией значение HLN очень близко к -2 , а при $HLN = -2$ размерность правой и левой части у $N(LL)$ совпадает: у N размерность шт./км², т.е. км⁻², а в правой части у LL^{HLN} размерность км^{HLN}, т.е. при $HLN = -2$ будет км⁻². За счёт отмеченной связи соотношений имеем $HLA = -HLN = 2$ и $HLD = HLN + 1 = -1$, а при этом соразмерность будет и в соотношениях для $A(LL)$ и $Dall(LL)$. В статистических закономерностях это выполняется далеко не всегда, а в физических законах необходимо.

Ещё одно наблюдение в пользу $HLN = -2$. Выше (табл. 2) мы отметили, что параметры аппроксимации частотной функции при её расчёте в пикселях и в метрических единицах близки — показатели степени идентичны, а множители несколько отличаются. Формально отношение множителей равно h^{HLN+2} , т.е. при $HLN = -2$ и множители становятся одинаковыми. (Вывод этого отношения из зависимостей $N = mLN \cdot LL^{HLN}$ и $H = mLH \cdot LL_p^{HLN}$).

Заменив в первой зависимости LL на $LL_p h$ и N на H/h^2 , получим $H/h^2 = mLN(LL_p \cdot h)^{HLN}$ или $H = mLN \cdot h^{HLN+2} \cdot LL_p^{HLN}$. Сопоставим это со второй зависимостью и получим приведённое отношение.)

Отметим, что в наших исследованиях растров соразмерность правой и левой части соотношения получается не всегда даже и при целых показателях Хортона. Ранее (Златопольский, 2023) сходный анализ частотной функции мы делали, опираясь на другой показатель масштаба — площадь водосбора, A . В том случае соразмерности у частотной функции нет (в правой части получается км^{-3}) и из частотной функции не получается число водотоков, N . Возможно дело в том, длина водотока растёт непрерывно, а площадь водосбора — часто скачком. Так у водотока с площадью водосбора в 15 км^2 может не быть фрагмента с меньшим водосбором, например, 10 км^2 , если водоток образовался при слиянии водотоков с водосбором 4 и 8 км^2 . При этом у полученного в той работе соотношения для характеристики $Dall = 0,758A^{HAD}$ при $HAD = -1/2$ правая и левая части соразмерны, км^{-1} .

Характеристики A и LL связаны только статистически, изменяются они по-разному (после слияния двух водотоков с одинаковой площадью водосбора получим длину больше на единицу, а площадь больше вдвое). Ещё один вариант определения связи между этими масштабными параметрами получим из равенства $Dall(A) = Dall(LL)$, т.е. находим, при каком соотношении значений A и LL задаётся одинаковый масштаб с одинаковой плотностью водотоков. Подчеркнём, что это равенство плотности, а не точно одинаковые фрагменты водотоков, которые могут начинаться неодинаково — где-то раньше, где-то позже, но сумма их длин — одинакова. Для «Амура» таким путём получаем $A = 0,244LL^{1,927}$, что чрезвычайно близко к соотношению, полученному аппроксимацией.

Заключение

Таким образом, из растров модели стока получаем соотношения, которые обобщают такие известные закономерности, как отношения Хортона и закон Хака. Соотношения однородные степенные и определяются своими показателями, которые мы назвали показателями Хортона.

Подробно описана методика получения этих соотношений из частотных функций растра стока и растра длин водотоков. Приведены экспериментальные результаты по пяти совершенно разным территориям с разным разрешением, но с флювиальным рельефом.

1. Частотные функции растра длин водотоков одинаковы на разных территориях и по общей форме, и по структуре — участок дискретной неточности, основной участок, участок статистически ненадёжных результатов — и близки по абсолютным значениям. Разброс собственно значений частоты между функциями пяти территорий около 10 %. Это обусловлено как одинаковой однородной зависимостью от масштаба, так и общими особенностями дискретного и статистического измерения.

2. Аппроксимации частотных функций на этих территориях близки. Соотношение со средними по пяти территориям параметрами $N = 1,2333LL^{-1,968}$, при разбросе значений показателей 1,5 % (наиболее постоянная часть соотношения, как и в отношениях Хортона) и множителей 11 %. Аналогично получены $Dall = 1,376LL^{-0,988}$ (5 и 14,2 %, «благодаря» территории «Нигер», видимо, из-за её небольшого размера), а с использованием растра стока получено $A = 0,274LL^{1,932}$ (1,4 и 9 %).

3. Зафиксировано, что суммарная для всех пикселей с одной длиной водотоков площадь водосбора, B , константна. Разброс её значений для разных длин около 5 % (8,5 % у «Нигера»). Средняя относительная суммарная площадь водосбора, $\bar{\beta}$, по пяти территориям равна 0,3 с разбросом по территориям 4 %.

4. Соотношения $N(LL)$, $D(LL)$ и $A(LL)$ жёстко связаны между собой — два соотношения получаются из третьего (любого) и из константности B/S . Например, показано, как из $N(LL)$ получаем $D(LL)$ и $A(LL)$: $HLD = HLN + 1$, $mLD = c \cdot mLN / (HLN + 1)$, $HLA = -HLN$, $mLA = 0,3 / mLN$.

5. На найденные статистические соотношения не влияет изменение проекции ЦМР с равноугольной на равновеликую.

В итоге, согласованность размерности левой и правой части в трёх соотношениях при HLN , строго равном -2 , позволяет предположить, что найдены два статистических физических закона, видимо, это $N = 1,2LL^{-2}$ и $B/S = 0,3$, а следствия из них — $A = 0,25LL^2$ и $Dall = 1,38LL^{-1}$. (Значение множителей ещё нужно уточнять.) При этом средняя ширина области водосбора получается $A/L = 0,25LL$ и средний коэффициент формы области водосбора $A/LL^2 = 0,25$.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Мониторинг», госрегистрация № 122042500031-8).

Литература

1. Златопольский А.А. Структура растра стока построенного по цифровой модели рельефа // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2023. Т. 20. № 4. С. 123–132. DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-4-123-132.
2. Златопольский А.А. (2024а) Масштабная статистика рельефа — порядки, диапазоны, распределение притоков, ориентация, возраст, инвариантность // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2024. Т. 21. № 2. С. 103–121. DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-2-103-121.
3. Златопольский А. А. (2024б) Масштабная статистика рельефа — линейный параметр масштаба, показатели Хортона, растровые характеристики // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2024. Т. 21. № 3. С. 84–93. DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-3-84-93.
4. Соболев С. В., Красильников В. М. Фрактальные параметры водных объектов бассейна реки Суры // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2018. № 6. С. 4–15. DOI: 10.35567/1999-4508-2018-6-1.
5. Чернова И. Ю., Нугманов И. И., Даутов А. Н. Применение аналитических функций ГИС для усовершенствования и развития структурно-морфологических методов изучения неотектоники // Геоинформатика. 2010. № 4. С. 9–23.
6. Pelletier J. D. Self-organization and scaling relationships of evolving river networks // J. Geophysical Research. 1999. V. 104. Iss. B4. P. 7359–7375. <https://doi.org/10.1029/1998JB900110>.
7. Wang K., Zhang L., Li T. et al. Side tributary distribution of quasi-uniform iterative binary tree networks for river networks // Frontiers in Environmental Science. 2022. V. 9. Article 792289. DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.

Statistical scale relationships of relief characteristics (based on runoff model rasters)

A. A. Zlatopolsky

Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia
E-mail: aazlat@gmail.com

The article describes in detail the method of obtaining multiscale relationships of relief characteristics from the frequency functions of those rasters that a standard runoff model creates in a GIS (geographic information system) using a DTM (digital terrain model). Experimental results are presented for five dissimilar territories, with different DEM resolutions, but with fluvial relief. The frequency of occurrence of certain values in the raster is measured. The frequency functions of the corresponding rasters are the same in all territories, both in shape and structure, and are close in absolute values. Accordingly, the approximations of the frequency functions of different territories are also close. The length of the drainage line was used as a scaling parameter. Formulas are presented for the dependence on the scale of the number and density of watercourses and their average catchment area. These

relations generalize such well-known regularities as Horton's relations and Hack's law. The relationships are homogeneous power relations and are determined by their exponents, which we called Horton exponents. The total catchment area of all points with the same drainage line length is practically constant and does not depend on the length value. This area is close to 0.3 of the area of the territory with very small difference between territories. The three relationships we obtained are interconnected — two can be obtained from the third (any) and from the constancy of the total catchment area. The exact correspondence of the dimensions of the left and right sides of these relations suggests that statistical physical laws have been determined. We assume that one law is the dependence of the number of drainage lines on their length, and the second is the constancy of the total catchment area of all points with the same drainage line length. The other two relations are consequences of them. It is shown that the found relationships are not affected in any way by changing the DEM projection from equiangular to equal-area.

Keywords: DTM, pixel catchment area, length of drainage line in pixel, scale of streams, statistical characteristics of streams, Horton's laws, Horton's exponents, Hack's law

Accepted: 30.09.2024

DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-6-159-167

References

1. Zlatopolsky A. A., The structure of the flow raster calculated from a digital terrain model, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2023, Vol. 20, No. 4, pp. 123–132 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-4-123-132.
2. Zlatopolsky A. A. (2024a), Scale terrain statistics — orders, ranges, tributary distribution, orientation, age, scaling, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2024, Vol. 21, No. 2, pp. 103–121 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-2-103-121.
3. Zlatopolsky A. A. (2024b), Scale terrain statistics — linear scale parameter, Horton exponents, raster characteristics, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2024, Vol. 21, No. 3, pp. 84–93 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-3-84-93.
4. Sobol' S. V., Krasil'nikov V. M., The Sura river basin water bodies fractal parameters, *Vodnoe khozyaistvo Rossii: problemy, tekhnologii, upravlenie*, 2018, No. 6, pp. 4–15 (in Russian), DOI: 10.35567/1999-4508-2018-6-1.
5. Chernova I. Yu., Nugmanov I. I., Dautov A. N., Application of GIS analytic functions for improvement and development of the structural morphological methods of the neotectonics studies, *Geoinformatika*, 2010, No. 4, pp. 9–23 (in Russian).
6. Pelletier J. D., Self-organization and scaling relationships of evolving river networks, *J. Geophysical Research*, 1999, Vol. 104, Iss. B4, pp. 7359–7375, <https://doi.org/10.1029/1998JB900110>.
7. Wang K., Zhang L., Li T. et al., Side tributary distribution of quasi-uniform iterative binary tree networks for river networks, *Frontiers in Environmental Science*, 2022, Vol. 9, Article 792289. DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.