Статистика распределения притоков — матрица впадений (аналог матрицы Токунага)

А. А. Златопольский

Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия
E-mail: aazlat@gmail.com

Предложен новый способ описания свойств рельефа — матрица впадений. Она фиксирует число перетоков из линий стока одной длины в линии стока другой длины. Это аналог матрицы Токунага, но гораздо более детальный. Матрица впадений рассчитывается из растров, которые по цифровой модели рельефа (ЦМР) создаёт стандартная модель стока геоинформационной системы (ГИС). Не нужно выявлять водотоки и разбивать их на порядки. Экспериментальные расчёты проводили на ЦМР участка Дальнего Востока. Описание матрицы через одномерные функции имеет вид однородных степенных зависимостей. Получено основание предполагать, что матрица впадений описывается двумерной квадратичной степенной функцией. Такой вид зависимостей свидетельствует о масштабной инвариантности. Предложен алгоритм расчёта по матрице коэффициента впадений (аналог коэффициента Токунага). Для его вычисления линии стока делятся на участки со значением длины в заданных интервалах. Как и коэффициент Токунага, коэффициент впадений демонстрирует масштабную инвариантность характеристик стока, так как определяется только разницей масштабов основных линии стока и притоков. Если размер интервалов близок к порядковому, то формулы для этих коэффициентов практически совпадают. Разницу масштабов можно измерять отношением длин основных линий стока и притоков. Зависимость значения коэффициента от этого отношения близка к линейной либо к степенной с показателем около 1. Для матрицы впадений подтверждается предложенная ранее гипотеза о равномерном впадении: водотоки одного масштаба при впадении распределяются между водотоками больших масштабов пропорционально суммарной длине водотоков больших масштабов.

Ключевые слова: ЦМР, ГИС, длина линии стока, впадение линии стока, статистические характеристики водотоков, матрица Токунага, коэффициент Токунага, масштабная инвариантность

Одобрена к печати: 17.02.2025
DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-2-71-81

Введение

В статье представлено новое направление многолетнего исследования мультимасштабных характеристик рельефа (Златопольский, 2024а). Мы начинали с того, что нашли взаимозависимости характеристик протяжённых участков гидросети одного масштаба (одного порядка по Хортону – Стралеру). Затем мы показали, как эти закономерности, назвали их законами Хортона, а также и закон Хака можно найти из растров стандартной модели стока геоинформационной системы (ГИС) (Златопольский, 2024б), когда масштаб определяется не номером порядка, а длиной водотока. Эти закономерности масштабно инвариантны, так как имеют однородный степенной характер.

Продолжим обсуждать поиск характеристик гидросети по растрам модели стока. Обратимся к матрице Токунага, которая показывает, сколько водотоков порядка n впадает в водотоки порядка m (порядки по Хортону – Стралеру). Из этой матрицы рассчитываются коэффициенты Токунага: отношение числа водотоков порядка n, впадающих в водотоки порядка m, к числу водотоков порядка m. Самоподобие гидросети проявляется здесь в том, что эти коэффициенты не зависят от абсолютных значений номеров порядка, а только от разницы масштабов $p = m–n$. Коэффициенты определяются соотношением aC^{p-1}, и в среднем по разным территориям $a = 1{,}1$ и $C = 2{,}5$ (обзор (Wang et al., 2022)). Это означает, что в среднем в водоток любого порядка впадает 1,1 водотока предыдущего порядка, 2,75 водотока на 2 порядка меньше, 6,9 водотока на 3 порядка меньше и т. д.

Ранее мы показали, как коэффициенты Токунага можно аналитически вывести из законов Хортона (Златопольский, 2024а), если опираться на предложенную гипотезу равномерного впадения: водотоки одного порядка распределяются между водотоками больших порядков пропорционально суммарной длине водотоков этих порядков. Получили такое же соотношение aC^{p-1} с параметрами очень близкими к экспериментальным: $a = 1{,}254$ и $C = 2{,}154$.

Здесь мы хотим, исходя из растров модели стока, ввести новые способы описания свойств рельефа и с их помощью исследовать закономерности впадения линий стока: коэффициент Токунага и равномерность впадения.

Исходные данные и математические приёмы их анализа

Экспериментальные измерения проводили на цифровой модели рельефа (ЦМР) участка Дальнего Востока — от горной системы Сихотэ-Алинь до Буреи («Амур»), 47,15–53,50° с. ш., 130,66–140,11° в. д., 717,5×719,4 км, площадь суши 502 680 км^2 (не учитываем области водной поверхности), разрешение $h = 0{,}065$ км/пиксель. Использовали достаточно надёжную и доступную для многих территорий модель рельефа SRTM (*англ.* Shuttle Radar Topographic Mission) в проекции UTM (*англ.* Universal Transverse Mercator). Проверка показала (Златопольский, 2024б), что наши результаты сохраняются и при использовании равновеликой конической проекции Альберса.

На первых шагах гидрологического анализа ЦМР в ГИС (Чернова и др., 2010) формируются растры направлений и длин. В каждом пикселе растра направлений указано, в какой соседний пиксель происходит сток. В каждом пикселе растра длин указано расстояние от истока у самой длинной из линий стока, проходящих через пиксель, L. Длину, которую ГИС выдаёт в метрах, пересчитываем в пиксели. Так мы не упускаем из виду дискретный характер измерений в ГИС. Предыдущие исследования подтверждают, что такая смена метрики не меняет найденных закономерностей.

По растру длин рассчитываем эмпирическую функцию $Q(L)$ — частоту (или плотность). $Q(L)$ — это число пикселей с длиной L, делённое на число всех пикселей, участвующих в анализе, $S = 118\,936\,804$ (все пиксели суши, для которых установлено направление стока и которые не находятся на краю растра, где направление стока определяется несколько условно).

Рассчитываем и двумерную функцию частоты $I(L1, L2)$: число случаев стока из пикселя с длиной $L1$ в пиксель с длиной $L2$, отнесённое к S. Эту функцию назвали матрицей впадений. Она является аналогом матрицы Токунага, но масштаб водотока определяется не номером его порядка, а его длиной. Матрица Токунага строится по длинным участкам водотоков, а матрица впадений по отдельным пикселям.

Точность измерений на растре и их дальнейшего анализа определяются:

– точностью процесса моделирования стока и точностью дискретного измерения длины, которые тем меньше, чем меньше длина (особенно первые единицы);

– точностью статистической оценки, которая тем меньше, чем меньше число случаев, а их тем меньше, чем больше длина.

Учитывая это, границы достоверных результатов ищем экспериментально, анализируя данные для $L \leqslant 160$.

Для получения аналитического описания закономерностей аппроксимируем одномерные эмпирические функции. Качество, точность аппроксимации характеризует квадрат коэффициента корреляции эмпирической и аппроксимирующей функции, r^2. Значения параметров, полученных аппроксимацией, для аккуратности приводим без округления, хотя, как мы отмечали (Златопольский, 2024б), округление может быть нужным. Аппроксимация рассчитывается для некоторого указанного диапазона значений L. Вероятно, полученные зависимости справедливы и для больших значений L.

Степень сходства группы значений измеряем показателем разброса — отношением среднеквадратичного отклонения (СКО) к среднему арифметическому по группе.

Матрица впадений

Рассмотрим два фрагмента матрицы впадений *табл. 1* и *2*. Для наглядности представлено число впадений, а не их частота. Все значения ниже диагонали нулевые, так как всегда $L2 > L1$. Значения на диагонали $I(L1, L1{+}1)$ самые большие в строке — это число пикселей, из которых сток продолжается в той же линии. Во всех остальных случаях идёт впадение в более длинную линию, отсюда и название — матрица впадений. Пока не отделяем ситуацию продолжения линии стока от «слияния» двух линий строго (!) одной длины. Такое слияние не в самых начальных участках стока (первые единицы длины) полагаем крайне редким.

Таблица 1. Пример матрицы впадений $I(L1, L2)S$
(значения разделены на 10^3)

$L1 \backslash L2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	24282,2	3374,8	1919,0	1232,70	979,15	782,43	626,06	528,150	455,700
1	0	14418,0	1208,8	735,50	502,63	400,06	323,74	264,560	227,860
2	0	0	9575,6	601,45	387,48	275,89	220,97	181,460	151,520
3	0	0	0	5513,00	249,23	167,99	124,59	101,700	86,012
4	0	0	0	0	4615,90	215,79	144,49	104,280	85,483
5	0	0	0	0	0	3600,60	140,18	97,387	72,144
6	0	0	0	0	0	0	2572,80	76,105	55,110
7	0	0	0	0	0	0	0	2145,400	62,677
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1765,300

Таблица 2. Пример матрицы впадений $I(L1, L2)S$

$L1 \backslash L2$	101	102	103	104	105	106	107	108	109
100	16704	0	3	6	3	0	2	3	2
101	0	16415	4	2	0	1	1	3	5
102	0	0	16115	6	1	7	1	0	5
103	0	0	0	15911	3	3	3	2	0
104	0	0	0	0	15542	3	2	1	2
105	0	0	0	0	0	15269	0	2	1
106	0	0	0	0	0	0	14872	4	3
107	0	0	0	0	0	0	0	14927	4
108	0	0	0	0	0	0	0	0	14553

Матрицу впадений анализируем с помощью аппроксимации одномерными функциями, когда меняется одно переменное, а другое фиксировано (например, в строке). Все результаты аппроксимации оказались степенными функциями вида $ML^{\exp}$. Примеры аппроксимации приведены в *табл. 3*. В её левом верхнем квадранте — аппроксимация матрицы вдоль столбцов, например, $L2 = 30$, а $L1 < L2$ меняется от 7 до 28. Не рассматриваем первые столбцы, так как они слишком короткие. Правый верхний квадрант — результаты аппроксимации вдоль диагоналей, например, $L1$ меняется от 10 до 80, а $L2 = L1{+}1$. В нижней половине таблицы даны результаты аппроксимации вдоль строк. Показываем отличие начальных участков, представляя результаты как для начала строки, так и для основной её части (например, $L2$ меняется от 2 до 12 и от 12 до 160). В начале строк показатели степени получаются, как правило, больше, а вот в начале столбцов и диагоналей они существенно меньше, чем в основной части.

Таблица 3. Примеры одномерной аппроксимации участков матрицы впадений $I(L1, L2)$

По столбцу, меняется $L1$					По диагонали, меняется $L1$, $L2 = L1+q$				
$L1$	$L2$	M	exp	r^2	$L1$	q	M	exp	r^2
7–28	30	0,0022	–1,94	0,9958	10–80	1	0,962	–1,9266	0,999
9–48	50	0,0019	–2,23	0,9864	10–80	3	3,310	–4,1000	0,992
9–76	100	0,0010	–2,41	0,9642	10–80	10	0,382	–3,6413	0,988
По началу строки, меняется $L2$					По строке, меняется $L2$				
$L1$	$L2$	M	exp	r^2	$L1$	$L2$	M	exp	r^2
0	2–12	0,1229	–1,6074	0,9661	0	12–160	0,2153	–1,7496	0,9995
6	8–18	0,0317	–1,9239	0,9888	6	18–160	0,0269	–1,7866	0,9951
20	22–40	0,3756	–2,5455	0,9836	20	40–160	0,0014	–1,6321	0,9662

Эти примеры демонстрируют следующие свойства матрицы впадений. Основное — показатель степени при аппроксимации около 2 и для столбцов, и для строк, и для диагонали с $q = 1$. Данные диагонали с $q = 1$ не о впадении, а о продолжении линий стока. Показатель степени других диагоналей близок к сумме показателей для строк и столбцов, около 4. При $L > 50$ значения матрицы малы (при $L > 80$ появляются нулевые значения), а значит, меньше статистическая точность, эти значения всё больше отходят от аппроксимирующей кривой и качество аппроксимации падает.

Рассмотрим две функции. Упомянутая выше $Q(L)$ — частота пикселей с длиной стока L и $IN(L) = Q(L) - I(L.L + 1)$ — частота пикселей с длиной стока L, из которых идёт впадение, т.е. эти линии стока не продолжаются. У аппроксимации $Q(L)$ при L от 0 до 3 экспоненциальный характер переходит в степенной при L около 6. Аппроксимация при L от 10 до 160 даёт $Q = L^{-1,925}$, $IN = 2,27L^{-2,939}$ (при меньших значениях L показатель степени существенно меньше), и аппроксимация их отношения $IN/Q = 2/L$.

Разделив в $I(L1, L2)$ значения каждой строки, $L1$, на $Q(L1)$, получим распределение линий стока этой длины между продолжением стока (столбец $L1+1$) и впадением в линии разной длины $L2 > L1+1$, *табл. 4.* Например, у истоков, $L1 = 0$, впадение происходит в 40 % случаев (в 60 % — продолжение), впадает 20 % линий стока с $L1 = 8$ и только 2 % при $L1 = 100$.

Таблица 4. Начальный участок нормированной матрицы впадений $I(L1, L2)/Q(L1)$

$L1\backslash L2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,6034	0,0839	0,0477	0,0306	0,0243	0,0194	0,0156	0,0131	0,0113
1	0	0,6830	0,0573	0,0348	0,0238	0,0190	0,0153	0,0125	0,0108
2	0	0	0,7135	0,0448	0,0289	0,0206	0,0165	0,0135	0,0113
3	0	0	0	0,7411	0,0335	0,0226	0,0167	0,0137	0,0116
4	0	0	0	0	0,7452	0,0348	0,0233	0,0168	0,0138
5	0	0	0	0	0	0,7593	0,0296	0,0205	0,0152
6	0	0	0	0	0	0	0,7797	0,0231	0,0167
7	0	0	0	0	0	0	0	0,7855	0,0229
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7959

Коэффициент впадений

Попробуем из матрицы впадений получить аналог коэффициента Токунага, при том что масштаб мы определяем длиной водотока, а не номером порядка. Создадим условия, которые позволят сопоставить наш результат с измерениями коэффициента Токунага по порядкам. Разобьём систему линий стока на фрагменты — у всех точек фрагмента длина находится в заданном интервале значений. Используем последовательные мультипликативные интервалы размера F, начинающиеся с L_0: в интервале с номером $n \geqslant 1$ начальное значение длины $Ls(n) = L_0 F^{n-1}$, а конечное $Lf(n) = Ls(n+1) - 1$. Разбиению на порядки Хортона—Стралера соответствует $F = 2$ (Златопольский, 2024б).

Характеристики таких интервалов приведены в *табл. 5.* Для ориентировки дан порог площади водосбора, T, задающий порядок соответствующего масштаба. Несмотря на то, что с ростом номера интервала увеличивается его абсолютный размер, объём данных внутри интервала быстро падает, так как размер интервала растёт линейно, а количество пикселей впадения соответствующего масштаба квадратично уменьшается по каждой оси матрицы. Размер от первого интервала к последнему вырос в 16 раз, а населённость упала в 14 раз. Поэтому мы не уходим в область масштабов с большим L. При этом в анализ включена область малых (в пикселях) длин, рассматривается в четыре раза больше пикселей, чем их число в водотоках при $T = 100$. Но всё равно вне анализа остаётся 74 % территории, где длина стока ещё меньше. Там из-за дискретности измерения относительно очень мала точность измерения длины (за один шаг стока длина может вырасти в два раза).

Таблица 5. Последовательные интервалы длины линий стока порядкового размера, $F = 2$

n	1	2	3	4	5
Ls–Lf, пиксель	5–9	10–19	20–39	40–79	80–159
Часть пикселей с длиной Ls–Lf от всех, %	12,45	6,62	3,07	1,61	0,93
Часть пикселей с длиной больше Lf от всех, %	13,22	6,60	3,53	1,92	0,99
Порог T для порядка такого же масштаба, пиксель	9	25	100	400	1600

Рассчитываем коэффициент через отношение частот, что эквивалентно отношению числа событий. Частоту впадений линий стока с длиной из интервала номер n в линии с длиной из интервала номер m, $m > n$, обозначим $IIint(n, m)$ — это сумма всех значений матрицы $I(L1, L2)$ для $Ls(n) \le L1 \le Lf(n)$ и $Ls(m) \le L2 \le Lf(m)$. Число линий стока полной длины L — это число впадений из всех линий ровно этой длины, их частота $IN(L)$. Частоту линий стока с полной длиной в интервале от $Ls(n)$ до $Lf(n)$ обозначим $IIN(n)$. Не учитываем впадения в линии стока этого же интервала, т. е. в линии с длиной меньше $Lf(n)$, так что $IIN(n)$ — это сумма всех $I(L1, L2)$ при $Ls(n) \le L1 \le Lf(n)$, $L2 > L1+1$ и $L2 > Lf(n)$. Тогда аналог коэффициента Токунага, который назовём коэффициентом впадений, — это отношение $V = IIint(n, n+p) / IIN(n+p)$.

В *табл. 6* даны результаты расчёта коэффициента впадений для территории «Амур», включая его среднее значение для каждого p и шаг роста его значений с ростом p на 1, $V(p+1)/V(p)$. Поскольку мы перешли к переменной p, вид матрицы изменился: она осталась треугольной, но то, что в случае переменных $(L1, L2)$ было на диагоналях, перешло в столбцы. Как и у коэффициента Токунага, значения в столбце меняются мало. Аппроксимация средних значений столбцов даёт соотношение $V = 1{,}21 \cdot 2{,}21^{p-1}$. Как и у коэффициента Токунага, множитель соответствует среднему значению первого столбца, а основание степени — средней величине роста, здесь 2,35. При том, что анализируем совершенно иной материал, причём на нетрадиционных, крайне малых (в пикселях) масштабах, наш результат удивительно близок к приведённым выше экспериментальным данным других исследователей для коэффициента Токунага по другим территориям.

Таблица 6. Коэффициент впадений при $F = 2$

	$V(p)$				$V(p+1)/V(p)$		
$n\|p$	1	2	3	4	1	2	3
1	0,964783	2,358834	6,168256	11,87256	2,444939	2,614959	1,924784
2	1,277452	3,191026	7,162301		2,497961	2,244514	
3	1,181808	2,645306			2,238355		
Среднее	1,141348	2,731722	6,665278	11,87256			

Теперь рассмотрим дополнительные возможности, которых нет при опоре на порядки. Начнём с интервалов не порядкового размера. В *табл. 7* и *8* приведены результаты расчётов для интервалов с $F = \sqrt{2}$: 4–4, 5–6, 7–9, 10–13, 14–19, 20–27, 28–39, 40–55, 56–79, 80–111, 112–159. Пояснения к *табл. 8*: E и *Dif* — среднее значение и разброс данных столбца при n от 3 до 10; $Gr(p) = E(p)/E(p-1)$ — изменение среднего; C и a — параметры функций $V = aC^{p-1}$, полученных аппроксимацией данных в строке при p от 1 до 5 (выбран диапазон аппроксимации одинаковый для нескольких строк).

Таблица 7. Число впадений линий стока, *IIint*$(n, m)S$, интервалы размера $F = \sqrt{2}$

$n\|m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	215790	334258	229045	196929	149596	127625	93511	73398	48731	35336
2		440928	318731	262896	201465	173451	130953	107416	73406	53447
3			333316	241155	172315	147941	114712	96591	68464	51276
4				191073	117975	97052	75365	64928	48683	38795
5					94959	66492	49451	42885	33556	27727
6						44215	27956	23336	18140	15519
7							19861	15002	11290	9994
8								9663	6818	5878
9									5013	4067
10										2814

Таблица 8. Коэффициент впадений $V(p)$ для интервалов размера $F = \sqrt{2}$

$n\backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	a	C
1	0,116	0,241	0,297	0,460	0,766	1,285	2,002	2,803	3,720	4,608	0,128	1,56
2	0,318	0,414	0,614	1,031	1,746	2,803	4,102	5,603	6,969		0,287	1,54
3	0,433	0,564	0,882	1,489	2,456	3,688	5,226	6,686			0,392	1,56
4	0,446	0,604	0,977	1,613	2,479	3,716	5,059				0,418	1,55
5	0,486	0,669	1,059	1,638	2,561	3,615					0,463	1,53
6	0,445	0,598	0,891	1,385	2,024						0,425	1,47
7	0,425	0,573	0,862	1,303								
8	0,369	0,520	0,766									
9	0,383	0,530										
10	0,367											
E	0,419	0,580	0,906	1,486	2,380	3,673	5,142				0,448	1,56
Dif	0,102	0,087	0,111	0,097	0,102	0,014	0,023					
Gr		1,383	1,563	1,639	1,602	1,543	1,400					

При любом p, т. е. в каждом столбце наблюдаем следующее. Значения V при $n = 1$ существенно меньше остальных. Скорее всего, это уже зона дискретной неточности расчётов. И размер интервала там фактически получился 1,25, а не √2. При $n = 2$ значения V тоже меньше остальных, но не на столько. А при $n > 2$ значения V меняются мало, их разброс не превышает 0,11. А между столбцами отличие V существенно. Следовательно, значение коэффициента впадений зависит именно от разницы масштабов линий стока, p, а не от конкретного масштаба, n. Рост V при увеличении масштабной разницы примерно одинаков. В итоге у коэффициента впадений оказались те же свойства, что у коэффициента Токунага, независимо от размера интервалов.

Аппроксимация средних значений, E, при p от 1 до 7 даёт $V = 0{,}4 \cdot 1{,}545^{p-1}$. Параметры этого соотношения вполне уместны. По сравнению с интервалами размера $F = 2$ изменился шаг между начальными значениями интервалов, и почти во столько же раз изменился шаг в формуле (основание степени). Уменьшился размер интервалов и существенно уменьшилось a, которое соответствует среднему числу впадений в линии стока следующего интервала. Эксперименты с интервалами размера $F = 2^{0,75} = 1{,}68$ (длины 5–7, 8–13, 14–23, 24–39, 40–66, 67–112) дали формулу $V = 0{,}708 \cdot 1{,}947^{p-1}$.

Следующая возможность при расчёте коэффициента впадений — характеризовать масштаб не номером порядка или номером интервала, а физическим масштабным параметром, длиной линии стока. Отличие масштабов измеряем отношением этих длин, C_L, которое для интервалов будет отношением $Ls(n+p)$ — интервала, в который впадают, к $Ls(n)$ — интервала, который впадает, т. е. в нашем случае $C_L = F^p$. Для $F = 2$ из $C_L = 2^p$ и немного преобразованной приведённой выше формулы $V = 0{,}5475 \cdot 2{,}21^p$ получаем $V = 0{,}5475 C_L^{1,14}$, где показатель степени — это $\log_2 2{,}21$. (Аналогично для $F = \sqrt{2}$ имеем $V = 0{,}2874 C_L^{1,29}$, $\log_{1,4} 1{,}545 = 1{,}29$, а для $F = 2^{0,75}$ имеем $V = 0{,}364 C_L^{1,28}$, $\log_{1,68} 1{,}947 = 1{,}28$.) Такие же соотношения получаются аппроксимацией данных измерений $V(C_L)$. Но кроме «слабо степенного» уравнения (показатель около 1) возможна и линейная аппроксимация с тем же качеством:

при $F = 2$ $\quad V = 0{,}7688 C_L - 0{,}1632$, $r^2 = 0{,}991$ или $V = 0{,}5475 C_L^{1,1423}$, $r^2 = 0{,}9913$;
при $F = 2^{0,75}$ $\quad V = 0{,}7141 C_L - 0{,}5762$, $r^2 = 0{,}9983$ или $V = 0{,}3638 C_L^{1,2841}$, $r^2 = 0{,}9986$;
при $F = 2^{0,5}$ $\quad V = 0{,}4974 C_L - 0{,}4031$, $r^2 = 0{,}9977$ или $V = 0{,}2597 C_L^{1,2549}$, $r^2 = 0{,}997$.

Рассмотрим на примере, как понимать эти соотношения. Пусть принят размер интервалов $F = 2$, и интересуют фрагменты линий стока с длиной от истока 50–100 пикселей. В каждый такой фрагмент впадает в среднем 3,68 линии стока длиной от 10 до 20 пикселей, разница масштабов $C_L = 5$, $(0{,}7688 \cdot 5 - 0{,}1632 = 3{,}68)$, и 1,37 линии длиной от 25 до 50 пикселей, $C_L = 2$. Если измерять масштабные отношения с помощью C_L, нет необходимости задавать последовательности интервалов, достаточно тех двух, которые участвуют в измерении.

В дальнейшем исследовании будем уточнять тип зависимости и то, как её коэффициенты связаны с размером интервала. Изложенное в следующем разделе даёт надежду получить такое соотношение аналитически. Линейная форма зависимости кажется предпочтительной, она получилась бы и в наших выкладках, если бы основания степени при аппроксимации $V(p)$ были бы точно равны F.

Равномерное распределение притоков и структура матрицы впадений

Проверим, выполняется ли в матрице впадений наша гипотеза о равномерном распределении притоков: водотоки одного масштаба распределяются между водотоками больших масштабов пропорционально суммарной длине водотоков каждого из этих масштабов. В наших измерениях аналогом суммарной длины масштабного уровня L служит $Q(L)$, а для интервала длин — сумма всех значений $Q(L)$ при $Ls(m) \le L \le Lf(m)$, обозначим её $QQ(m)$. Аппроксимация $QQ(m)$ показывает уменьшение значений с увеличением m пропорционально $Ls(m)$. Число впадений из интервала длин n в интервал длин m также падает по мере роста m (см. $IIint(n, m)S$ в *табл.* 7). Если наша гипотеза верна, то отношение $IIint(n, m)/QQ(m)$ не должно меняться при изменении m. Рассмотрим это отношение для более многочисленных интервалов размером $F = \sqrt{2}$.

Предположение подтвердилось (*табл. 9*). Разброс значений внутри строки (т.е. для интервала, откуда идёт впадение) не велик: с увеличением n разброс монотонно растёт от 0,08 до 0,14 при $n = 4$, а дальше монотонно падает до 0,04 (возможно потому, что значений в строке становится меньше). Таким образом, статистически установлена пропорциональность между числом впадений и суммарной длиной. Остаётся вероятность того, что обе величины обратно пропорциональны L (масштабу) независимо друг от друга.

Таблица 9. Относительное число впадений, $IIint(n, m)/QQ(m)$, интервалы размера $F = \sqrt{2}$

$n \vert m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,0268	0,0494	0,0500	0,0598	0,0716	0,0817	0,0866	0,0856	0,0805	0,0729
2		0,0652	0,0695	0,0798	0,0965	0,1110	0,1213	0,1252	0,1212	0,1103
3			0,0727	0,0732	0,0825	0,0947	0,1063	0,1126	0,1131	0,1058
4				0,0580	0,0565	0,0621	0,0698	0,0757	0,0804	0,0800
5					0,0455	0,0426	0,0458	0,0500	0,0554	0,0572
6						0,0283	0,0259	0,0272	0,0300	0,0320
7							0,0184	0,0175	0,0186	0,0206
8								0,0113	0,0113	0,0121
9									0,0083	0,0084
10										0,0058

Таблица 10. Число впадений, нормированное по обеим осям, интервалы размера $F = \sqrt{2}$

$n \vert m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,5153	0,9489	0,9594	1,1474	1,3756	1,5689	1,6633	1,6431	1,5452	1,3997
2		0,9642	1,0283	1,1798	1,4269	1,6424	1,7941	1,8522	1,7928	1,6307
3			1,2785	1,2866	1,4510	1,6654	1,8684	1,9801	1,9879	1,8599
4				1,5041	1,4657	1,6120	1,8112	1,9639	2,0857	2,0763
5					1,641	1,5362	1,6531	1,8042	1,9996	2,0641
6						1,6122	1,4749	1,5495	1,7061	1,8233
7							1,4008	1,3317	1,4195	1,5698
8								1,2411	1,2404	1,3359
9									1,1478	1,1633
10										1,1401

Среднее значение по строке в *табл. 9*, начиная с $n = 2$, падает от 0,11 до 0,0058, т.е. примерно в 1,4 раза от строки к строке. Возможно, дело в уменьшении суммарного числа пикселей в интервале n, из которого идёт впадение, т.е. среднее меняется пропорционально $QQ(n)$. Разделим рассматриваемое отношение ещё и на $QQ(n)$ (*табл. 10*). Действительно, среднее по строке для $IIint(n,m)/\big(QQ(m)QQ(n)\big)$ мало меняется вокруг 1,52, разброс 0,22. А значит $IIint(n, m)$ можно представить как $1{,}52QQ(m)QQ(n)$.

Проверим, возможно, подобное соотношение имеет место и непосредственно для матрицы впадений, без группирования линий в интервалы. Аналогичным образом нормируем матрицу по обеим осям $I(L1, L2)/\big(Q(L1)Q(L2)\big)$, первые строки и столбцы результата в *табл. 11*. Если не учитывать первую диагональ, где фиксируется не впадение, а продолжение линий стока, то значения существенно выровнялись (ср. с *табл. 4*). В *табл. 12* приведены статистические данные для нескольких строк, $L1$, при $L1 < L2 < 160$. Среднее значение строк меняется очень мало, 1,2–1,75, хотя СКО и разброс существенно растут при больших $L1$, когда значения матрицы малы.

Таблица 11. Начальный участок матрицы впадений, нормированной по обеим осям

$L1/L2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	3,367	0,736	0,755	0,5825	0,6044	0,6940	0,6709	0,697	0,735	0,798	0,8283
1		5,995	0,907	0,6626	0,5915	0,6765	0,6614	0,6656	0,701	0,764	0,7982
2			11,300	0,8522	0,7172	0,7338	0,7100	0,7181	0,733	0,797	0,8339
3				14,092	0,8321	0,8060	0,7222	0,726	0,750	0,793	0,8415
4					18,511	1,2435	1,0059	0,8941	0,896	0,922	0,9222
5						27,103	1,2748	1,0907	0,987	1,002	0,9935
6							33,622	1,2248	1,084	1,043	1,0189
7								41,713	1,489	1,343	1,2183

Таблица 12. Статистика строк матрицы впадений, нормированной по обеим осям

$L1$	0	1	2	3	4	5	6	7	20	40	80
Максимум	1,504	1,373	1,492	1,700	1,685	1,871	2,012	2,010	2,825	2,850	3,252
Минимум	0,583	0,592	0,710	0,722	0,894	0,987	1,011	1,168	1,222	0,615	0,271
Среднее	1,298	1,191	1,277	1,460	1,457	1,597	1,714	1,755	1,756	1,332	1,278
СКО	0,185	0,151	0,174	0,209	0,178	0,199	0,218	0,196	0,253	0,350	0,658
Разброс	0,142	0,126	0,136	0,143	0,122	0,124	0,127	0,112	0,144	0,263	0,515

То, что мы получили, ещё не конечный результат, но ясное указание на направление дальнейшего изучения структуры матрицы впадений. Возможно, $I(L1, L2)$ приблизительно равняется $Q(L1)Q(L2)$ с некоторым множителем (допустим 1,6, судя по среднему в *табл. 12*). А это, в частности, показывает, что распределение впадений по масштабам соответственно суммарной длине выполняется и для отдельных значений длины, без группировки данных в интервалы. Не исключено также, что $I = 1{,}6\big/(L1 \cdot L2)^{1{,}925}$ на том участке матрицы, где $Q(L)$ хорошо аппроксимируется как $L^{-1{,}925}$.

Заключение

Предложена методика построения и анализа нового описания свойств рельефа — матрицы впадений. В ней фиксируются продолжения линий стока и их впадения в более длинные линии. Это аналог матрицы Токунага на гораздо более детальном уровне. Из-за детальности населённость матрицы впадений очень быстро падает с ростом длины линий стока, так что непосредственно матрицу мы анализировали для линий длиной до сотни пикселей, а кроме того, агрегировали данные для анализа участков матрицы, например, рассматривали группы линий с длиной в заданном интервале значений. Особенности матрицы представили как непосредственно примерами, так и с помощью одномерной аппроксимации по столбцам, строкам и диагоналям. Во всех случаях функции оказались однородными степенными. Получили свидетельство о том, что и в целом, в двумерном виде, матрица может описываться квадратичной степенной функцией. Такой тип зависимостей свидетельствует о масштабной инвариантности.

Предложен аналог коэффициента Токунага — коэффициент впадений. Для его расчёта диапазон значений длины линий стока разбивали на последовательные интервалы и вычисляли отношение числа линий стока с длиной из интервала n, впадающих в линии длиной из интервала m, к числу линий стока с длиной из интервала m. Коэффициент впадений считали при разных размерах интервалов. Когда этот размер соответствует порядковому, коэффициенты Токунага и впадений очень близки. Оба коэффициента демонстрируют масштабную инвариантность структуры стока, так как зависят только от масштабной разницы между интервалами m и n, а не от самих масштабов. Масштабную разницу для коэффициента впадений можно задавать и через отношение длины линий стока, зависимость получается близкой к линейной либо к степенной с показателем около 1. В дальнейшем рассмотрим, какой из этих вариантов точнее.

Гипотеза о равномерном впадении водотоков в бóльшие, ранее предложенная нами для водотоков, разбитых на порядки, подтверждается и при группировании линий стока по интервалам, и непосредственно в матрице впадений. Принцип равномерного впадения как бы передаёт масштабную инвариантность от однородного степенного закона о плотности линий стока определённой длины, $Q(L)$, в матрицу впадений в целом.

Предстоит продолжить эти исследования, проверить результаты на других территориях, а также сопоставить все найденные нами и здесь, и ранее зависимости характеристик рельефа от масштаба, который задаётся длиной водотоков.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Мониторинг», госрегистрация № 122042500031-8).

Литература

1. *Златопольский А. А.* (2024а) Масштабная статистика рельефа — порядки, диапазоны, распределение притоков, ориентация, возраст, инвариантность // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2024. Т. 21. № 2. С. 103–121. DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-2-103-121.
2. *Златопольский А. А.* (2024б) Статистические масштабные закономерности характеристик рельефа (по растрам модели стока) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2024. Т. 21. № 6. С. 159–167. DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-6-159-167.
3. *Чернова И. Ю.*, *Нугманов И. И.*, *Даутов А. Н.* Применение аналитических функций ГИС для усовершенствования и развития структурно-морфологических методов изучения неотектоники // Геоинформатика. 2010. № 4. С. 9–23.
4. *Wang K.*, *Zhang L.*, *Li T. et al.* Side tributary distribution of quasi-uniform iterative binary tree networks for river networks // Frontiers in Environmental Science. 2022. V. 9. Article 792289. DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.

Tributary distribution statistics — the inflow matrix (analogue of Tokunaga matrix)

A. A. Zlatopolsky

Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia
E-mail: aazlat@gmail.com

A new method for describing relief properties is proposed — the inflow matrix. It records the number of flows from inflow lines of one length to inflow lines of another length. This is an analogue of the Tokunaga matrix, but much more detailed. The inflow matrix is calculated from rasters that are created by a standard GIS (geographical information system) runoff model based on the DEM (digital elevation model). There is no need to identify watercourses and divide them into orders. Experimental calculations were carried out on the DEM of a section of the Far East. The description of the matrix through one-dimensional functions has the form of homogeneous power dependencies. A basis is obtained for assuming that the inflow matrix is described by a two-dimensional quadratic power function. This type of dependencies indicates scale invariance. An algorithm for calculating the inflow coefficient based on the matrix (an analogue of the Tokunaga coefficient) is proposed. To calculate it, the flow lines are divided into sections with a length value in the specified intervals. Like the Tokunaga coefficient, the inflow coefficient demonstrates the scale invariance of runoff characteristics, since it is determined only by the difference in the scales of the main flow lines and tributaries. If the size of the intervals is close to ordinal, then the formulas for these coefficients are almost the same. The difference in scales can be measured by the ratio of the lengths of the main flow lines and tributaries. The dependence of the coefficient value on this ratio is close to linear or to a power law with an exponent of about 1. For the inflow matrix, the previously proposed hypothesis of uniform inflow is confirmed: watercourses of the same scale, when flowing, are distributed between watercourses of larger scales proportionally to the total length of watercourses of larger scales.

Keywords: DEM, GIS, flow line length, flow line inflow, statistical characteristics of watercourses, Tokunaga matrix, Tokunaga coefficient, scale invariance

Accepted: 17.02.2025
DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-2-71-81

References

1. Zlatopolsky A. A. (2024a), Scale terrain statistics — orders, ranges, tributary distribution, orientation, age, scaling, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2024, V. 21, No. 2, pp. 103–121 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-2-103-121.
2. Zlatopolsky A. A. (2024b), Statistical scale relationships of relief characteristics (based on runoff model rasters), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2024, V. 21, No. 6, pp. 159–167 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-6-159-167.
3. Chernova I. Yu., Nugmanov I. I., Dautov A. N., Application of GIS analytic functions for improvement and development of the structural morphological methods of the neotectonics studies, *Geoinformatica*, 2010, No. 4, pp. 9–23 (in Russian).
4. Wang K., Zhang L., Li T. et al., Side tributary distribution of quasi-uniform iterative binary tree networks for river networks, *Frontiers in Environmental Science*, 2022, V. 9, Article 792289, DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.