

Статистические закономерности длины линий стока (основа расчёта гидрологических характеристик рельефа)

А. А. Златопольский

Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия

E-mail: aazlat@gmail.com

Формулы, описывающие статистические закономерности распределения длины линий стока L , позволяют рассчитать ряд основных гидрологических характеристик рельефа. В статье рассматриваем, насколько предложенные формулы совпадают с экспериментальными измерениями не в среднем, а при детальном сопоставлении. Вне сравнения остались участки функций больших длин, где мала статистика, и участки самых малых длин, где на результатах эксперимента существенно сказывается дискретность измерения и детали процесса моделирования стока. На четырёх территориях найденная ранее степенная аппроксимация частотной функции длин $H(L)$ хорошо совпадает с экспериментальными функциями. Двумерная частотная функция, которую мы назвали матрицей впадений, а точнее её основная часть, отражающая впадение одних линий стока в другие, близка к произведению частотных функций $H(L_1) \cdot H(L_2)$. Это подтверждает гипотезу о «равномерном впадении»: линии стока длины L_1 впадают в линии большей длины L_2 пропорционально частоте линий стока этой длины $H(L_2)$. Предложена двумерная степенная функция, которая лучше совпадёт с экспериментально полученными матрицами четырёх территорий. Из этой функции выведен аналог коэффициента Токунага, характеризующий распределение притоков. Эта формула очень близка к формуле, экспериментально найденной другими авторами для водотоков, разбитых на порядки. Рассмотренные в этой работе формулы масштабно инвариантны.

Ключевые слова: ЦМР, модель стока, частотная функция длины линий стока, впадение линий стока, статистические характеристики водотоков, матрица Токунага, матрица впадений

Одобрена к печати: 07.03.2025

DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-3-109-118

Введение

Больше полувека при исследовании гидрологических характеристик рельефа в качестве масштабного фактора используется порядок впадения водотоков. С помощью системы порядков удалось найти ряд закономерностей: отношения Хортон (Хортон, 1948), матрицу впадения притоков и коэффициент Токунага (Tokunaga, 1984). Поскольку правила определения порядка (в частности, задание масштаба первого порядка) субъективны, удавалось найти только относительные зависимости — «скорость» изменения характеристик водотоков.

Моделирование стока в ГИС (геоинформационные системы), опирающееся на ЦМР (цифровая модель рельефа), порождает для каждой точки территории ряд параметров (растры данных), которые позволяют описать гидрологические свойства рельефа, не используя субъективное значение порядка. Если масштаб определять длиной линии стока, то и отмеченные, и другие закономерности можно сформулировать в виде статистических законов (уравнений). Выбор между использованием в качестве масштабного фактора площади водосбора и длины линии стока (обе характеристики монотонно растут при увеличении расстояния от истока) сделан в пользу длины, так как эта характеристика непрерывна (нет скачков) и число пикселей с определённой длиной — монотонная, не возрастающая функция длины. Эти, казалось бы, отвлечённые математические особенности явно сказываются на результатах анализа.

Соотношения для линий стока, достигших определённой длины L , оказались масштабно инвариантными однородными степенными зависимостями (Златопольский, 2024б). В первую очередь, это частотная функция $H = 1,2/L^2$, где H — число линий длины L , отнесённое к площади суши территории в пикселях S . Второе фундаментальное соотношение фиксирует постоянство относительной суммарной площади водосбора этих линий $A(L) \cdot H(L) = 0,3$,

где A — средняя площадь водосбора линий стока этой длины. Из этих соотношений получаем аналог закона Хака $A = 0,25 \cdot L^2$. Как и требуется в физических законах, совпадает размерность левой и правой части уравнений. В работе (Златопольский, 2024а) мы показали, как из этих соотношений выводятся уравнения для привычных характеристик участков водотоков, близких к порядковым, — их число, длина, средняя площадь водосбора и плотность. Получающиеся при этом коэффициенты Хортона и параметры закона Хака мало отличаются от тех, что были получены ранее исследователями при анализе карт (см. обзор в публикации (Pelletier, 1999)).

Зависимости характеристик, которые мы обсуждаем, масштабно инвариантны, т.е. нет «истинного начала отсчёта», «истинного первого порядка». Так что главная причина использования порядков — привычка. Выражение «водотоки третьего порядка» — это привычно, хотя и неизвестно, что это конкретно (как определены система порядков и первый порядок). А вот участки водотоков с расстоянием от истока 10–20 км — это непривычно, хотя и совершенно определённо, и даже определены их средняя площадь водосбора — 100 км^2 и плотность — 75 м/км^2 . А каковы эти характеристики у водотоков третьего порядка сказать нельзя.

Задача этой статьи — детально рассмотреть сходство уравнения частотной функции с экспериментальными функциями разных территорий. Вторая задача — проделать аналогичную работу для двумерного варианта этой функции, аналога матрицы Токунага, которую мы назвали матрицей впадения. Матрица показывает распределение впадения линий стока определённой длины в более длинные. В частности, матрица демонстрирует принцип равномерного распределения притоков и даёт возможность вычислить характеристику, аналогичную коэффициенту Токунага.

Исходные данные и методика расчёта частотных функций

Статистические закономерности, которые мы обсуждаем, выполняются в среднем на достаточно большой выборке. Поэтому исследования проводим на больших территориях, около $500\,000 \text{ км}^2$ (включающих части нескольких бассейнов), и анализируем не самые крупные элементы рельефа, а те, которых статистически достаточно много. Работаем с флювиальным рельефом, так как на больших территориях не флювиального типа и плохо работает модель стока, и рельеф недостаточно выражен, что не даёт надёжных результатов.

Используем достаточно качественную и доступную для многих территорий модель рельефа SRTM (*англ.* Shuttle Radar Topographic Mission) в проекции UTM (*англ.* Universal Transverse Mercator). Экспериментальная проверка показала, что наши результаты сохраняются и при использовании равновеликой конической проекции Альберса (Златопольский, 2024б). Для краткости территориям даны условные названия: «Амур» — от горной системы Сихотэ-Алинь до реки Буреи; «Кама» — Татарстан и вокруг; «Пара» — юго-восток бассейна Амазонки; «РП» — Русская платформа, *табл.* 1. Основной для нас была территория Амур, а по остальным проверяли устойчивость полученных результатов.

Таблица 1. Территории, ЦМР которых использовались для экспериментальных расчётов

Название	Координаты		Размер		Разрешение, км/пиксель	Площадь суши	
			км	пиксель		км ²	пиксель
Амур	47,15–53,50° с. ш.	130,66–140,11° в. д.	717,50×719,40	11033×11004	0,0651	502 663	118 977 538
Кама	52–58° с. ш.	48–57° в. д.	617,70×683,40	9488×10498	0,0651	412 885	97 424 163
Пара	3–10° ю. ш.	48–54° з. д.	667,08×775,29	10245×11907	0,0651	510 418	121 608 897
РП	49,5–59,5° с. ш.	34–55° в. д.	1519,18×1164,28	11686×8956	0,1300	1 753 437	103 753 670

Используем алгоритм моделирования стока в восьми направлениях (D8), описанный, например, в работе (Чернова и др., 2010). На первых шагах алгоритма для каждого пикселя определяется: из какого числа пикселей в него приходит сток (растр стока), расстояние от истока самой длинной из линий стока, проходящих через пиксель (растр длин), и в какой соседний пиксель происходит сток (растр направлений). Из этих растров получаем зависимости характеристик рельефа в табличном виде и аппроксимируем их. Сходство аппроксимирующей функции с экспериментальной оценивается квадратом коэффициента их корреляции r^2 . Чтобы не возникало путаницы, добавляем к обозначениям функций верхние индексы: ex — к табличным функциям и ap — к функциям, полученным аппроксимацией. Ради аккуратности приводим получающиеся при аппроксимации показатели степени и множители без округления, а в аналитических выкладках используем округлённые значения.

Для того чтобы получить площадь водосбора A , к данным раstra стока нужно прибавить 1 (площадь самого пикселя). Расстояние от истока ГИС выдаёт в метрических единицах. Увеличение длины при стоке по диагонали учитывается. Мы пересчитываем расстояние в пиксели, что удобнее вычислительно (последовательный ряд целых значений), и не теряется из виду дискретный характер измерений. Исправляя неточность наших предыдущих публикаций, полагаем длину линии стока L на 1 больше, чем расстояние до истока (расстояние от истока первого пикселя линии 0, а его длина 1). Все соотношения приводим в пикселях, пересчитать в метрические значения не сложно (Златопольский, 2024б).

Из раstra длин находим частотную функцию $H^{ex}(L)$ и её аппроксимацию $H^{ap}(L)$. Из этого же раstra рассчитываем двумерную частотную функцию $I^{ex}(L_1, L_2)$ — как часто встречаются пиксели с длиной линии L_1 и со стоком в пиксель с длиной линии L_2 . Если какие-то ситуации, какие-то значения длины встречаются редко (единицы раз), то будем говорить, что соответствующая часть частотной функции «мало населена» и точность статистической оценки там мала.

Разброс значений выборки будем измерять отношением среднеквадратичного отклонения к среднему по выборке (в %).

Чтобы в дальнейшем изложении было проще ориентироваться, соотнося масштаб с привычным описанием через порядок Хортона–Стралера, отметим, что порогу по площади водосбора первого порядка A соответствует порог по длине $L = 2\sqrt{A}$ и что от порядка к порядку A растёт примерно в четыре раза, а L — в два (как $\sqrt{A}$).

Частотная функция длины

Начнём с частотной функции $H(L)$, из которой, как отмечали, можно вывести основные гидрологические характеристики. Она хорошо аппроксимируется степенной функцией. Аппроксимируем в диапазоне значений L от 5 до 2000 (этот диапазон аналогичен почти девяти порядкам, его выбор пояснён ниже). На территории Амур получаем $H^{ap}(L) = 0,985L^{-1,925}$ с $r^2 = 0,9982$, а в среднем по четырём территориям — $H^{ap}(L) = L^{-1,94}$ со средним показателем качества $r^2 = 0,9985$, разброс значений показателя степени 1 %, а множителя 9 %. Квадрат коэффициента корреляции r^2 оценивает качество аппроксимации в среднем, а мы постараемся сопоставить функции детальнее. Чтобы визуальное оценить сходство двух быстро падающих функций, рассматриваем их отношение: где и насколько H^{ex}/H^{ap} отличается от 1 (рис. 1а, см. с. 112).

Первое, что нужно отметить, — отклонение отношения от 1 в основном меньше 0,2, что достаточно хорошо для функций, значения которых меняются в этом диапазоне в миллион раз. Второе очевидное обстоятельство — постоянный рост величины флуктуаций вокруг плавно меняющегося локального среднего значения. При росте L значения частотной функции существенно уменьшаются и флуктуации экспериментальных дискретных значений на несколько единиц становятся относительно всё более существенными. Мала и населённость этих участков функции, поэтому мы ограничили диапазон расчёта аппроксимации значением $L = 2000$. Скорее всего, степенная закономерность сохраняется и при больших L , но мы

не можем это аккуратно зафиксировать. Данное ограничение чисто техническое: если взять бóльшую (в пикселях) территорию, то и верхнюю границу участка анализа можно увеличить соответственно. Это обстоятельство одинаково на всех территориях, нет смысла демонстрировать другие примеры.

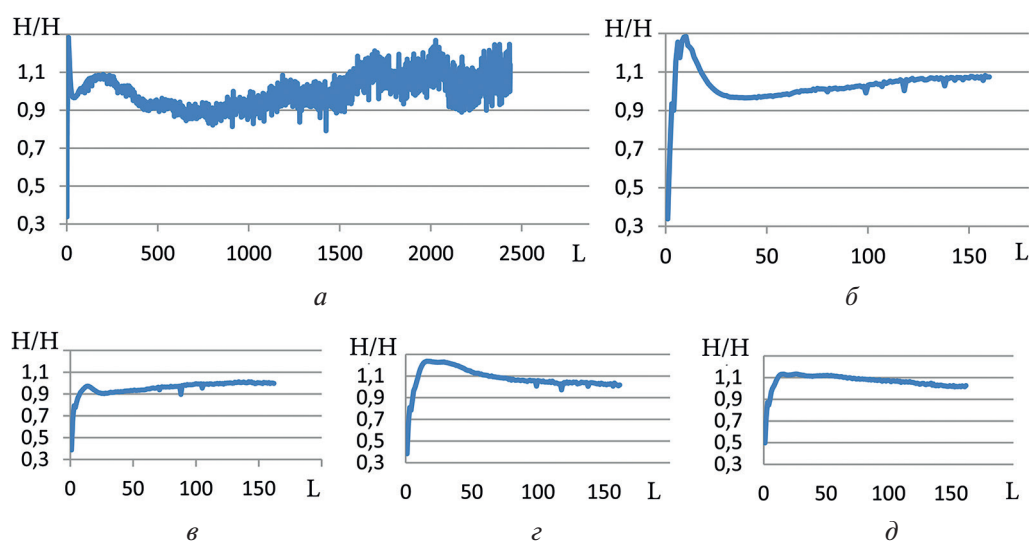


Рис. 1. Зависимость отношения H^{ex}/H^{ap} (безразмерное) от L (в пикселях) для разных территорий: а, б — Амур; в — Пара; г — Кама; д — РП

Сложнее ситуация при малых L (см. рис. 1б–д). Везде есть короткое, но сильное расхождение функций на самом начальном участке. На трёх исследованных территориях из четырёх отличие больше чем на 20 % только при $L < 3$, но эти значения L присутствуют на большей части территории, так что стоит разобраться. Это не особенности рельефа определённого масштаба. Если изменить разрешение, то конкретное положение пикселей с $L < 3$ как-то изменится, но вид частотной функции останется такой же, и падение отношения сохранится. Поскольку расхождение в начале — повсеместная особенность, установлена нижняя граница диапазона аппроксимации, $L = 5$.

В дальнейшем постараемся разобраться с этой ситуацией в начале стока. Не исключены особенности свойств рельефа в таких местах, но сильнее всего, несомненно, сказывается дискретность. При начальных значениях L степенная функция меняется особенно быстро и изменение L на единицу может изменить L в два раза, а $H(L)$ — в четыре раза. Возможно, нужно уточнить предложенную функцию, а возможно — способ измерения длины, например, длину первого пикселя. Кроме того, могут сказываться особенности дискретного алгоритма моделирования стока и конкретно алгоритма D8, когда весь сток идёт в одну соседнюю ячейку. Отмечалось, что D8 даёт хорошие результаты в области дренажной сети, но не совсем адекватен на начальных шагах стока (Энтин и др., 2017).

Следующая особенность начального участка — экспериментальная частотная функция превышает степенную функцию при L от 10 до 20 («горб»). Отклонение не сильное, оно вписывается в повсеместное плавное изменение отношения (см. рис. 1а) и происходит несколько различно у разных территорий (см. рис. 1б–д). Эта особенность проявится и в матрице впаждений.

Таким образом, на разных территориях, в зоне достаточной выборки и вне существенного влияния дискретности, представленные аппроксимирующие степенные функции хорошо описывают экспериментальную частотную функцию раstra длин.

Матрица впадений

Матрицей впадений называем двумерную частотную функцию $I(L_1, L_2)$: число случаев стока из пикселя с длиной стока L_1 в пиксель с длиной L_2 , делённое на число пикселей суши, для которых установлено направление стока (и которые не находятся на краю раstra, где направление стока несколько условно). Это аналог матрицы Токунага, когда масштаб водотока определяется не номером его порядка, а его длиной, и анализируются не длинные участки водотоков, а отдельные пиксели. Матрица впадений треугольная, $I(L_1, L_2) = 0$ при $L_2 \leq L_1$. Значения $I(L_1, L_1 + 1)$ существенно отличаются от всех остальных, так как относятся к продолжению линии стока, а не к впадению одной линии стока в другую. (Пока не отделяем ситуацию продолжения линии стока от слияния двух линий строго (!) одной длины, что, полагаем, может случаться в начале стока, но далее — крайне редко.)

Проверим на разных территориях предположение о том, что основная часть матрицы впадений (где $L_2 > L_1 + 1$) достаточно хорошо описывается произведением $H(L_1) \cdot H(L_2)$ (Златопольский, 2025), а значит, близкой может оказаться формула, полученная из аппроксимации $H(L)$: $I(L_1, L_2) = 2,35(L_1 \cdot L_2)^{-2}$. В ней использован округлённый показатель степени -2 и в соответствии с ним подобран множитель. Аккуратное определение этих параметров отложим на дальнейшее исследование.

Населённость двумерной функции падает гораздо быстрее, чем у $H(L)$, и при $L_1 \cdot L_2 > 2500$ появляются не только маленькие, но и нулевые значения матрицы. Поэтому рассматриваем только часть матрицы с $L_1 < 160$ и $L_2 < 160$, учитывая, что при $L > 50$ нужно ожидать относительно большие флуктуации значений матрицы. Этот диапазон существенно меньше, чем использованный для анализа $H(L)$, но он и не совсем мал — это диапазон в 3–4 порядка.

Поступим так же, как и прежде, — рассмотрим, насколько постоянно отношение $I^{ex}(L_1, L_2)/(H^{ex}(L_1) \cdot H^{ex}(L_2))$, $L_2 > L_1 + 1$. Возможно, для произведения H нужен небольшой множитель (предполагался 1,6), но пока мы проверяем только постоянство отношения этих функций. Первые эксперименты проведём с территорией Амур. Рассмотрим это отношение вдоль строки ($L_1 = \text{const}$) или столбца ($L_2 = \text{const}$). Столбец с $L_2 = 80$ довольно длинный, но ещё достаточно населённый, так что за флуктуациями можно рассмотреть среднюю линию отношения (рис. 2а). Кривая похожа на кривую $H^{ex}(L)/H^{ap}(L)$ (см. рис. 1б): горб при $L_1 < 30$, а потом флуктуации вокруг значения 1,25. В начале флуктуаций нет, так как обе функции ещё хорошо населены. На рис. 2б показано отношение в строке $L_1 = 25$. Линия начинается со спада от горба, а затем среднее медленно растёт, растут и флуктуации. Эта строка с повышенными значениями (по L_1 она из горба), но внутри неё сильных изменений относительно среднего нет.

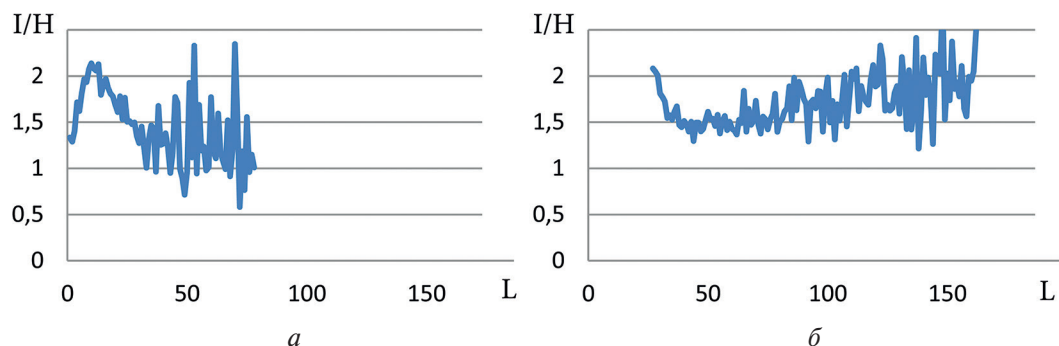


Рис. 2. Зависимость отношения $I^{ex}(L_1, L_2)/(H^{ex}(L_1)H^{ex}(L_2))$ (безразмерное) от L (в пикселях) для Амур: а — при $L_2 = 80$ и $L_1 = L$ от 1 до 78; б — при $L_1 = 25$ и $L_2 = L$ от 27 до 160

Для нас важно следующее. При том, что обе функции при L от 1 до 160 изменяются в 5500 раз, их отношение варьируется меньше, чем в два раза, нет большого отклонения от среднего и нет больших изменений среднего вдоль строк и столбцов, а значит, такое

среднее значение достаточно хорошо отражает ситуацию. Поэтому можно свести анализ отношения с двумя переменными к анализу двух функций с одним переменным — средних значений вдоль строк и столбцов. А это уже можно сделать визуально.

Начнём со средних значений строк, которые приведены на *рис. 3а*. Средние по строкам составляют «суперстолбец», и кривая похожа на кривую столбца. Отличие в том, что при расчёте средних значений суммируются все данные строки, и это уменьшает случайные флуктуации. Однако из-за того, что матрица треугольная, с ростом L строки становятся всё короче, вплоть до единственного значения, поэтому к концу флуктуации растут. В итоге средние значения отношения вдоль строк в основном около 1 без больших отклонений. Исключение, для которого пока нет объяснения, — горб в начале.

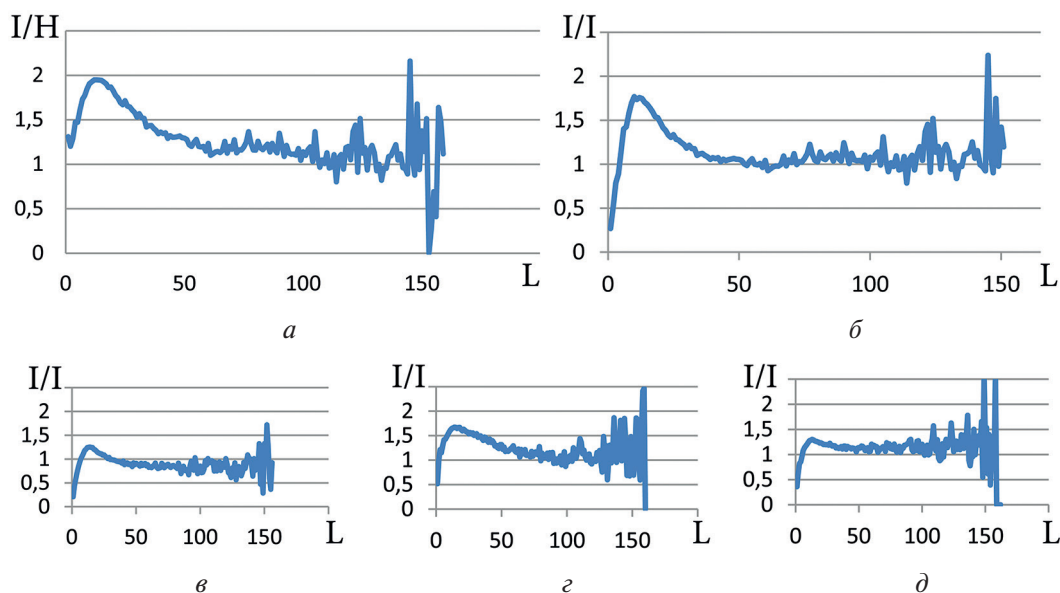


Рис. 3. Зависимость средних для строк значений отношения (безразмерное) от L (в пикселях) для разных территорий: *а* — отношение $I^{ex}/(H^{ex} \cdot H^{ex})$ для Амур; в остальных случаях — отношение I^{ex}/I : *б* — Амур; *в* — Пара; *г* — Кама; *д* — РП

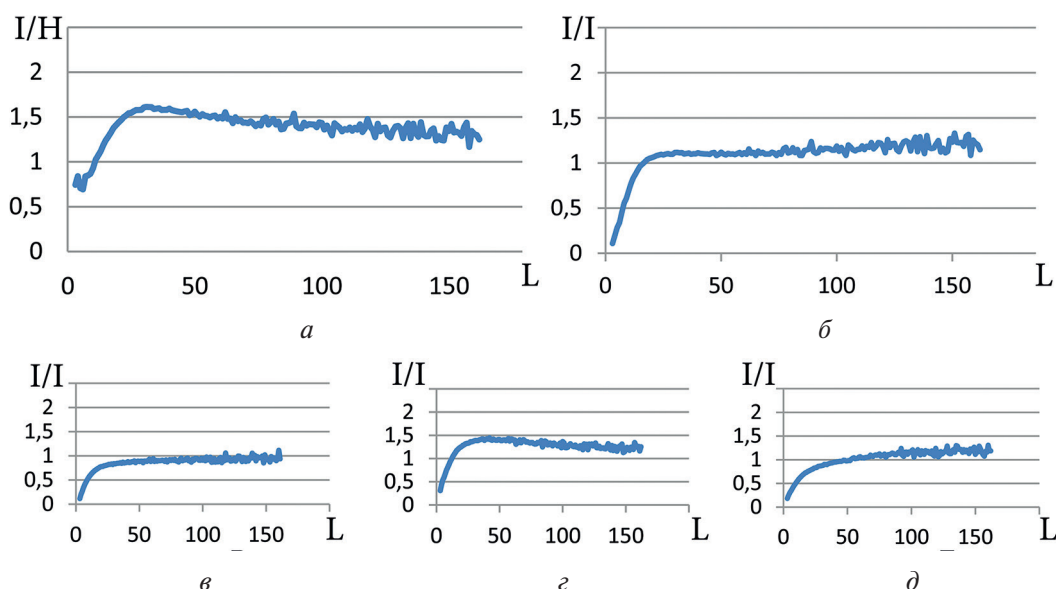


Рис. 4. Зависимость средних для столбцов значений отношения (безразмерное) от L (в пикселях) для разных территорий: *а* — отношение $I^{ex}/(H^{ex} \cdot H^{ex})$ для Амур; в остальных случаях — отношение I^{ex}/I : *б* — Амур; *в* — Пара; *г* — Кама; *д* — РП

Посмотрим, как изменится ситуация, если рассмотреть аналогичные средние по строкам для отношения $I^{ex}(L_1, L_2)/I(L_1, L_2)$ (см. рис. 3б). Если не считать ожидаемого резкого падения на первых двух значениях, формула $I(L_1, L_2)$ оказывается вполне пригодной, и даже горб с центром в $L_1 = 25$ немного ниже. На трёх остальных территориях (см. рис. 3в–д), всё аналогично, а горб ещё меньше. Ситуация с горбами на разных территориях здесь сходна с ситуацией у H^{ex}/H^{ap} (см. рис. 1).

Кривая для средних по столбцам (рис. 4а, см. с. 114) похожа на кривую $H^{ex}(L)/H^{ap}(L)$ (см. рис. 1) — понижение в начале, довольно высокий (1,6) горб при L около 30 и постепенное снижение к 1,3. Флуктуации небольшие, так как в начале высока населённость строк, а в конце много строк суммируется. Среднее по столбцам отношение $I^{ex}(L_1, L_2)/I(L_1, L_2)$ (см. рис. 4б) отличается только ожидаемым резким падением на первых двух значениях. А в остальном эта кривая существенно меньше отходит от 1, она около 1,1. На всех территориях (см. рис. 4б–д) всё примерно одинаково и горба почти нет.

Таким образом, формула $I(L_1, L_2) = 2,35(L_1 \cdot L_2)^{-2}$ довольно точно описывает экспериментальную функцию $I^{ex}(L_1, L_2)$. Хотя напомним, что в отдельных позициях с L_1 и $L_2 > 50$, где населённость очень мала, а значит, и экспериментальное значение статистически недостоверно, отличие может быть существенным (в разы).

Следствия из формального описания матрицы впадений

Покажем, как из полученного описания матрицы впадений можно найти особенности впадения линий стока, аналогичные тем, что зафиксированы для водотоков, разбитых на порядки.

Ранее была предложена и проверена гипотеза «равномерного впадения»: водотоки одного порядка распределяются между водотоками больших порядков пропорционально суммарной длине водотоков этих порядков (Златопольский, 2023). Если масштаб измерять длиной линии стока, то именно об этом свидетельствует выражение $H(L_1) \cdot H(L_2)$: впадение линий длины L_1 распределяется пропорционально частоте встречаемости принимающих участков длины L_2 , $H(L_2)$. Например, если линий длиной 35 в три раза больше, чем линий длиной 50, то и впадать в них будет в три раза больше линий длиной 20.

Выведем из $I(L_1, L_2)$ несколько характеристик распределения притоков. Найдём число линий стока, заканчивающихся на длине L_1 , $IN(L_1)$. Это число всех впадений линий стока длины L_1 , которое получим, интегрируя I по L_2 от $L_1 + 2$ до бесконечности: $IN(L_1) = 2,35L_1^{-2}/(L_1 + 2)$. Экспериментально эту зависимость находим как $IN(L) = H(L) - I(L, L + 1)$ и получаем очень близкий результат. На территории Амур для интервала L от 5 до 162 $IN^{ap}(L) = 3,1L^{-3}$ при $r^2 = 0,9982$. В среднем по четырём территориям $IN^{ap}(L) = 2L^{-2,9}$ со средним показателем качества $r^2 = 0,9983$, с разбросом значений степени 2,7 % и множителя 40 %. Далее будем использовать выражение с округлёнными параметрами $IN(L) = 2L^{-3}$.

Коэффициент Токунага для водотоков, разбитых на порядки, — это отношение числа водотоков порядка n , впадающих в водотоки порядка m , к числу водотоков порядка m . В работе (Wang et al., 2022) этот коэффициент представляется соотношением aC^{m-n} , и для разных бассейнов a около 0,58, а C около 2,24. Зависимость соотношения не от конкретных порядков n и m , а только от их разницы — свидетельство масштабной инвариантности.

Выведем аналогичный «коэффициент впадений» из матрицы впадений. Чтобы разбить водотоки на участки аналогичные порядковым, зададим последовательность логарифмически равных (как у порядков) интервалов значений L , начинающихся от L_0 , и размером F (разбиению на порядки соответствия $F = 2$), интервал n начинается с $L_n = L_0 \cdot F^{n-1}$. Число линий стока с длиной из интервала n , впадающих в линии стока с длиной из интервала m , получим, интегрируя $I(L_1, L_2)$:

$$\int_{L_n}^{L_{n+1}} \int_{L_m}^{L_{m+1}} 2,35(L_1 \cdot L_2)^{-2} dL_1 dL_2 = 2,35 \left(\frac{1}{L_n} - \frac{1}{L_{n+1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{L_m} - \frac{1}{L_{m+1}} \right) = 2,35 \frac{(1 - 1/F)^2}{L_n L_m}.$$

Число линий стока с длиной из интервала m найдём, интегрируя $IN(L)$:

$$\int_{L_m}^{L_{m+1}} \frac{2}{L^3} dL = \frac{1-1/F^2}{L_m^2}.$$
 Разделив первое выражение на второе, получаем

$$2,35 \frac{F-1}{F+1} (L_m/L_n) = 2,35 \frac{F-1}{F+1} F^{m-n}.$$
 При $F=2$ это $0,776 \times 2^{m-n}$, что близко к приведённому выше экспериментальному соотношению для коэффициента Токунага (по порядкам).

Выводы

Статья посвящена формальному описанию частотных функций раstra длин. Нас интересовало, насколько хорошо формулы совпадают с экспериментальными измерениями не в среднем, а при более детальном сопоставлении. Несопоставима малонаселённая часть функций при больших длинах, где экспериментальный результат неустойчив. Также особая ситуация при самых малых длинах, где на результатах эксперимента существенно сказываются детали процесса моделирования стока и дискретность измерения. Поэтому проверяли сходство основной, центральной части.

На всех четырёх территориях найденное ранее описание частотной функции длин $H(L)$ в виде степенной функции хорошо совпадёт с экспериментальной $H^{ex}(L)$. А из $H(L)$, как мы показали ранее, аналитически выводятся зависимости для числа и плотности участков водотоков и для их средней площади водосбора.

Для двумерной частотной функции, которую мы назвали матрицей впадений, а точнее для её основной части, которая отражает впадение одних линий стока в другие, справедливы два утверждения (на всех рассмотренных территориях). Эта часть матрицы хорошо описывается произведением $H^{ex}(L_1) \cdot H^{ex}(L_2)$, что прямо подтверждает гипотезу о равномерном впадении: линии стока длины L_1 впадают в линии большей длины L_2 пропорционально частоте линий стока этой длины $H(L_2)$. Второе, аналитическое описание $I(L_1, L_2) = 2,35(L_1 \cdot L_2)^{-2}$ даже лучше совпадёт с экспериментально полученными матрицами. Хотя в отдельных позициях, где из-за малой населённости экспериментальное значение недостоверно, отличие может быть существенным.

Из формулы $I(L_1, L_2)$ выводится функция числа линий стока, заканчивающихся на длине L_1 , $IN(L_1) = 2,35 L_1^{-2} / (L_1 + 2)$. Аппроксимация экспериментального измерения этой величины даёт довольно близкое соотношение.

Из $I(L_1, L_2)$ вывели аналог коэффициента Токунага для участков линий стока, разбитых на последовательные мультипликативные интервалы по длине (длина в конце интервала в F раз больше, чем в его начале). Среднее число линий из интервала номер n , впадающих в линию интервала m , равно $2,35 \frac{F-1}{F+1} F^{m-n}$. Размеру порядков соответствует $F=2$ и формула $0,776 \times 2^{m-n}$, что очень близко к формуле $0,58 \times 2,24^{m-n}$, экспериментально полученной другими авторами для водотоков, разбитых на порядки.

Аналитическое описание частотной функции $H(L)$ — масштабно инвариантная однородная степенная зависимость. Также инвариантен и полученный аналитически аналог коэффициента Токунага.

Остаются детали формального описания, в которых предстоит разобраться: особенности начального участка стока, локальные отличия экспериментальной кривой от формальной (в частности, описанный горб), уточнение множителей.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Мониторинг», госрегистрация № 122042500031-8).

Литература

1. Златопольский А. А. Константность площади суммарного водосбора водотоков одного масштаба и распределение этого водосбора между водосборами водотоков большего масштаба // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2023. Т. 20. № 5. С. 120–129. DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-5-120-129.
2. Златопольский А. А. (2024a) Масштабная статистика рельефа — линейный параметр масштаба, показатели Хортона, растровые характеристики // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2024. Т. 21. № 3. С. 84–93. DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-3-84-93.
3. Златопольский А. А. (2024b) Статистические масштабные закономерности характеристик рельефа (по растрам модели стока) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2024. Т. 21. № 6. С. 159–167. DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-6-159-167.
4. Златопольский А. А. Статистика распределения притоков — матрица впадений (аналог матрицы Токунага) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2025. Т. 22. № 2. С. 71–81. DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-2-71-81.
5. Хортон Р. Е. Эрозионное развитие рек и водосборных бассейнов. Гидрофизический подход к количественной морфологии: пер. с англ. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 159 с.
6. Чернова И. Ю., Нугманов И. И., Даутов А. Н. Применение аналитических функций ГИС для усовершенствования и развития структурно-морфологических методов изучения неотектоники // Геоинформатика. 2010. № 4. С. 9–23.
7. Энтин А. Л., Кошель С. М., Лурье И. К., Самсонов Т. Е. Морфометрический анализ цифровых моделей рельефа для оценки и картографирования распределения поверхностного стока // Вопросы географии. 2017. Т. 144. С. 169–186.
8. Pelletier J. D. Self-organization and scaling relationships of evolving river networks // J. Geophysical Research: Solid Earth. 1999. V. 104. Iss. B4. P. 7359–7375. <https://doi.org/10.1029/1998JB900110>.
9. Tokunaga E. Ordering of divide segments and law of divide segment numbers // Trans. Japanese Geomorphological Union. 1984. V. 5. No. 2. P. 71–77.
10. Wang K., Zhang L., Li T. et al. Side tributary distribution of quasi-uniform iterative binary tree networks for river networks // Frontiers in Environmental Science. 2022. V. 9. Article 792289. DOI: 10.3389/fev.2021.792289.

Statistical regularities of the length of runoff lines (the basis for calculating hydrological characteristics of the relief)

A. A. Zlatopolsky

*Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia
E-mail: aazlat@gmail.com*

Formulas describing statistical patterns of distribution of runoff line length, L , allow calculating a number of basic hydrological characteristics of the relief. In the article, we examine how much the proposed formulas match experimental measurements, not on average, but in a detailed comparison. The comparison leaves out sections of functions of large lengths, where statistics are small, and sections of the smallest lengths, where the discreteness of both the measurement and the runoff modeling process significantly affects the experimental results. In four territories, the previously found power approximation of the frequency function of lengths, $H(L)$, coincides well with the experimental ones. The two-dimensional frequency function, which we call the inflow matrix, or rather its main part, which reflects the inflow of some runoff lines into others, is close to the product of frequency functions $H(L_1) \cdot H(L_2)$. This confirms the hypothesis of “uniform inflow”: runoff lines of length L_1 flow into lines of greater length L_2 proportionally to the frequency of runoff lines of this length $H(L_2)$. A two-dimensional power function is proposed that better matches the experimentally obtained matrices of the four territories. An analogue of the Tokunaga coefficient, which characterizes the distribution of tributaries, is derived from this function. This formula is very close to the formula experimentally found by other authors for watercourses divided into orders. The formulas proposed in this work are scale-invariant.

Keywords: DEM, runoff model, frequency function of runoff line length, runoff line inflow, statistical characteristics of watercourses, Tokunaga matrix, inflow matrix

Accepted: 07.03.2025

DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-3-109-118

References

1. Zlatopolsky A.A., Constancy of the area of the total catchment of watercourses of the same scale and the distribution of this catchment between watercourses of a larger scale, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2023, V. 20, No. 5, pp. 120–129 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2023-20-5-120-129.
2. Zlatopolsky A.A. (2024a), Scale terrain statistics: Linear scale parameter, Horton exponents, raster characteristics, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2024, V. 21, No. 3, pp. 84–93 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-3-84-93.
3. Zlatopolsky A.A. (2024b), Statistical scale relationships of relief characteristics (based on runoff model rasters), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2024, V. 21, No. 6, pp. 159–167 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-6-159-167.
4. Zlatopolsky A.A., Tributary distribution statistics — the inflow matrix (analog of Tokunaga matrix), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2025, V. 22, No. 2, pp. 71–81 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-2-71-81.
5. Horton R.E., Erosional development of streams and their drainage basins. Hydrophysical approach to quantitative morphology, *Bul. Geological society of America*, 1945, V. 56, pp. 275–370.
6. Chernova I. Yu., Nugmanov I. I., Dautov A. N., Application of GIS analytic functions for improvement and development of the structural morphological methods of the neotectonics studies, *Geoinformatica*, 2010, No. 4, pp. 9–23 (in Russian).
7. Entin A. L., Koshel S. M., Lurie I. K., Samsonov T. E., Morphometric analysis of digital terrain models for assessing and mapping of the distribution of surface runoff, *Geography Issues*, 2017, V. 144, pp. 169–186 (in Russian).
8. Pelletier J.D., Self-organization and scaling relationships of evolving river networks, *J. Geophysical Research: Solid Earth*, 1999, V. 104, Iss. B4, pp. 7359–7375, <https://doi.org/10.1029/1998JB900110>.
9. Tokunaga E., Ordering of divide segments and law of divide segment numbers, *Trans. Japanese Geomorphological Union*, 1984, V. 5, No. 2, pp. 71–77.
10. Wang K., Zhang L., Li T. et al., Side tributary distribution of quasi-uniform iterative binary tree networks for river networks, *Frontiers in Environmental Science*, 2022, V. 9, Article 792289, DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.