

Мультимасштабный статистический анализ гидрологических характеристик рельефа (по растрам модели стока)

А. А. Златопольский

Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия

E-mail: aazlat@gmail.com

Обобщаем результаты нашего многолетнего экспериментального изучения гидрологических характеристик рельефа. Мы ищем закономерности, общие для разных территорий, в целом следуя подходу Хортон. Наше отличие в том, что масштаб водотока определяем не номером порядка его впадения, а его длиной L и работаем не с отрезками водотоков, а с растровыми данными для всех точек территории. Эти данные содержат результаты базовых гидрологических измерений, которые по цифровой модели рельефа (ЦМР) даёт модель стока D8. Анализируем территории, на которых это моделирование работает — рельеф флювиальный и достаточно выраженный. Наши базовые результаты — константность суммарной площади водосбора в точках стока с одинаковой L ; формула частоты точек стока с одинаковой L ; формула частоты впадения линий стока длины L_1 в точки стока с длиной L_2 (матрица впадений). Мы показали, как найденные зависимости соответствуют закону Хака, отношениям Хортон, матрице и коэффициенту Токунага, хотя те и получены совершенно иными методами и по иным данным. Найденные зависимости позволяют развить эти известные закономерности, в частности, они дают формальное описание формированию площади водосбора, показывают соотношение впадающих и продолжающихся линий стока.

Ключевые слова: ЦМР, модель стока, частотная функция длины линий стока, впадение линий стока, статистические характеристики водотоков, матрица Токунага, матрица впадений, масштабная инвариантность

Одобрена к печати: 30.06.2025

DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-4-164-172

Введение

Публикуем промежуточный итог многолетнего экспериментального изучения гидрологических характеристик рельефа. Следуем подходу, который Р. Е. Хортон (Хортон, 1948) назвал «гидрофизическим подходом к количественной морфологии». Наше отличие в том, что масштаб водотока задаём не номером порядка впадения, а геометрическими характеристиками, которые во времена Хортон не были доступны в статистически значимом объёме. В качестве масштабного фактора мы рассматривали площадь водосбора и длину водотока. Последний параметр работает лучше (Златопольский, 2025б), а пересчитать полученные зависимости в привычные порядки или площадь водосбора не сложно. Как и Хортон, мы ищем закономерности, общие для разных территорий.

Опираемся на базовые гидрологические измерения, которые по цифровой модели рельефа (ЦМР) даёт обычно используемая модель стока D8. Анализируем территории, на которых эта модель работает — рельеф флювиальный и достаточно выраженный.

Задача статьи — обобщить полученные нами экспериментальные результаты, отмечая уточнения в методах и результатах, найденные после предыдущих публикаций. Покажем, какие ещё закономерности можно формально вывести из установленных соотношений. В заключение рассмотрим, как полученные закономерности соотносятся с теми, что были найдены другими исследователями по иным методикам.

Исходные данные

В этом разделе детально опишем получение экспериментальных измерений, исходных данных статистического анализа. Тонкости описания необходимы тому, кто хотел бы осуществить такие исследования, их можно пропустить при первом знакомстве с текстом.

Поскольку нас интересуют статистические закономерности рельефа, общие для разных территорий, конкретный выбор участков, на которых проводились измерения, видимо, не принципиален (если модель стока работает). Участкам для краткости даны условные названия: «Амур» — от горной системы Сихотэ-Алинь до р. Буреи; «Кама» — Татарстан и вокруг; «Пара» — юго-восток бассейна Амазонки; РП — Русская платформа, *табл. 1*. Основной была территория Амур, а по остальным проверяли устойчивость полученных результатов. Использовали достаточно качественную и доступную для многих территорий модель рельефа SRTM (*англ.* Shuttle Radar Topographic Mission). Исследование проводили в проекции UTM (*англ.* Universal Transverse Mercator), так как важную роль в нём играют и ориентационные характеристики. Специальная экспериментальная проверка показала, что обсуждаемые результаты, полученные в UTM, практически не отличаются от расчётов в равновеликой конической проекции Альберса (Златопольский, 2024б).

Таблица 1. Территории, ЦМР которых использовались для экспериментальных расчётов

Название	Широта	Долгота	Размер, км	Размер, пиксель	Разрешение, км/пиксель	Площадь суши, км ²	Площадь суши, пиксель
Амур	47,15–53,5° с. ш.	130,66–140,11° в. д.	717,50×719,40	11 033×11 004	0,0651	502 663	118 977 538
Кама	52–58° с. ш.	48–57° в. д.	617,70×683,40	9 488×10 498	0,0651	412 885	97 424 163
Пара	3–10° ю. ш.	48–54° з. д.	667,08×775,29	10 245×11 907	0,0651	510 418	121 608 897
РП	49,5–59,5° с. ш.	34–55° в. д.	1519,18×1164,28	11 686×8 956	0,1300	1 753 437	103 753 670

Обработка ЦМР в геоинформационной системе (ГИС) начинается с заполнения локальных бессточных понижений, которые приводят к ошибкам при моделировании стока. На территории Амур скорректировано 4,4 % значений ЦМР. Из них 68,2 % повышены только на 1 м, а ещё 27,3 % — на 2 или 3 м, и только в 0,5 % коррекция превышает 6 м. Больше всего, на 25–40 м, повышены значения в 32 точках. Изменена очень небольшая часть значений и в основном на малую величину. А вот на не флювиальных рельефах эта операция может приводить к большим искажениям.

Мы работаем с дискретной информацией о рельефе. Клетку матрицы ЦМР называем пикселем. Размер пикселя на местности, разрешение h , выражается в единицах длины, км в пикселе. Длина линии в ГИС определяется числом пикселей плюс $(\sqrt{2}-1)$ на каждый диагональный переход. Площадь также измеряется в пикселях (на местности h^2 (в км²)). Кроме того, пиксель как фрагмент территории с установленными характеристиками — это ещё и определённая ситуация. Число таких пикселей, делённое на число всех пикселей, — это частота обнаружения таких ситуаций.

Механизм анализа ЦМР, модель стока, также дискретна: начиная с пикселя-истока, каждая линия стока растёт шаг за шагом, от пикселя к соседнему. Использовали модель стока D8 (описана, например, в работе (Чернова и др., 2010)), так как другие модели мало изучены, а закономерности для результатов D8 на участках продолжительного стока близки к тем, что получали измерением по картам. Для каждого пикселя модель указывает: в какой соседний пиксель идёт весь сток из данного (растр направлений); площадь приходящего в пиксель водосбора (растр стока); самое большое расстояние от истока до этого пикселя у линий стока, проходящих через этот пиксель (растр длин). Чтобы получить площадь водосбора A ,

к данным раstra стока нужно прибавить 1 (площадь самого пикселя). Расстояние от истока ГИС выдаёт в метрических единицах. Мы возвращаемся к пикселям: делим на h и округляем к меньшему целому. Из-за округления случается, что длина за один шаг стока увеличивается на 2, если набралось 3 перехода по диагонали. Частотные функции от длины (гистограммы) получаем с интервалами (бинами) 1.

Чтобы получить длину линии стока L , нужно к расстоянию от истока прибавить среднюю длину пикселя-истока λ (табл. 2). Задавая эту длину, нужно учитывать, что L — аргумент степенных закономерностей, в которых при малых значениях аргумента существенно сказывается его небольшое изменение. В предыдущих расчётах мы задавали $\lambda = 1$ (хотя длина пикселя-истока может быть и больше при начальном стоке по диагонали). В этом случае зависимости, которые хорошо описывают ситуацию в целом, очень плохо работают при $L < 8$. При $\lambda = 2$ этой проблемы нет. В дальнейшем нужно будет исследовать более тонкую настройку значения λ (может 1,8) и способа округления.

Таблица 2. Пример пересчёта расстояния от истока из данных ГИС (в левой части) в длину линии стока L (в правой части). Стрелки показывают направление стока

0				0↓		2↘				2↓	
	√h↘			h↓	←0		3↘			3↓	←2
		2√h↘		2h↓				4↘		4↓	
			3√h↘	3h↓					6↘	5↓	
11h→	12h→	13h→	14h→	15h→	16h→	13→	14→	15→	16→	17→	18→

Методика: масштабная инвариантность, дискретность, населённость

Из приведённых растровых данных находим табличные функции $f^{tab}(L)$, отмечаем их верхним индексом *tab*. Наша задача — получить для них формальное выражение $f(L)$. Соответствие формулы и табличной функции оцениваем по их отношению $f^{tab}(L)/f(L)$: насколько и где оно отличается от 1. Конкретный способ получения $f(L)$ — аппроксимация, усреднение, проверка предположения — приведём, описывая анализ конкретных функций. А в этом разделе рассмотрим общие принципиальные методические обстоятельства.

Мы использовали существенно различные территории с разным разрешением, но с примерно одинаковой площадью в пикселях. Обработка и анализ ЦМР проводились для них одинаково и, что очень существенно, в едином диапазоне значений L , этот диапазон указан для каждого измерения. Всё измеряли без подстройки под территорию (можно считать, что автоматически). При этом результаты для разных территорий и разного разрешения оказались близки (пример дан ниже).

Независимость табличных функций от разрешения свидетельствует об их фактической масштабной инвариантности. Её можно установить и по получаемым формулам. Формальному обоснованию масштабной инвариантности этих соотношений посвятим другую статью, а здесь нам будет важно следующее. Хотя мы вынуждены работать с дискретными данными, в силу масштабной инвариантности формулы, полученные в пикселях, сохраняются и в метрических единицах.

Измерение в пикселях позволяет не упускать из вида влияние дискретности, которая присутствует на всех этапах — создание ЦМР, моделирование стока, измерение. Будем отмечать в экспериментальных зависимостях особенности, которые связаны с линиями стока определённой длины в пикселях, а не с их длиной на местности.

В частности, в силу дискретности сложно получить достаточно аккуратные результаты для участков начального стока $L < 5$, где за один шаг стока L может измениться в 1,5 раза, а площадь водосбора вдвое. Возможно, есть какие-то особенности рельефа на участках начального стока, но основные сложности, полагаем, связаны именно с дискретностью как

измерения, так и моделирования. Однако к такому начальному стоку относится большая часть территории (около 70 %), причём, в силу масштабной инвариантности, эта часть не зависит от разрешения, т. е. от метрического масштаба.

Есть ограничения анализа и при больших значениях L . Статистические закономерности выполняются в среднем на достаточно большой выборке. Поэтому исследуем ЦМР размером S , около 10^8 пикселей, и анализируем не самые крупные детали рельефа, а те, которых статистически достаточно много. Если какие-то значения L на территории встречаются редко (единицы раз), то будем говорить, что соответствующий участок экспериментально полученной функции «мало населён» и точность статистической оценки там мала. Размер территории определяет, до какого масштаба (до каких длин) данных статистически достаточно. Исходя из нашего опыта, ориентируемся на длину $0,2\sqrt{S}$, т. е. около 2000, когда населённость ещё около 50. При больших L падает надёжность, растут флуктуации результатов измерения. Если нужно работать с большими масштабами, то можно увеличить размер территории анализа, в частности, суммировать данные нескольких территорий. Ниже покажем, что улучшить населённость функции для водотоков определённой длины в километрах за счёт более детального разрешения той же территории не получится, необходима большая территория.

Ради привычного представления описание масштаба через длину линии стока соотнесём с порядками. Началу первого порядка при пороге по площади водосбора 100 пикселей соответствует L около 20 пикселей (обоснуем это ниже) и далее с мультипликативным шагом 2 (2-й порядок от 40, а 8-й от 2560).

Статистические характеристики и закономерности

Измеряем и формально описываем следующие характеристики рельефа:

- $H(L)$ — частота пикселей с длиной стока L (число таких пикселей, делённое на S);
- $A(L)$ — средняя площадь водосбора пикселей с длиной стока L ;
- $G(L) = H(L) \cdot A(L)$ — суммарная площадь водосбора пикселей с длиной стока L , отнесённая ко всей изучаемой площади S ;
- $I(L_1, L_2)$ — матрица впадений — это частота пикселей, в которых длина стока L_1 и сток идёт в пиксель с длиной L_2 и другой линией стока (в табл. 2 впадение на 2-й строке из пикселя с $L_1 = 2$ в пиксель с $L_2 = 3$ и на 4-й строке из пикселей с $L_1 = 5$ и 6 в пиксель с $L_2 = 17$). Матрицу строим по тем пикселям суши, для которых установлено направление стока и которые не находятся на краю раstra, где направление стока несколько условно.

Частотная функция $H(L)$ — базовая характеристика, которая, как мы увидим, работает во многих ситуациях. Приведём численную оценку сходства значения $H^{tab}(L)$ по территориям. Разбросом называем отношение среднеквадратичного отклонения по выборке к среднему (в %). При малых L , когда степенная функция меняется очень быстро, разброс между $H^{tab}(L)$ территорий достигает 18,6 % при $L = 7$. При $15 \leq L \leq 1000$ разброс в диапазоне 5–10 %, а дальше существенно растут флуктуации его значений: от 7 до 11 % при L около 1000 (населённость, число случаев 150), 5–15 % при L около 2000 (населённость 50), 5–35 % при L около 5000 (населённость 10).

Ранее, установив близость результатов для разных территорий (причём и с разным разрешением), мы рассчитывали среднюю зависимость, усредняя параметры функций, полученных по каждой территории. Представляется, что правильнее объединять данные территорий (например, суммировать частотные функции) и итоговый результат получать по этой совокупности. Так набирается и статистика для мелкомасштабных объектов.

$H^{tab}(L)$ достаточно хорошо аппроксимируется степенной функцией: для $L \leq 2000$ по сумме территорий получаем $H(L) = 1,11L^{-1,9528}$ (квадрат коэффициента корреляции $H(L)$ с $H^{tab}(L)$ $r^2 = 0,9992$). По нашей гипотезе (пока не доказана) масштабная инвариантность порождает статистический физический закон с показателем степени -2 . (Такой показатель даёт совпадение размерности правой и левой части в этой и производных формулах в метрических единицах: H — в шт./км², а L — в км.) При аппроксимации степенной функцией

небольшое изменение показателя степени может сопровождаться большим изменением множителя. Поэтому для уточнения множителя возьмём меньший участок $L \leq 1000$, где показатель степени при аппроксимации ближе к -2 , получаем $H(L) = 1,4L^{-1,9963}$ ($r^2 = 0,9999$). Будем использовать выражение $H(L) = v/L^2$ с $v = 1,4$. (Обещанная сноска про населённость и разрешение. Населённость — это $S \cdot v/L^2$. Если сделать разрешение более детальным, то числитель и знаменатель вырастут одинаково и населённость не изменится.)

Сравним принятую формулу с табличной функцией подробнее. Отношение $H^{tab}(L)/H(L)$ показывает хорошее сходство: при $20 \leq L \leq 1000$ значения отношения в диапазоне $0,97-1,025$, но флуктуации растут до $\pm 0,02$. Благодаря тому, что принята длина пикселя-истока $\lambda = 2$, при малых L отношение отклоняется только на 14 %, а не в разы, как при $\lambda = 1$. На участке $6 \leq L \leq 16$ отношение больше 1,06 и приближается к 1,1. Причину этого отклонения попробуем выяснить в дальнейшем, учитывая, что аналогична ситуация и на отдельных территориях, и у матрицы впадений. Связано это с длиной линий стока в пикселях, а не с реальными длинами в метрах.

Константность суммарной площади водосбора точек одного масштаба, $G(L) = \text{const} = 0,3$. Это самый надёжный результат: и общее среднее значение G по территории, и локальное (для небольшого диапазона значений L) не отклоняются существенно от 0,3. По сумме территорий для $L \leq 2000$ среднее $G = 0,302$ с разбросом 3,1 %. Исключение — первые три шага стока, где G почти 0,4 (G падает к 0,31 при $L = 8$). С ростом L число измерений уменьшается, и флуктуации вокруг среднего достигают 0,01. При $2000 \leq L \leq 4000$ среднее 0,291 и разброс 8,4 %. (Графики $G(L)$ приведены в работе (Златопольский, 2024б), где $G(L)$ обозначено $B(LLp)/S$.) Из постоянства G получаем:

$$A(L) = G/H(L) = aL^2, \text{ где } a = G/v = 0,214 \text{ и } L = u\sqrt{A}, \text{ где } u = 1/\sqrt{a} = 2,162.$$

(Отсюда, как указывали ранее, площади водосбора в 100 пикселей соответствует длина около 20.) Из этих соотношений получаем, что средняя ширина водосбора равна aL и её отношение к длине a . Значения множителей, найденных аппроксимацией, требуют дальнейшего уточнения, хотя, возможно, и эти не случайны, так как a^{-1} очень близко к коэффициенту Хортона для средней площади водосбора порядка 4,6, v^2 близко к 2, u^3 — к 10.

Матрица впадений. Подробный анализ матрицы впадений приведён в работе (Златопольский, 2025а). Здесь мы уточнили её расчёт для случая слияния линий стока точно одной длины (пример в табл. 2 в строке 2). Одну из слившихся линий считаем продолжающейся, а остальные — впадшими. В матрицу впадений теперь не заносим данные о продолжении линий стока (в табл. 2 всё продолжение, кроме трёх указанных ранее впадений). Значения на первой диагонали $L_2 = L_1 + 1$ при $L_1 > 3$ оказались существенно меньше соседних по строке (табл. 3). Все значения при $L_2 < L_1 + 1$ нулевые.

Таблица 3. Начальные строки и столбцы матрицы впадений для Амура, $1000I^{tab}(L_1, L_2)$

L_1/L_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	26,7290	28,3740	16,1340	10,3640	8,232	6,578	5,264	4,440	3,831	3,337	2,908
3	0	8,0125	9,6932	6,0015	4,526	3,501	2,764	2,316	2,004	1,733	1,512
4	0	0	2,4202	5,0011	3,823	2,618	1,988	1,625	1,382	1,189	1,036
5	0	0	0	1,0423	2,158	1,538	1,142	0,906	0,761	0,659	0,577
6	0	0	0	0	1,047	1,769	1,256	0,961	0,767	0,633	0,532
7	0	0	0	0	0	0,488	1,159	0,939	0,693	0,547	0,445
8	0	0	0	0	0	0	0,267	0,649	0,517	0,397	0,322
9	0	0	0	0	0	0	0	0,247	0,538	0,409	0,316
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,182	0,380	0,299
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,119	0,271
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,081

В работе (Златопольский, 2025б) предложено искать формальное описание этой матрицы в виде $b \cdot H(L_1) \cdot H(L_2)$. Исходили из того, что $H(L_1)$ отражает общее число линий стока, из которых может идти впадение (хотя не все впадают), а $H(L_2)$ реализует нашу гипотезу о равномерном впадении (Златопольский, 2024а): частота впадений из L_1 в L_2 пропорциональна числу пикселей с L_2 , т.е. число впадений пропорционально $H(L_2)$.

Для Амура проанализировали отношение $I^{tab}(L_1, L_2)/(b \cdot H^{tab}(L_1) \cdot H^{tab}(L_2))$, подбрав $b = 1,4$. $I^{tab}(L_1, L_2)$ очень быстро становится настолько мало населённой, что уже при $L_1 \cdot L_2 > 2500$ появляются пустые ячейки. Поэтому работали на участке матрицы $4 \leq L_1, L_2 \leq 160$. Совпадение табличных функций удовлетворительное, по большей части их отношение вблизи 1 (см. (Златопольский, 2025б)). Но есть отклонение, похожее на то, которое мы отметили для $H^{tab}(L)/H(L)$, и при тех же значениях L . (Здесь получаем отличие при сопоставлении между собой табличных данных.) В полосе строк матрицы $7 \leq L_1 \leq 25$ отношение превышает 1,2, а при $L_2 > 50$ внутри полосы оно доходит до 1,6. Эта особенность проявляется на всех территориях (у Амура особенно ярко) и относится к определённым длинам в пикселях, а не в метрах (не зависит от разрешения).

В итоге, считаем представление $I(L_1, L_2) = b \cdot v^2(L_1 \cdot L_2)^{-2}$ достаточно точным, так как отношение $I^{tab}(L_1, L_2)/I(L_1, L_2)$ при $L_1, L_2 > 30$ и достаточной населённости в среднем около 1 на трёх территориях, а в Паре — оно около 0,85. Значение b подобрано и, несомненно, нуждается в проверке и уточнении. Табличные матрицы впадений не зависят от разрешения, что говорит об их масштабной инвариантности.

Формальные следствия

1. $IN(L)$ — частота тех линий стока длины L , которые не продолжают, а куда-то впадают, и $IC(L)$ — частота тех, что продолжают. Очевидно, что число продолжающихся линий должно быть равно имеющимся на следующем шаге, т.е. $IC(L) = H(L + 1)$. Проверка отношения $H(L + 1)/IC(L)$ на территории Амур показала, что отличие между этими величинами иногда есть. Существенное отклонение от 1 было на некоторых начальных шагах (максимально — 22 % при $L = 4$ и 14 % при $L = 5$), но уже при $L > 9$ оно меньше 5 %, при $L > 16$ меньше 2 %, при $L > 34$ меньше 1 %. Объясняется отличие, видимо, тем, что у коротких линий существенно сказывается увеличение длины не на 1, а на 2 при третьем стоке по диагонали. (Переход от длины L не к $L + 1$, а к $L + 2$ приводит к тому, что оказывается меньше линий стока с длиной $L + 1$, чем продолжений у L , и больше линий стока с длиной $L + 2$, чем продолжений у $L + 1$.)

Таким образом,

$$IN(L) = H(L) - IC(L + 1) = H(L) - H(L + 1) = v(2L + 1) \cdot (L(L + 1))^{-2}.$$

Аппроксимация табличных измерений по сумме территорий дала при $15 \leq L \leq 300$ близкую зависимость $IN(L) = 2,88/L^{3,014}$.

2. $IA(L)$ — это часть площади территории, которую в пиксели с длиной $L > 2$ суммарно вносят в водосбор все впадающие линии стока с некоторой длиной L_n . IA одинакова для разных L_n (не зависит от L_n):

$$IA = I(L_n, L) \cdot A(L_n) = b \cdot H(L_n) \cdot H(L) \cdot A(L_n) = b \cdot G \cdot H(L) = b \cdot G \cdot v \cdot L^{-2} = 0,59 \cdot L^{-2}.$$

При проверке на Амуре IA при одном L и разных L_n иногда менялось и в два раза. Но это не очень большое изменение, так как L_n изменяется в десятки раз ($IA(L)$ при $10 \leq L \leq 20$ растёт с ростом L_n , а при $L > 20$ происходит колебание значений $IA(L)$).

В точки линий стока масштаба $L > 2$ впадают притоки меньшего или равного масштабов, их $(L - 2)$, и вместе вносят водосбор

$$\text{SumIA}(L) = (L - 2) \cdot b \cdot G \cdot H(L) = 0,42(L - 2)H(L) = 0,588(L - 2) \cdot (L)^{-2}.$$

Проверка по Амуру в диапазоне $4 \leq L \leq 160$ подтвердила этот вывод: $\text{SumIA}(L)/0,42(L - 2)H^{tab}(L)$ около 1 везде, кроме малых L . (Фактически это отношение описывает среднее

по $L_1 \leq L_2$ выражения $I^{tab}(L_1, L_2)/(b \cdot H^{tab}(L_1) \cdot H^{tab}(L_2))$, которое при $L_2 = 4$ равно 0,41, растёт до 0,9 при $L_2 = 15$, а при $15 \leq L_2 \leq 160$ оно вокруг 1,02 с разбросом 7,2 %).

3. Средний водосбор пикселя с длиной стока L , $A(L) = aL^2$, складывается из следующих площадей: самого пикселя (1), среднего водосбора продолжения стока в него ($A(L-1) = a(L-1)^2$) и общего водосбора притоков ($b \cdot G(L-2)$). Поскольку водосбор продолжения стока растёт как квадрат длины, очень быстро он становится основной составляющей. Посмотрим, как сочетаются эти формулы, которые мы получили разными путями, т.е. равны ли aL^2 и $1 + a(L-1)^2 + b \cdot G(L-2)$. Перегруппируем сумму как $aL^2 + L(-2a + b \cdot G) + (1 + a - b \cdot G)$ и вычислим значения в скобках: первое -0,008, второе 0,374. Раз второе и третье слабые практически не сказываются на результате, то значит совпадение достаточно хорошее.

Обсуждение результатов

Сопоставим описанные здесь и ранее закономерности, полученные нами по растрам, с результатами, полученными другими исследователями совершенно иными методами, по иным исходным данным (начиная с карт). Чаще всего исследователи работали с участками гидросетей, деля их на порядки по правилу Хортон — Стралера. Опираемся на обстоятельный обзор таких результатов в публикации (Pelletier, 1999). В ней порядковые закономерности представлены как степенные зависимости относительно средней площади водосбора водотоков одного порядка Ac : число водотоков на единицу площади N пропорционально Ac^{-1} ; плотность водотоков D пропорциональна $Ac^{-0,5}$; средняя длина водотоков пропорциональна $Ac^{0,5}$ (приводим округлённые показатели степени из диапазонов значений, указанных в обзоре).

1. Предложенное выше соотношение $A(L) = aL^2$, $a = 0,214$, соответствует закону Хака, который рассчитывался для рек.

2. Постоянство суммарной площади водосбора одного масштаба, $G(L) = \text{const}$, соответствует в отношениях Хортон обратной пропорциональности N и Ac .

3. Притоки одного масштаба делятся между принимающими водотоками пропорционально суммарной длине (или частоте встречаемости) водотоков принимающих масштабов. В работе (Златопольский, 2024а) это показано для водотоков, разбитых на порядки.

Иногда требуется работать не с точками, а с отрезками линий стока (например, для измерения их направления). В этом случае масштаб задаётся не единичным значением L , а интервалом значений. Будем называть полученные такие образом отрезки линий стока интервальными. Рассмотрим отрезки, заданные масштабными интервалами из геометрической последовательности: от $Ls \cdot F^{n-1}$ до $Ls \cdot F^n$, где n — номер интервала, Ls — начальная длина первого интервала и размер интервала $F = 2,14$ (корень из коэффициента Хортон для площади водосбора). В работе (Златопольский, 2024а) показано, что участки водотоков одного порядка близки к отрезкам соответствующего интервала как при их непосредственном сопоставлении, так и по статистическим характеристикам.

4. Ряд закономерностей для интервальных отрезков аналитически выводится из частотной функции $H(L)$. Непосредственно из $H(L)$ получаем число отрезков $N = \nu/Ls^2$ шт./км², из интеграла $H(L)$ получаем их плотность $D = \nu(1-1/F)/Ls$ км/км² и среднюю длину $D/N = (1-1/F)Ls$ км. Если эти равенства пересчитать относительно средней площади водосбора (для геометрического центра интервала) $Ac = a(F^{0,5} \cdot Ls)^2$, то получим соответствие приведённым выше пропорциям для порядков:

$$N = (\nu \cdot aF)Ac^{-1}, D = (\nu(1-1/F) \cdot (aF)^{0,5})Ac^{-0,5}, D/N = ((1-1/F) \cdot (aF)^{-0,5})Ac^{0,5}.$$

5. Отношение числа притоков порядка n , впадающих в водотоки порядка $n+p$, к общему числу водотоков порядка $n+p$ (коэффициент Токунага) описывается показательной функцией $1,1 \times 2,5^{p-1}$ (Wang et al., 2022). Из матрицы впадений $I(L_1, L_2)$ аналитически выведено (Златопольский, 2025а) совершенно аналогичное соотношение для интервальных отрезков: $1,21 \times 2,21^{q-1}$, где q — разница номеров соответствующих интервалов.

6. Базисные поверхности и их разности, полученные по интервальным отрезкам, близки к традиционно построенным по порядкам. В публикации (Златопольский, 2024а) приведён

пример сопоставления этих вариантов, но не ясно, как интерпретировать отличия: какой результат «правильнее».

В этой же работе есть некоторые результаты по аналитической связи масштаба и возраста водотоков. Если найденную там формулу пересчитать для длины линии стока (в км), то получим, что ориентировочно возраст (в млн лет) $T = 0,01L^{1,4}$.

Также в указанной публикации показано, что локальные ориентационные характеристики, которые в скользящем окне считает программа LESSA (*англ.* Lineament Extraction and Stripe Statistical Analysis) у водотоков, разбитых на порядки, и у соответствующих интервальных отрезков совершенно идентичны. При этом расчёт характеристик для водотоков более гибкий, что позволяет выявлять масштабные особенности ориентации рельефа гораздо точнее, чем при непосредственном анализе ЦМР с помощью этой же программы.

Таким образом, предложенная методика анализа растров продолжает подход Хортон к расчёту гидрологических характеристик рельефа. Она позволяет развить и дополнить найденные ранее закономерности, в частности, численно описать формирование площади водосбора, показать соотношение впадающих и продолжающихся линий стока и др. Не видно резона, зачем при анализе гидрологических характеристик продолжать опираться на порядки с их субъективным выбором правила и порога расчёта.

Необходимо на новом этапе рассмотреть сделанное ранее предположение, что в основе найденных закономерностей лежит масштабная инвариантность, что она порождает эти закономерности, что из неё их можно вывести аналитически.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Мониторинг», госрегистрация № 122042500031-8).

Литература

1. Златопольский А. А. (2024а) Масштабная статистика рельефа — порядки, диапазоны, распределение притоков, ориентация, возраст, инвариантность // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2024. Т. 21. № 2. С. 103–121. DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-2-103-121.
2. Златопольский А. А. (2024б) Статистические масштабные закономерности характеристик рельефа (по растрам модели стока) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2024. Т. 21. № 6. С. 159–167. DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-6-159-167.
3. Златопольский А. А. (2025а) Статистика распределения притоков — матрица впадений (аналог матрицы Токунага) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2025. Т. 22. № 2. С. 71–81. DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-2-71-81.
4. Златопольский А. А. (2025б) Статистические закономерности длины линий стока (основа расчёта гидрологических характеристик рельефа) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2025. Т. 22. № 3. С. 109–118. DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-3-109-118.
5. Хортон Р. Е. Эрозионное развитие рек и водосборных бассейнов. Гидрофизический подход к количественной морфологии: пер. с англ. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 159 с.
6. Чернова И. Ю., Нугманов И. И., Даутов А. Н. Применение аналитических функций ГИС для усовершенствования и развития структурно-морфологических методов изучения неотектоники // Геоинформатика. 2010. № 4. С. 9–23.
7. Pelletier J. D. Self-organization and scaling relationships of evolving river networks // J. Geophysical Research: Solid Earth. 1999. V. 104. No. B4. P. 7359–7375.
8. Wang K., Zhang L., Li T. *et al.* Side tributary distribution of quasi-uniform iterative binary tree networks for river networks // Frontiers in Environmental Science. 2022. V. 9. Article 792289. DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.

Multi-scale statistical analysis of hydrological characteristics of the relief (based on runoff model rasters)

A. A. Zlatopolsky

Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia

E-mail: aazlat@gmail.com

We summarize the results of our long-term experimental study of the hydrological characteristics of the relief. We look for regularities common to different territories, generally following Horton's approach. Our distinction is that we determine the scale of a watercourse not by the number of the order of its inflow, but by its length, L , and we work not with sections of watercourses, but with raster data for all points of the territory. These data contain the results of basic hydrological measurements, which, according to the DTM (digital terrain model), are given by the D8 runoff model. We analyze the territories where this modeling works — the relief is fluvial and quite expressed. Our basic results are the constancy of the total catchment area at runoff points with the same L ; the formula for the frequency of runoff points with the same L ; the formula for the frequency of the inflow of runoff lines of length L_1 into runoff points of length L_2 (inflow matrix). We showed how the found dependencies correspond to Hack's law, Horton's relations, Tokunaga's matrix and coefficient, although they were obtained by completely different methods and used different data. The found dependencies allow us to develop these known regularities; in particular, they provide a formal description of the catchment area formation and show the relationship between the inflowing and continuing runoff lines.

Keywords: DTM, runoff model, frequency function of runoff line length, runoff line inflow, statistical characteristics of watercourses, Tokunaga matrix, inflow matrix, scaling

Accepted: 30.06.2025

DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-4-164-172

References

1. Zlatopolsky A. A. (2024a), Scale terrain statistics — orders, ranges, tributary distribution, orientation, age, scaling, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2024, V. 21, No. 2, pp. 103–121 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-2-103-121.
2. Zlatopolsky A. A. (2024b), Statistical scale relationships of relief characteristics (based on runoff model rasters), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2024, V. 21, No. 6, pp. 159–167 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2024-21-6-159-167.
3. Zlatopolsky A. A. (2025a), Tributary distribution statistics — inflow matrix (analog of Tokunaga matrix), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2025, V. 22, No. 2, pp. 71–81 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-2-71-81.
4. Zlatopolsky A. A. (2025b), Statistical regularities of the length of runoff lines (the basis for calculating the hydrological characteristics of the relief), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2025, V. 22, No. 3, pp. 109–118 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-3-109-118.
5. Horton R. E., Erosional development of streams and their drainage basins. Hydrophysical approach to quantitative morphology, *Bul. Geological Society of America*, 1945, V. 56, pp. 275–370.
6. Chernova I. Yu., Nugmanov I. I., Dautov A. N., Application of GIS analytic functions for improvement and development of the structural morphological methods of the neotectonics studies, *Geoinformatica*, 2010, No. 4, pp. 9–23 (in Russian).
7. Pelletier J. D., Self-organization and scaling relationships of evolving river networks, *J. Geophysical Research: Solid Earth*, 1999, V. 104, No. B4, pp. 7359–7375.
8. Wang K., Zhang L., Li T. et al., Side tributary distribution of quasi-uniform iterative binary tree networks for river networks, *Frontiers in Environmental Science*, 2022, V. 9, Article 792289, DOI: 10.3389/fenvs.2021.792289.