Статистическая связь локального продольного уклона водотока с другими локальными характеристиками (матрица уклонов)

А. А. Златопольский

Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия
E-mail: aazlat@gmail.com

Предложено описание характеристик рельефа матрицей уклонов. Эта матрица отражает статистическую связь значений локального продольного уклона с текущей длиной линии стока и текущей высотой над уровнем моря. Описан экспериментальный расчёт матрицы уклонов по цифровой модели рельефа (ЦМР) участка Дальнего Востока (500 000 км^2). Длину линии стока получаем моделированием стока в геоинформационной системе. Экспериментально установлена связь уклона с длиной водотока и высотой над уровнем моря. Приведены варианты формального описания экспериментальной матрицы уклонов степенными функциями длины и высоты. Предложенные формулы неплохо описывают матрицу в целом, но плохо соответствуют данным, которые получены из участка низменности. Скорее всего, это происходит из-за того, что на этом участке маленькие уклоны, которые измеряются с относительно большой погрешностью. Возможно, также недостаточна точность указания этих высот в ЦМР. Далее необходимо провести аналогичные исследования на существенно иных территориях. Предполагается изучить связь падения высоты вдоль линии стока и длины линии стока, что тесно связано с рассмотренной статистической зависимостью продольного уклона.

Ключевые слова: ЦМР, модель стока, продольный уклон, длина линии стока, высота, матрица уклонов, статистическая зависимость, степенная функция

Одобрена к печати: 13.11.2025
DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-1-140-149

Введение

Результаты исследования этого вопроса публиковались разными авторами с различной степенью формализации. Так, в статье (Pelletier, 1999) сообщается, что величина локального продольного уклона U зависит от масштаба водотока в этом месте. Масштаб во всех цитируемых работах измерялся площадью водосбора в этой точке водотока A. Мы предложили характеризовать масштаб длиной водотока в этой точке L, которая, в отличие от площади водосбора, изменяется плавно, без скачков. Результаты, приведённые для площади водосбора, пересчитываем относительно длины по полученной нами формуле $L = 2{,}162\sqrt{A}$ (Златопольский, 2025). При таком пересчёте в работе (Pelletier, 1999) приводится соотношение $U \propto L^q$, где $q = -0{,}74$, там же сообщается о результатах другого исследователя с $q = -1$.

В «Своде правил по проектированию» (https://docs.cntd.ru/document/1200035578) указывается зависимость уклона не только от масштаба водотока, но и от типа рельефа: приведено четыре типа — от низменности до возвышенности. Из результатов, сведённых в таблицу, следует, что при увеличении L в 32 раза U уменьшается в 10 раз. При степенной зависимости это соответствует $q = -1/\lg 32 = -0{,}66$. Из составной характеристики «тип рельефа» вычленим и будем рассматривать в нашем исследовании числовой показатель — высота над уровнем моря V. При переходе от низменности к возвышенности U в таблице растёт в 10 раз. Если средняя высота низменности 100 м, возвышенности 300 м и зависимость от высоты степенная, $U \propto V^p$, то p около 2. (Уклоны в работе рассмотрены маленькие от 0,000003 до 0,003 м/м.)

С аналогичной точки зрения уклоны исследовал Б. И. Гарцман (2013). Зависимость уклона от масштаба представлена им графически и похожа на степенную с $q = -0{,}5$. Указана зависимость уклона и от ландшафтно-гидрологического типа района. Приведена средняя высота этих районов над уровнем моря, и если предположить степенной характер зависимости уклона от высоты, то получится показатель $p = 1{,}3$. (Уклоны в этой работе примерно

от 0,0008 до 0,02, так как местность выше и водотоки короче.) Таким образом, по разным исследованиям значения параметра q довольно близки (от –0,5 до –1), а наша попытка оценки p по данным двух работ ориентировочна: p несколько больше 1.

Проверим предположение, что существует статистическая зависимость локального продольного уклона не только от масштаба (текущей длины), но и от текущей высоты над уровнем моря. Будем искать формальную статистическую взаимосвязь уклона и с длиной, и с высотой. Детально рассмотрим методику и результаты для одной территории, чтобы в дальнейшем перейти к другим регионам, к уточнению и обобщению полученных выводов. Из непосредственных измерений по цифровой модели рельефа (ЦМР) находим табличную функцию $U^{tab}(L, V)$. Наша задача — получить для неё формальное выражение $U(L, V)$. На основе такой математической модели в дальнейшем можно заняться деталями, особенностями ситуации, при которых зависимости могут различаться — малые высоты, малые длины, своеобразие ландшафта территории.

Экспериментальные данные

Экспериментальные измерения мы проводили на ЦМР участка Дальнего Востока, *рис. 1*, от горной системы Сихотэ-Алинь до Буреи, 47,15–53,5° с. ш., 130,66–140,11° в. д., 717,5×719,4 км, площадь суши 502 680 км^2 или 118 977 538 пикселей при разрешении $h = 0{,}065$ км/пиксель. Используем достаточно надёжную и доступную для многих территорий модель рельефа SRTM (*англ.* Shuttle Radar Topographic Mission) в проекции UTM (*англ.* Universal Transverse Mercator).

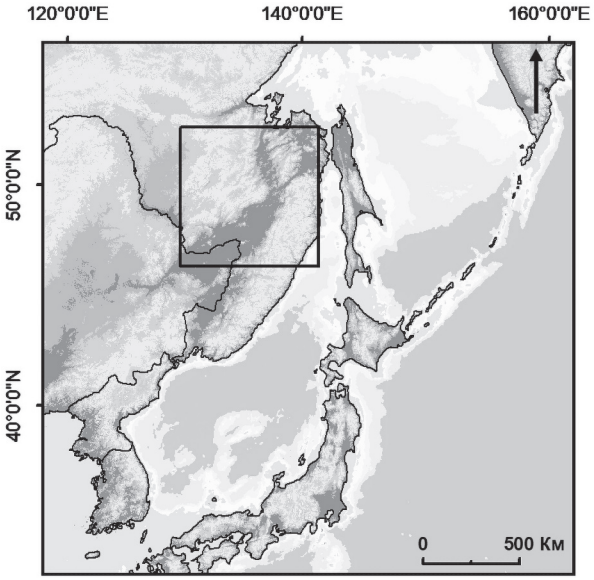

Рис. 1. Экспериментальная территория

Высота над уровнем моря в ЦМР указана в метрах. Чтобы получать статистически обоснованные результаты, работаем с достаточно большими интервалами значений высоты $V_{step} = 20$ м. В интервале номер $m \geqslant 0$ фиксируется число пикселей с высотой от mV_{step} до $(m+1)V_{step}$. Этому интервалу соответствует высота $V = V_0 + mV_{step}$, где $V_0 = V_{step}/2 = 10$ м. Работа с интервалами высоты позволяет отложить обсуждение точности абсолютных значений высоты в ЦМР.

Распределение высот с интервалом расчёта 20 м приведено на *рис. 2* (см. с. 142). Высокий пик с центром около 60 м отражает долину Амура, которая на *рис. 1* проявляется как вытянутая по диагонали тёмно-серая область (30 % территории). Второй пик около 300 м

даёт верхний участок бассейна Селемджи (12 % территории), нижняя часть бассейна западнее нашей территории. Далее до 1050 м идёт снижение с почти постоянным наклоном, а затем снижение всё более плавное. Рассматриваем высоты до 1300 м, на которых встречаются линии стока с длиной 7 км. Если интересоваться только начальными участками водотоков, можно включить в рассмотрение и высоту до 2000 м (это ещё 2,5 % территории).

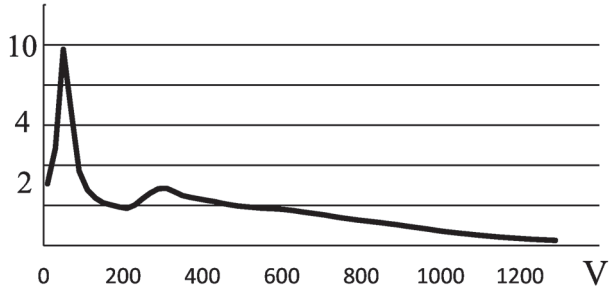

Рис. 2. Распределение пикселей ЦМР территории (в млн шт) по высоте V (в м)

Длину линии стока (в м) и её локальное направление (сосед стока) получаем в геоинформационной системе из обычно используемой модели стока D8 (описана, например, в работе (Чернова и др., 2010)), предварительно в ЦМР убрали ложные понижения. Диапазон длины — первые 33 км — делим на интервалы размером $L_{step} = 2h = 130$ м. Поскольку геоинформационная система выдаёт не длину линии стока, а расстояние от истока, к измерению геоинформационной системы нужно прибавить длину пикселя истока, так что $L = L_0 + nL_{step}$, где $n \geqslant 0$ — номер интервала, а L_0 включает длину пикселя истока и среднюю длину первого интервала. Задаём $L_0 = 2L_{step} = 260$ м. Далее вернёмся к уточнению принятых L_0 и V_0.

Продольный уклон (безразмерная величина, м/м) определяем, разделив падение высоты к соседу стока на расстояние до него. Вычисляем уклон по всем пикселям суши, кроме тех, что на краю территории. Иногда падение высоты и уклон равны 0 — «нулевой уклон». Минимальный ненулевой уклон, который мы можем измерить указанным образом, зависит от разрешения $U \geqslant 1/(h\sqrt{2}) = 0{,}011$. Пока не обсуждаем точность измерения уклонов, которая определяется относительной точностью ЦМР (точность указания падения высоты) и размером отрезка линии стока, на котором измеряется это падение.

Результаты расчётов по низменности ориентировочны, ненадёжны, они только «к сведению», так как невозможно таким путём надёжно определить столь малые уклоны. А кроме того, у ЦМР для этих мест слишком мала детальность, из-за чего образуются плоские участки с параллельными линиями стока.

Матрица уклонов

Матрицей уклонов $U^{tab}(m, n)$ называем двумерную таблицу, каждая ячейка которой содержит средний уклон для пикселей со значениями высоты и длины в интервалах с номерами m и n. Целые $m, n \geqslant 0$ — номера строк и столбцов таблицы. Каждой ячейке таблицы ставим в соответствие значения $V = V_0 + mV_{step}$ и $L = L_0 + nL_{step}$, в иллюстрациях, обсуждении используем обозначение $U^{tab}(V, L)$. Для оценки достоверности значений матрицы уклонов считаем для каждой ячейки число измерений уклонов $Q^{tab}(V, L)$, которые дали в неё вклад, и число этих измерений с нулевым уклоном $Q_0^{tab}(V, L) \leqslant Q^{tab}(V, L)$.

Для расчёта матрицы нужно задать $V_{step} \geqslant 1$, $L_{step} \geqslant h$ и область измерения $0 \leqslant L \leqslant L_{\max}$, $0 \leqslant V \leqslant V_{\max}$. Чем меньше V_{step} и L_{step}, тем детальнее анализ, но и тем меньше измерений в каждой ячейке $Q^{tab}(V, L)$, а значит меньше надёжность результатов. В начале исследований используем большие интервалы, чтобы найти устойчивые зависимости, не уйти в случайные совпадения. Потом можно будет уточнять детали. Ещё одна причина работать с большим чис-

лом измерений в ячейке состоит в том, что длина водотоков, начавшихся за пределами территории, измеряется ошибочно, а при большом числе измерений эти ошибки нивелируются, если попадают в многочисленную группу более коротких водотоков.

Используем указанные выше $V_{step} = 20$ м и $L_{step} = 130$ м. Значение $L_{\max} = 33$ км берём заведомо большое, чтобы оценить, какой диапазон длин имеет смысл изучать на такой территории, а $V_{\max} = 1300$ м обсудили выше. Для того чтобы проконтролировать какие особенности матрицы определяются конкретным метрическим значением, а какие номером ячейки (например, 0), рассчитывали и матрицы с иными интервалами: $V_{step} = 10$ м с $L_{step} = 130$ м и $V_{step} = 20$ м с $L_{step} = 65$ м (интересовали особенности в начальных строках и столбцах, где достаточно данных и при таких меньших интервалах).

Матрица уклонов визуально представлена на *рис. 3*. Чем больше уклон, тем оттенок серого темнее. Пустые ячейки показаны белым цветом. Значения уклона меняются от 0,4 при минимальном L и максимальном V до 0,0004 при максимальном L и минимальном V. Значение уклона в ячейке существенно меньше указанного 0,011 возникает за счёт усреднения с большим числом нулевых уклонов. На низких высотах получилась светлая полоса таких малых, неточных значений. Чем больше L и V, тем больше белых просветов — ячеек без данных. Более светлая полоса при V около 300 м — локально пониженные значения. На этих высотах отмечали пик, вызванный верхним участком бассейна Селемджи (см. *рис. 2*).

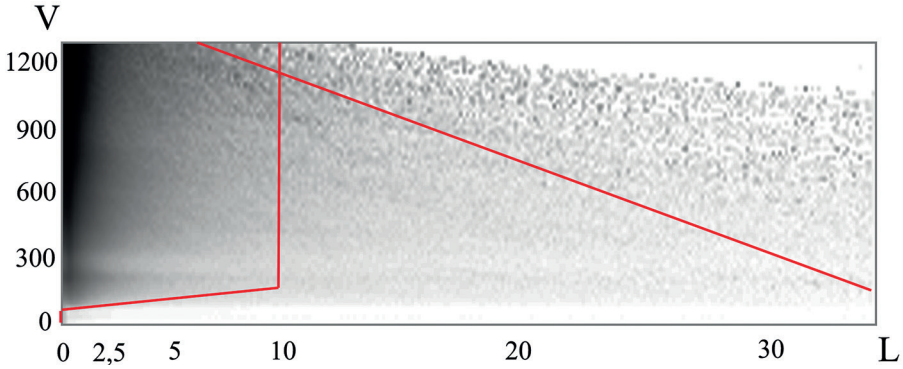

Рис. 3. Визуализация матрицы уклонов. Длина водотока L (в км), высота V (в м). Пояснения в тексте

Для более детального представления рассмотрим отдельные строки и столбцы этой матрицы. На *рис. 4* (см. с. 144) в двойном логарифмическом масштабе показано изменение уклона в строках при $0{,}26 < L < 20$ км и четырёх значениях высоты. Линии схожи, их основная часть ($0{,}78 < L < 12$ км) — прямые с близким отрицательным наклоном q, т. е. соответствуют функции CL^q, где C — константа. Аппроксимация даёт значения q, которые меняются с ростом V от –0,73 до –0,97 (при $V = 30$ $q = -0{,}55$, но на участке $0{,}78 < L < 3{,}8$ км $q = -0{,}88$). Характер начала линий (первые три точки, $L < 0{,}78$) резко отличается от их продолжения. Эти начальные участки различаются и между собой: первое значение то больше, то меньше второго. Возможно, это связано с тем, что в расчёт первого столбца входят пиксели истока. При $L > 6$ км данных в ячейках мало и начинаются флуктуации значений U. При малых V данных много, но они в большинстве ненадёжны, так как получены из нулевых уклонов. На участке $L < 0{,}65$ км наклон линий меньше, чем в основной части. Это не связано с номером интервала, так как и в матрице с $L_{step} = 65$ та же ситуация при $L < 0{,}65$ км.

На *рис. 5* (см. с. 144) синими кривыми показано изменение уклона в столбцах матрицы, т. е. зависимость от V. Кривые схожи, но с ростом L уменьшается их наклон и при меньшей высоте начинаются флуктуации (мало таких данных). Кривые сложнее, чем в строках, на их форму влияют особенности территории. Характер линии уклона меняется с высотой:

- $V < 50$ — почти постоянное малое значение и нет уверенности в точности измерения;
- $50 < V < 200$ — кривая растёт, сначала немного круче, чем в основной части;

- 200 < V < 290 — падение (на этих высотах отмечали вклад данных из верховий бассейна Селемджи);
- 290 < V < 790 — самый прямой участок, к его концу линия становится немного более пологой;
- 790 < V < 910 — при L > 560 меньше наклон или даже снижение;
- V > 910 — рост почти по прямой, но на больших длинах быстро начинаются флуктуации.

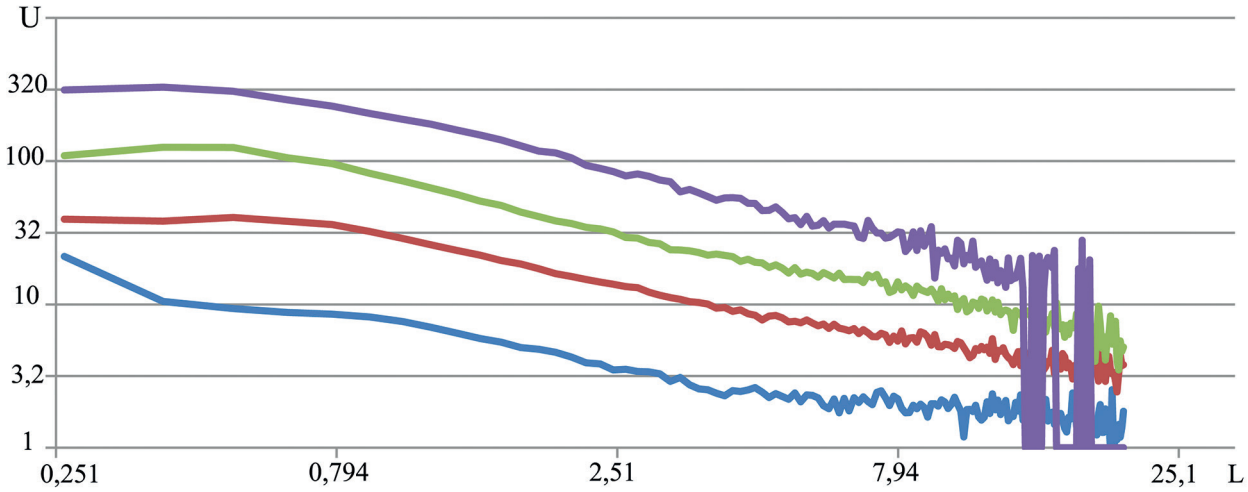

Рис. 4. Изменение среднего уклона U (в ‰) в зависимости от длины линии стока L (в км) при четырёх значениях высоты V (у линий снизу вверх): 30, 90, 290, 890 м

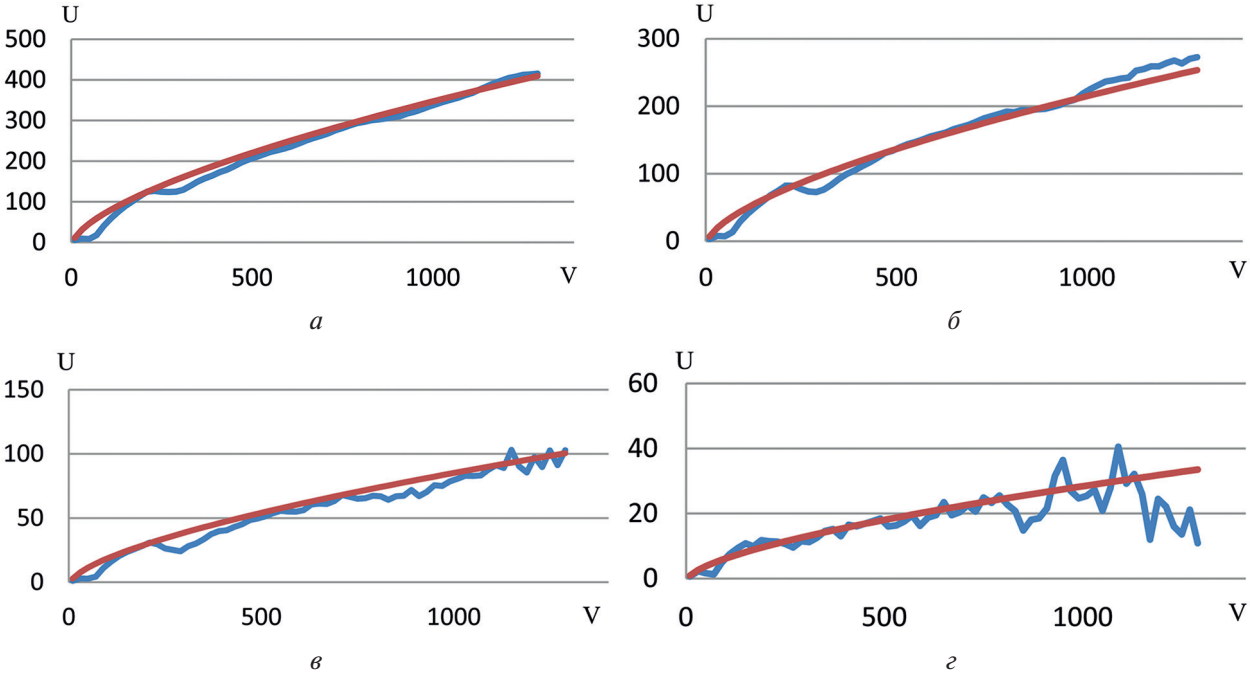

Рис. 5. Изменение среднего уклона U (в ‰) в зависимости от высоты V (в м) при длине линии стока L (в м) (синие линии): *а* — 520; *б* — 1040; *в* — 3120; *г* — 10 010. Красные линии поясним далее в тексте

Таким образом, на тех высотах, где уклон измеряется достаточно надёжно (не слишком мал и нет флуктуаций), зависимость уклона от высоты в средней части высот близка к прямой, но в целом, возможно, $U \propto V^p$ с $p < 1$.

Формальное описание матрицы уклонов

Исходя из закономерностей, найденных для матрицы $U^{tab}(V, L)$, строим её формальное описание $U(V, L)$. Зависимость от L проявилась чётко: $U \propto 1/L^q$ с $q = 1$ или немного меньше. Зависимость от V менее ясна. Можно предположить, что $U \propto V^p$ и p скорее меньше 1, но при $V < 400$ накладывается влияние особенностей территории, а при $V < 90$ в основном очень малые уклоны, измерение которых не точно.

Будем искать функцию, описывающую $U^{tab}(V, L)$, в виде $U = CV^p/L^q$. Но учтём следующее обстоятельство. При хорошем совпадении в целом для малых U и V степенная функция может изменяться избыточно быстро. Эту кривизну можно снизить, уменьшив соответствующий показатель степени (p или q), а можно переместиться к более пологой части кривой, добавив начальный сдвиг V_d и/или L_d:

$$U(V, L) = C(V_d + V)^p/(L_d + L)^q. \quad (1)$$

Используем оба варианта — ищем лучшее совпадение U с U^{tab}, подбирая p, q, V_d, L_d. Отметим, что, найдя V_d и L_d, корректируем V_0 и L_0, которые мы не измерили, а назначили.

На наш взгляд, предпочтителен результат с $p = q$, так как при этом правая часть уравнения получается безразмерной, как и левая, так что нет необходимости уравнивать размерность специальным множителем.

Практически мы сравниваем матрицу уклонов с другой матрицей, в которой каждому значению $U^{tab}(m, n)$ соответствует значение, рассчитанное по формуле (1) с $V=V_0 + mV_{step}$ и $L=L_0 + nL_{step}$.

Сравниваем не все ячейки. Часть ячеек матрицы уклонов оказывается пустой, например, при больших высотах нет линий стока большой длины. А на малых высотах и при большой длине точность получения значения малых уклонов (за счёт усреднения с нулевыми) очень низка. Чтобы не работать с неточными данными, используем ограничение (обозначим его О1): учитываем только те ячейки, в которых число ненулевых измерений не меньше 10 ($Q^{tab}(V, L) - Q_0^{tab}(V, L) > 9$). Это условие выполняется в той части матрицы, которая расположена слева от наклонной красной прямой линии на *рис. 3*. При более жёстком требовании — число нулевых измерений меньше половины, $Q_0^{tab}(V, L)/Q^{tab}(V, L) < 0{,}5$, остаётся часть матрицы слева от ломаной красной линии на *рис. 3*. Фактически это часть матрицы с $L \leqslant 10\,000$ и $V \geqslant 80$. Измеряем сходство матриц в области этих более надёжных данных, но для контроля измеряем сходство ещё по трём областям: область по О1, область по О1 и $V \geqslant 80$, область по О1 и $L \leqslant 10\,000$. Как видим из *рис. 4*, можно ожидать существенного различия при $L < 780$. А кроме того, есть области значений (V, L), где U^{tab} существенно определяется спецификой этой территории (не общими закономерностями).

Таблица 1. Пример оценки сходства $U^{tab}(V, L)$ и $U(V, L) = C(V + 5)^{0,65}/(L + 325)^q$

Данные		R		r^2	
	%	$q = 0{,}85$	$q = 1$	$q = 0{,}85$	$q = 1$
Ограничение 1 (О1)	100	0,289945143	0,330120689	0,986144399	0,982638343
О1 и $V \geqslant 80$	78,75	0,239228686	0,280048201	0,986131285	0,982639606
О1 и $L \leqslant 10\,000$	98,90	0,224933859	0,198877742	0,984986723	0,978378291
О1 и $L \leqslant 10\,000$ и $V \geqslant 80$	78,30	0,167329730	0,131925145	0,984679706	0,978120928

Для оценки сходства матриц рассматривали часто используемый квадрат коэффициента корреляции r^2, но в нашем случае он неудобен, так как приходится учитывать и 4–5-й знак после запятой, *табл. 1* (слишком сходны сравниваемые матрицы). Поэтому оцениваем насколько в среднем $U^{tab}(V, L)/U(V, L)$ близко к 1 отношением среднеквадратичного отклонения этой величины к её среднему. Называем эту оценку разброс R. Чем меньше разброс, тем

реже и меньше это отношение отклоняется от 1. Ранжирование по R и по r^2 почти не отличается, *табл. 1.* В столбце «%» таблицы указан размер «рабочей» части матрицы по сравнению с той, что «работает» при О1.

Опираясь на оценки p и q, полученные при анализе $U^{tab}(V, L)$, ищем комбинацию параметров p, q, V_d, L_d направленным перебором: найдя значение, дающее минимум R по одному параметру, фиксируем его и ищем минимум по-другому и т. д. С получившимся набором значений параметров возвращаемся к уточнению первого и т. д. Останавливаемся, когда нет существенного улучшения оценки. В *табл. 2* даны три примера поиска минимума. Задавая шаг подбора значений V_d, L_d, ориентируемся на единицы и доли V_{step} и L_{step}. Отметим, что такой поиск не гарантирует обнаружение наиболее сходного формального описания матрицы уклонов степенной функцией (глобальный минимум).

Таблица 2. Примеры поиска максимального сходства (минимум R) по одному параметру

	$q = 1$; $V_d = -5$; $L_d = 325$					$p = 0{,}65$; $q = 1$; $V_d = -5$					$p = 1$; $q = 1$; $L_d = 325$			
p	0,50	0,65	0,70	0,75	L_d	–65	195	325	455	V_d	70	90	100	110
R	0,172	0,132	0,134	0,145	R	0,190	0,140	0,132	0,133	R	0,178	0,161	0,156	0,168

Фактически было два поиска: в одном случае мы просто искали вариант с минимальным разбросом, а в другом — искали минимальный разброс при $q = p$. В первом случае получена функция $U = C(V - 5)^{0,65}/(L + 325)$ с множителем $C = 3\ м^{0,35}$ и $R = 0{,}132$. (Поясним: $V = 10 + 20m$, так что $V–5 > 0$.) А во втором случае — $U = 0{,}28(V + 100)/(L + 455)$ с $R = 0{,}156$. Эти функции мы сравнили и с матрицами, рассчитанными с меньшими интервалами. Число ячеек сравнения в этих матрицах примерно такое же, но меньше диапазон длин, $L < 6000$ (быстро падает населённость ячеек с меньшими интервалами). Сходство с этими матрицами обоих вариантов оказалось не хуже, причём оценка второго варианта стала ближе к оценке первого: $R = 0{,}129$ и 0,129 при $V_{step} = 10$, $L_{step} = 130$; $R = 0{,}13$ и 0,133 при $V_{step} = 20$, $L_{step} = 65$.

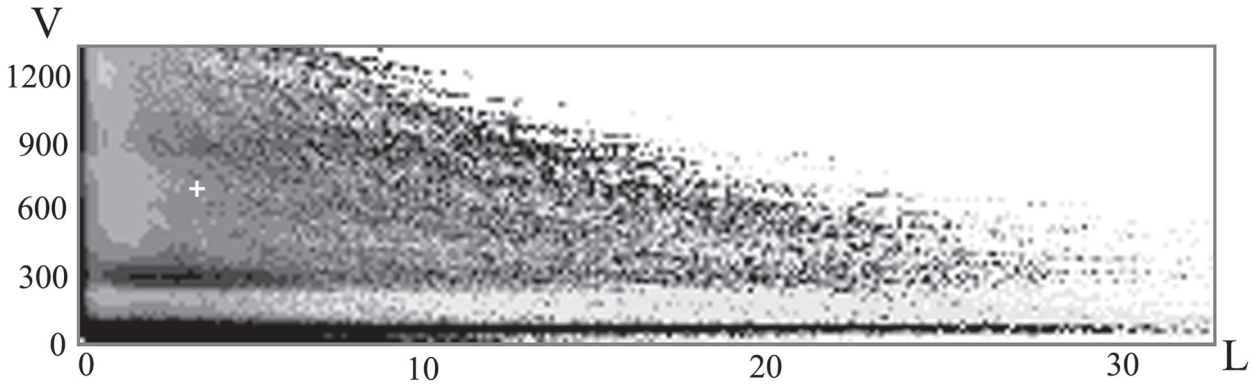

Рис. 6. Визуальное представление отношения $U^{tab}(V, L)/(3(V - 5)^{0,65}/(L + 325))$, ось V (в м), ось L (в км). Белый цвет — нет данных. Значение отношения показано семью тонами, начиная с чёрного, если оно меньше 0,75; всё более светлые тона при 0,75–0,85; 0,85–0,95; 0,95–1,05; 1,05–1,15; 1,15–1,25 и больше 1,25. Тон значений 0,95–1,05 отмечен значком «+». Более тёмный оттенок, чем этот — значение в формуле превышает значение в матрице, а более светлый — наоборот

На *рис. 6* отчётливо видно, какие участки матрицы сходны с формулой (яркость близка к той, что отмечена значком «+»), а какие отличны. Из всех оценённых ячеек у 22 % отношение $U^{tab}(V, L)/U(V, L)$ в диапазоне 0,95–1,05, у 58 % в диапазоне 0,85–1,15, у 72 % в диапазоне 0,75–1,25, но в той части матрицы, где $L < 10$ км их соответственно 31, 73 и 87 %. Отметим места плохого совпадения:

- первый столбец ($n = 0$);
- низменность ($V < 90$), где уклон мал, а его измерения неточны;
- $90 < V < 300$ при $L > 7000$, не ясно почему;
- V около 300, где была отмечена локальная особенность — понижение среднего уклона;
- области, где с увеличением V и L становится мало данных и матрица уклонов существенно и хаотично отличается от аналитического описания (пёстрый рисунок).

Результат сопоставления матриц по некоторым столбцам приведён на *рис. 5*, где красные линии показывают значения функции $3(V - 5)^{0,65}/(L + 325)$. Плохое совпадение видим при малых высотах с неточными данными, на участках флуктуаций и при высотах около 300 м. В остальном совпадение хорошее.

Обсуждение результатов

Предложенная и описанная выше методика позволила на примере одной территории решить поставленную задачу — экспериментально установить и формально описать статистическую связь локального продольного уклона U с длиной водотока L и с высотой над уровнем моря V. Прямая зависимость от высоты, возможно, ранее не фиксировалась исследователями. Предложена и для большого участка Дальнего Востока экспериментально рассчитана матрица уклонов, которая демонстрирует статистическую связь U с V и L. Представлена формула $U = \mathrm{C}(V - 5)^{0,65}/(L + 325)$, $\mathrm{C} = 3\ \text{м}^{0,35}$, которая хорошо совпадает с экспериментальной матрицей уклонов. Немного хуже с матрицей совпадает формула $U = 0{,}28(V + 100)/(L + 455)$, но в этом случае нет необходимости в коэффициенте, уравнивающем размерность левой и правой части, а кроме того, эта формула может работать и при отрицательных значениях высоты (на практике пока не проверено).

Далее необходимо будет разбираться в деталях и выяснять, каковы особенности разных ситуаций (сочетание значений V и L) и разных территорий.

Главное, что необходимо помнить об этих результатах:

- исследована большая, но одна территория;
- есть экспериментальные предпосылки, но нет гарантии, что форма зависимости именно степенная;
- нет гарантии, что для степенной формы найден оптимальный вариант параметров формулы (глобальный минимум отличия), выбор варианта может зависеть и от принятого критерия сходства (разброс).

У рассматриваемой зависимости могут быть реальные особенности, связанные с определёнными участками водотоков, например с тем, насколько при этой длине сформировано русло (Гарцман, 2013). Но такие особенности необходимо чётко отделить от тех, которые вызваны дискретным алгоритмом использованной модели стока, дискретностью измерения, и ещё более грубой дискретностью расчёта матрицы. Пока мы провели только несколько проверок влияния дискретности расчёта матрицы (варьирование величин L_{step} и V_{step}). Ранее (Златопольский, 2025) мы отмечали особенности в начальных шагах линий стока независимо от размера на местности (от разрешения), поэтому предстоит разобраться, есть ли особенности, связанные с пикселями истока и с линиями стока определённой длины в пикселях (а не в метрах): не своеобразна ли ситуация для участка первых 5–10 пикселей стока.

Отметим особенности матрицы уклонов, проявившиеся при её сопоставлении с формулой (1):

- степень сходства формулы с первой строкой (минимальное значение V) резко отличается от сходства с последующими строками (и при $V_{step} = 10$, и при $V_{step} = 20$), возможно, потому что в этот интервал попадают значения для пикселей с $V = 0$;
- мала точность измерения малых уклонов $U < 0{,}01$, а относительная ошибка для них особенно велика, и, видимо, поэтому сильнее остальных участков матрицы от

формулы отличаются связанные с низменностью строки $V < 90$ (и при $V_{step} = 10$, и при $V_{step} = 20$);
- степень сходства формулы с первым столбцом (минимальное значение L) резко отличается от сходства с последующими столбцами (и при $L_{step} = 65$, и при $L_{step} = 130$), возможно, потому что в этот интервал попадают пиксели истоков;
- хуже последующих столбцов совпадают с формулой столбцы с $L < 650$ (и при $L_{step} = 65$, и при $L_{step} = 130$);
- есть особенности матрицы, явно связанные с этой территорией: большая долина Амура (сказывается при $V < 90$); верховья примыкающего с запада бассейна Селемджи (сказывается при $190 < V < 300$).

Изложено начало исследования. Далее, в первую очередь нужно будет:
- проверить, как эти формулы работают на других территориях;
- разобраться с точностью высот в ЦМР (абсолютной и относительной) и с точностью расчёта уклона;
- разобраться с выбором части матрицы, с которой сопоставляем формулу (возможно, частей и формул несколько), и алгоритмом подбора параметров;
- проверить, есть ли другие характеристики, статистически определяющие значение продольного уклона.

Наметим и иной путь исследования. Обратим внимание, что $U = -V'$, и подставим эту производную в упрощённую для наглядности формулу уклона $V' = -0{,}28V/L$. Решение этого дифференциального уравнения $V = V_c(L_c/L)^{0{,}28}$ с начальными условиями V_c и L_c. Так, формула для уклона позволяет искать формальное описание изменения высоты вдоль русла, профиля. А дифференцирование функции, описывающей профиль, даёт формулу уклона. Это направление исследования может оказаться надёжнее, чем непосредственный анализ дифференциальной характеристики — локального уклона.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Мониторинг», госрегистрация № 122042500031-8).

Литература

1. *Гарцман Б. И.* Анализ геоморфологических условий формирования первичных водотоков на основе цифровых моделей рельефа // География и природные ресурсы. 2013. № 1. С. 136–147.
2. *Златопольский А. А.* Мультимасштабный статистический анализ гидрологических характеристик рельефа (по растрам модели стока) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2025. Т. 22. № 4. С. 164–172. DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-4-164-172.
3. *Чернова И. Ю.*, *Нугманов И. И.*, *Даутов А. Н.* Применение аналитических функций ГИС для усовершенствования и развития структурно-морфологических методов изучения неотектоники // Геоинформатика. 2010. № 4. С. 9–23.
4. *Pelletier J. D.* Self-organization and scaling relationships of evolving river networks // J. Geophysical Research: Solid Earth. 1999. V. 104. No. B4. P. 7359–7375.

Statistical relationship of local longitudinal slope of watercourse with other local characteristics (slope matrix)

A. A. Zlatopolsky

Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia
E-mail: aazlat@gmail.com

A description of relief characteristics by a slope matrix is proposed. This matrix reflects the statistical relationship of the local longitudinal slope values with the current length of the runoff line and the current height above sea level. An experimental calculation of the slope matrix using the DTM (digital terrain model) of a section of the Far East (500,000 km^2) is described. The runoff line length is obtained by simulating the runoff in a geographic information system. A relationship between the slope value and the length of the watercourse and the height above sea level is experimentally established. Variants of a formal description of the experimental slope matrix by power functions of length and height are given. The proposed formulas describe the matrix well as a whole, but poorly correspond to the data obtained from the lowland section. Most likely, this is due to the fact that this section has small slopes that are measured with a relatively large error. It is also possible that the accuracy of these heights in the DTM is insufficient. Further, it is necessary to conduct similar studies in significantly different areas. It is proposed to study the relationship between the drop in height along the runoff line and the length of the runoff line, which is closely related to the considered statistical dependence of the longitudinal slope.

Keywords: DTM, runoff model, longitudinal slope, runoff line length, height, slope matrix, statistical dependence, power function

Accepted: 13.11.2025
DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-1-140-149

References

1. Gartsman B. I., Analysis of geomorphological conditions for primary streams formation using digital elevation models, *Geography and Natural Resources*, 2013, V. 34, No. 1, pp. 69–78, DOI: 10.1134/S1875372813010101.
2. Zlatopolsky A. A., Multi-scale statistical analysis of hydrological characteristics of the relief (based on runoff model rasters), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2025, V. 22, No. 4, pp. 164–172 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-4-164-172.
3. Chernova I. Yu., Nugmanov I. I., Dautov A. N., Application of GIS analytic functions for improvement and development of the structural morphological methods of the neotectonics studies, *Geoinformatika*, 2010, No. 4, pp. 9–23 (in Russian).
4. Pelletier J. D., Self-organization and scaling relationships of evolving river networks, *J. Geophysical Research: Solid Earth*, 1999, V. 104, No. B4, pp. 7359–7375.