

## Отрисовка поверхности Луны для автономных оптических навигационных измерений

Д. Г. Пивоварчук, Б. С. Жуков, И. А. Метельков, И. В. Полянский

*Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия*

*E-mails: pivovarchuk@cosmos.ru, bzhukov@cosmos.ru,*

*metelkov@cosmos.ru, ivpolyan@cosmos.ru*

Рассмотрена задача отрисовки поверхности Луны на основе её цифровой модели рельефа. Эта задача возникает в контексте автономной оптической навигации при движении космического аппарата на орбите вокруг Луны и на этапе прилунения. Алгоритм отрисовки требуется для двух задач. Для задачи предварительного составления каталога контрольных точек — ориентиров на поверхности Луны, которые будут использоваться для навигации. И второй задачи, возникающей непосредственно во время навигации, — отрисовки контрольных точек из каталога для их сопоставления с изображениями, получаемыми с камеры. Предлагаемый метод основан на алгоритме трассировки лучей, которые позволяют не только вычислять яркость видимых пикселей изображения поверхности, но и определять пиксели, затенённые окружающим рельефом от Солнца. Входными данными алгоритма являются положение и ориентация камеры и положение Солнца. Для корректного вычисления яркости отрисованных точек задаётся модель отражения поверхности. Для задачи навигации около Луны обычно используется модель Хапке или модель Ломмеля — Зеелигера. Качество отрисовки поверхности предлагаемым алгоритмом проверяется с помощью реальных снимков Луны высокого разрешения. Проводится корреляционный анализ между реальными снимками и отрисованными изображениями, чтобы проверить надёжность поиска контрольных точек для решения задачи навигации.

**Ключевые слова:** Луна, навигация, прилунение, оптические измерения, топографическая карта, контрольные точки, трассировка лучей, отрисовка

Одобрена к печати: 19.12.2025

DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-2-401-411

### Введение

Рассматривается метод отрисовки (моделирования изображения) поверхности Луны для решения задач оптической навигации при движении космического аппарата (КА) по орбите вокруг Луны и в процессе прилунения. Базовая задача оптических навигационных измерений состоит в вычислении трёхмерного вектора положения КА в селеноцентрической вращающейся системе координат (СВСК, SVSK). Для решения этой задачи на борт устанавливается телевизионная камера и закладывается каталог контрольных точек (КТ), т. е. площадных ориентиров на поверхности Луны, априорно привязанных к СВСК. Телевизионная камера наблюдает поверхность Луны. Навигационный алгоритм (Жуков и др., 2018) осуществляет поиск КТ на полученных изображениях и вычисляет требуемый вектор положения КА. Важно отметить, что контрольные точки привязаны к СВСК и поэтому представляются абсолютными ориентирами для решения задачи навигации, т. е. в процессе решения задачи навигации по контрольным точкам не происходит накопления ошибок.

Первая задача применения алгоритма отрисовки поверхности Луны заключается в составлении каталога КТ. Каждая из них должна обладать рядом свойств, которые гарантируют точность вычисления её положения, уникальность и независимость от окружающего рельефа. Для выбора точек, удовлетворяющих этим свойствам, необходимо отрисовать всю интересующую поверхность Луны при различных условиях освещённости.

Второй задачей применения алгоритма стала отрисовка КТ из каталога непосредственно во время решения задачи навигации. Контрольные точки хранятся в каталоге в виде трёхмерной модели рельефа. Чтобы найти КТ на изображении, её трёхмерную модель нужно

отрисовать с учётом положения наблюдения (т. е. положения КА) и положения источника освещения (т. е. положения Солнца). Чем точнее будет отрисованное изображение КТ, тем точнее будут найдены её координаты на изображении и точнее будет вычислено положение КА. Поэтому корректная отрисовка КТ выступает важным элементом решения задачи навигации. Предлагаемый алгоритм основан на методе трассировки лучей, который позволяет вычислять яркость видимых пикселей изображения поверхности и определить пиксели, затенённые окружающим рельефом от Солнца.

## Цифровые модели рельефа Луны

Для оптических навигационных измерений на окололунных орбитах и при посадке на Луну предлагается использовать имеющиеся цифровые модели рельефа (ЦМР) Луны. Особенность оптических изображений поверхности Луны по сравнению, например, с поверхностью Земли, заключается в отсутствии существенных спектральных контрастов. Кроме того, при фазовых углах (углах Солнце – объект – наблюдатель) больше  $\sim 40^\circ$  альбедные различия на поверхности Луны существенно не проявляются, и её изображения определяются в основном рельефом. Поэтому для изображений поверхности Луны можно использовать чёрно-белое представление, которое можно восстановить на основе существующих ЦМР, известного положения Солнца, известной точки наблюдения и известной ориентации камеры. Отражающие свойства поверхности Луны хорошо описываются моделью Хапке (Нарке, 2012), которую при реальных условиях наблюдения можно аппроксимировать более простой моделью Ломмеля – Зеелигера (Нарке, 2012). Цифровые модели рельефа доступны на всю поверхность Луны как свободно распространяемый ресурс (<http://imbrium.mit.edu/BROWSE>). В зависимости от широты можно использовать ЦМР различного разрешения (таблица).

Выбор ЦМР Луны в зависимости от разрешения

Широта к полюсу, град	ЦМР	Разрешение карты, м	Проекция
0–60	SLDEM-2015	60	Цилиндрическая
60–75	LDEM_512P	60	Цилиндрическая
75–80	LDEM_75N_30M, LDEM_75S_30M	30	Стереографическая
80–85	LDEM_80N_20M, LDEM_80S_20M	20	Стереографическая
85–90	LDEM_85N_10M, LDEM_85S_10M	10	Стереографическая

## Контрольная точка

Цифровая модель рельефа имеет большой объём, поэтому для решения задачи навигации используется не ЦМР, а набор её локальных областей. Эти локальные области должны хорошо распознаваться и отслеживаться на последовательности изображений при различных условиях освещённости. Такие локальные области называются контрольными точками. Они выбираются заранее и формируются в каталог, который затем используется для навигации.

Каждая контрольная точка в каталоге описывается её положением в СВСК, разрешением, размером и трёхмерной моделью. Моделью контрольной точки становится соответствующий фрагмент ЦМР. Далее, когда потребуется использовать контрольную точку, она отрисовывается, т. е. представляется в виде изображения на основе её модели, положения и ориентации камеры и положения Солнца.

Для того чтобы контрольная точка была надёжной в смысле распознавания и отслеживания на изображении, она выбирается в соответствии со следующими признаками:

1. Чувствительность к смещениям (локализуемость), т. е. положение контрольной точки должно вычисляться однозначно, не должно быть степеней свободы сдвига положения из-за однородности изображения вдоль некоторого направления.

2. Уникальность, т. е. непохожесть на другие контрольные точки в потенциальной области поиска.
3. Независимость от окружающего рельефа, т. е. контрольная точка не должна затеняться окружающим рельефом из каких-то допустимых точек наблюдения или при каких-то положениях Солнца.

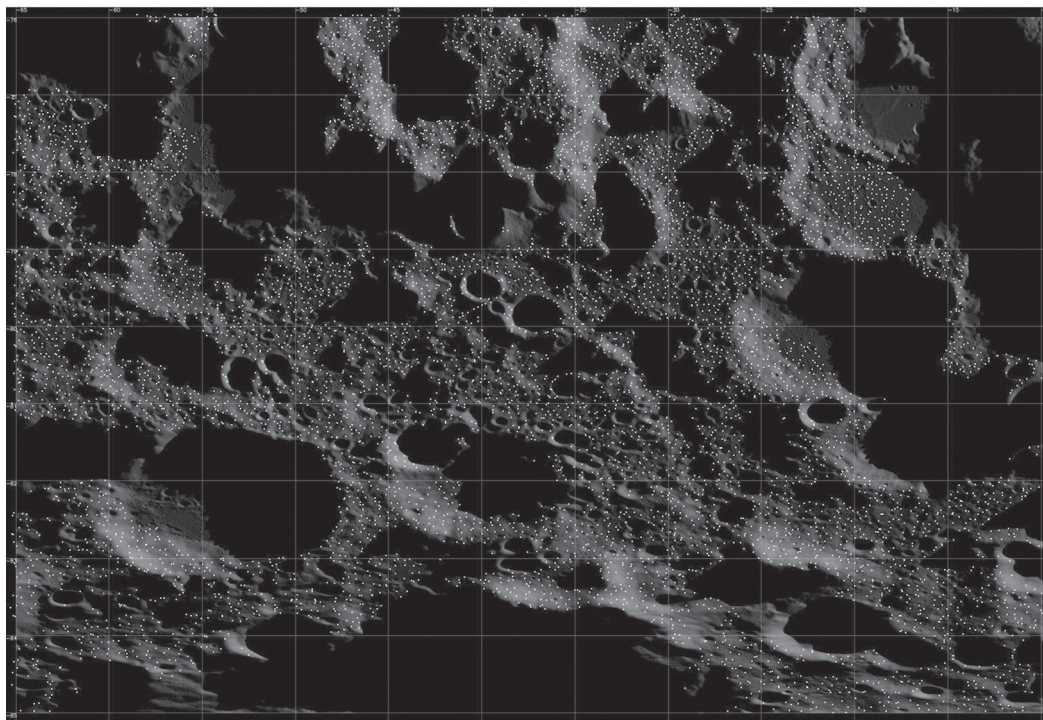


Рис. 1. Поверхность Луны при местном угле Солнца  $4^\circ$  над горизонтом и контрольные точки для навигации

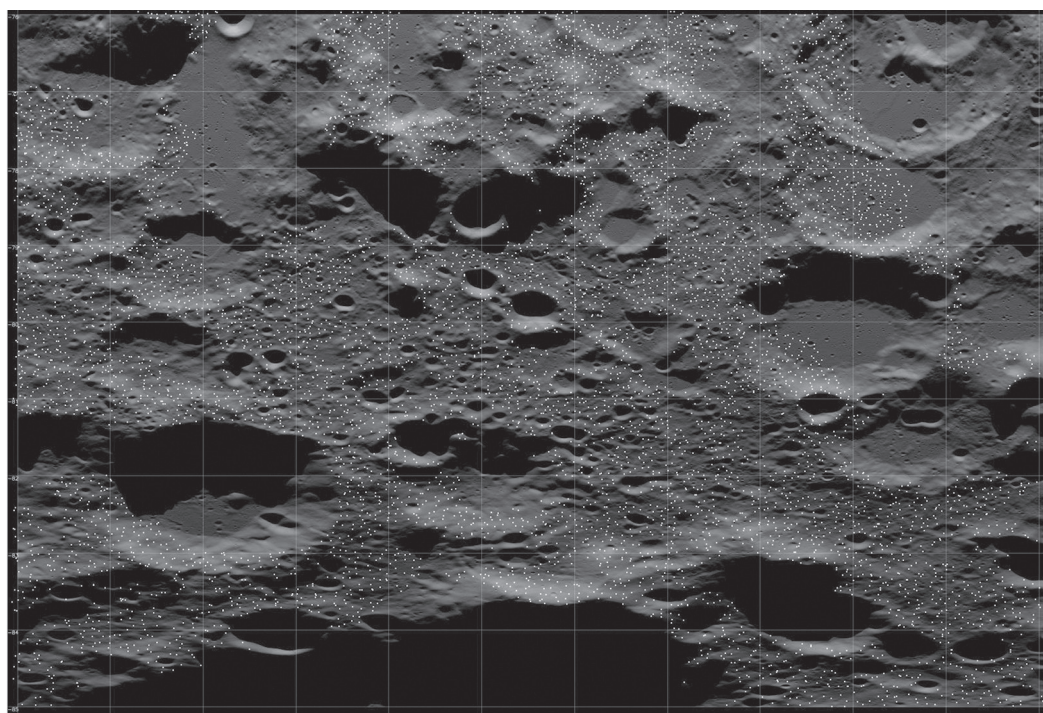


Рис. 2. Поверхность Луны в местный полдень и контрольные точки для навигации

Алгоритм отрисовки поверхности активно применяется для составления каталога КТ, удовлетворяющих перечисленным выше свойствам. Для поиска КТ в настоящей работе используется детектор особых точек Харриса (Harris, Stephens, 1988), который был разработан для нахождения на изображении локальных угловых структур, чувствительных к смещениям. Затем найденные особые точки проверяются на уникальность в заданной окрестности вокруг особой точки и на независимость от окружающего рельефа.

Изображение поверхности Луны существенно зависит от текущего положения Солнца. Для иллюстрации приведены два изображения одной и той же поверхности: при восходе Солнца (рис. 1, см. с. 403) и в местный полдень (рис. 2, см. с. 403). Видно, что эти изображения существенно различаются, поэтому выбираемые контрольные точки должны быть либо универсальными для различных положений Солнца, либо содержать дополнительную информацию, при каких положениях Солнца их можно использовать для навигации. Влияние освещённости на видимость КТ так же анализируется с помощью алгоритма отрисовки поверхности.

Каталог обеспечивает равномерное покрытие интересующей поверхности контрольными точками в зависимости от разрешения ЦМР.

## Системы координат

Алгоритм отрисовки использует несколько систем координат.

Селеноцентрическая вращающаяся система координат — это трёхмерная декартова система координат  $(x, y, z)$ , её оси привязаны к Луне. Центр находится в центре масс Луны, ось  $z$  направлена по средней оси вращения Луны, ось  $x$  лежит в плоскости среднего лунного экватора и направлена к Земле (нулевой меридиан), ось  $y$  дополняет систему до правой. Радиус референц-сферы  $R_M = 1\,737\,400$  м.

Внутренняя система координат камеры (ВСК, VSK) связана с матрицей фотоприёмного устройства. Начало координат находится в главной точке объектива, ось  $Z$  направлена вдоль оптической оси в направлении от плоскости матрицы фотоприёмного устройства, ось  $X$  направлена вдоль строк, ось  $Y$  — вдоль столбцов и дополняет систему до правой тройки. Эта система координат задаёт положение и ориентацию камеры.

Система координат изображения (IMG) — это двумерная декартова система координат  $(u, v)$ , которая определяет координаты пикселя на изображении, где  $v$  — номер строки,  $u$  — номер пикселя в строке.

Касательная система координат (ENU) — это трёхмерная декартова система координат. Она порождается касательной плоскостью к сфере Луны в заданной центральной точке. Направление осей касательной плоскости:  $OX$  — восток,  $OY$  — север,  $OZ$  — вверх.

## Входные данные для алгоритма отрисовки поверхности

Перечислим необходимые данные для отрисовки поверхности и используемые системы координат:

1. Положение и ориентация внутренней системы координат камеры относительно поверхности Луны задаётся вектором положения ВСК в СВСК  $\mathbf{T}_{SVSK}^{VSK}$  и матрицей вращения из СВСК к ВСК  $\mathbf{R}_{SVSK \rightarrow VSK}$ .
2. Область ЦМР, которую требуется отрисовать. Эта область трёхмерной поверхности перед отрисовкой преобразуется к касательной декартовой системе координат (ENU). В случае контрольной точки центром системы координат выступает центр контрольной точки. В случае произвольной области центр вычисляется как пересечение оптической оси камеры  $OZ$  с поверхностью. Система координат ENU задаётся вектором положения в СВСК  $\mathbf{T}_{SVSK}^c$  и матрицей вращения из СВСК к ENU  $\mathbf{R}_{SVSK \rightarrow ENU}^c$ .
3. Вектор направления на Солнце в СВСК  $LSVSK \mathbf{L}_{SVSK}^{Sun}$ .

#### 4. Матрица проекции для перехода из ВСК к системе координат IMG

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} f & 0 & c_x \\ 0 & f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $f$  — фокусное расстояние;  $c_x, c_y$  — главная точка матрицы. Эти параметры определяются из калибровки. Матрица проекции применяется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u'}{w'} \\ \frac{v'}{w'} \end{pmatrix}.$$

Отрисовка поверхности происходит в системе координат IMG.

### Отрисовка поверхности

Алгоритм отрисовки поверхности основан на алгоритме трассировки лучей. Его идея заключается в трассировке двух лучей: луча от точки наблюдения до точки на ЦМР для вычисления яркости точки на изображении и луча от точки на ЦМР до Солнца для проверки, что точка не затенена окружающим рельефом.

Яркость точки определяется на основе модели отражения поверхности Луны. Для расчетов на борту КА используется эффективная с вычислительной точки зрения модель отражения Ломмеля — Зеелигера (Нарке, 2012):

$$f(i, e) \sim \frac{\cos(i)}{\cos(i) + \cos(e)},$$

где  $i, e$  — угол падения и отражения соответственно.

Как это было описано выше, модель поверхности хранится в виде двумерного массива высот, преобразованного к локальной касательной системе координат ENU:

$$\{x_{ij}^{\text{ENU}}, y_{ij}^{\text{ENU}}, h_{ij}^{\text{ENU}}\},$$

здесь  $x, y, h$  — координаты и высота ячейки в ENU.

Алгоритм отрисовки одной ячейки поверхности  $(x, y, h)$  включает в себя следующие шаги:

1. Вычисление пикселя изображения  $(u, v)$ , куда проецируется ячейка  $(x, y, h)$ , используя матрицы перехода между системами координат и матрицу проекции:

$$\mathbf{R}_{\text{ENU} \rightarrow \text{VSK}} = \mathbf{R}_{\text{SVSK} \rightarrow \text{VSK}} \left( \mathbf{R}_{\text{SVSK} \rightarrow \text{ENU}}^c \right)^T, \quad \mathbf{T}_{\text{VSK}}^c = \mathbf{R}_{\text{SVSK} \rightarrow \text{VSK}} \left( \mathbf{T}_{\text{SVSK}}^c - \mathbf{T}_{\text{SVSK}}^{\text{VSK}} \right),$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \mathbf{P} \left( \mathbf{R}_{\text{ENU} \rightarrow \text{VSK}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ h \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{\text{VSK}}^c \right), \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u'}{w'} \\ \frac{v'}{w'} \end{pmatrix}.$$

2. Вычисление радиус-вектора точки наблюдения в системе координат ENU:

$$\mathbf{T}_{\text{ENU}}^{\text{VSK}} = \mathbf{R}_{\text{SVSK} \rightarrow \text{ENU}} \left( \mathbf{T}_{\text{SVSK}}^{\text{VSK}} - \mathbf{T}_{\text{SVSK}}^c \right).$$

3. Вычисление вектора направления и единичного вектора направления наблюдения в ENU:

$$l_{\text{ENU}}(u, v) = \mathbf{R}_{\text{SVSK} \rightarrow \text{ENU}} \mathbf{R}_{\text{SVSK} \rightarrow \text{VSK}}^T \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{l}_{\text{ENU}}(u, v) = l_{\text{ENU}}(u, v) / \|l_{\text{ENU}}(u, v)\|.$$

4. Луч направления наблюдения задаётся формулой

$$\mathbf{T}_{\text{ENU}}^{\text{VSK}} + t\bar{l}_{\text{ENU}}(u, v),$$

где  $t$  — параметр дальности вдоль луча наблюдения,  $t > 0$ .

5. Применение алгоритма обхода вокселей (Amanatides, Woo, 1987) для построения линии на растровом представлении поверхности  $\{x_{ij}^{\text{ENU}}, y_{ij}^{\text{ENU}}, h_{ij}^{\text{ENU}}\}$ . Вдоль луча из п. 4 делается трассировка по ячейкам поверхности до тех пор, пока высота луча не станет меньше, чем высота, записанная в ячейке  $h_{ij}^{\text{ENU}}$ . Подробно алгоритм описан в разд. «Трассировка луча».

6. Вычисление точной точки пересечения луча с поверхностью  $\mathbf{p}_{\text{ENU}}$  и вычисление нормали к поверхности в точке пересечения  $\mathbf{n}_{\text{ENU}}$ . Алгоритм будет описан в разд. «Пересечение луча и треугольника».

Далее происходит проверка, что точка не затенена рельефом:

7. Вычисление направления луча к Солнцу в ENU:

$$\mathbf{L}_{\text{ENU}}^{\text{Sun}} = \mathbf{R}_{\text{SVSK} \rightarrow \text{ENU}} \mathbf{L}_{\text{SVSK}}^{\text{Sun}}.$$

8. Для вычисления тени берётся точка пересечения  $\mathbf{p}_{\text{ENU}}$  из п. 6 и делается сдвиг от этой точки к Солнцу:

$$\mathbf{p}_{\text{ENU}}^{\text{Sun}} = \mathbf{p}_{\text{ENU}} + \mathbf{L}_{\text{ENU}}^{\text{Sun}} D^{\text{Sun}}.$$

где  $D^{\text{Sun}}$  — дальность в направлении Солнца (достаточно рассматривать диапазон дальности, определяемый максимальной и минимальной высотой рельефа Луны).

9. Делается трассировка луча от точки  $\mathbf{p}_{\text{ENU}}^{\text{Sun}}$  в направлении  $-\mathbf{L}_{\text{ENU}}^{\text{Sun}}$  к поверхности, и если этот луч пересекает поверхность, то вычисляется точка пересечения:

$$\mathbf{p}_{\text{ENU}}^{\text{SunIntersect}} = \mathbf{p}_{\text{ENU}}^{\text{Sun}} - t^{\text{Sun}} \mathbf{L}_{\text{ENU}}^{\text{Sun}}.$$

10. Считаем, что точка является затенённой, если расстояние между точкой  $\mathbf{p}_{\text{ENU}}^{\text{SunIntersect}}$  и точкой  $\mathbf{p}_{\text{ENU}}$  из п. 6 большое:

$$\|\mathbf{p}_{\text{ENU}}^{\text{SunIntersect}} - \mathbf{p}_{\text{ENU}}\| > \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — малое число.

11. Вычисление яркости точки по закону Ломмеля — Зеелигера:

$$\cos(i) = \left( \mathbf{n}_{\text{ENU}}, \mathbf{L}_{\text{ENU}}^{\text{Sun}} \right), \quad \cos(e) = \left( \mathbf{n}_{\text{ENU}}, \bar{l}_{\text{ENU}}(u, v) \right), \quad f(i, e) = \frac{\cos(i)}{\cos(i) + \cos(e)}.$$

Применяя описанный алгоритм к каждой ячейке поверхности, получаем изображение в плоскости ENU, соответствующее заданной точке наблюдения и заданному положению Солнца.

### Трассировка луча

Пусть поверхность задана прямоугольной топографической сеткой высот  $\{h_{ij}\}$ , где  $i = 1, \dots, I$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Размер каждой ячейки сетки равен  $(\Delta i, \Delta j)$ . Пусть задан луч с началом в точке  $\mathbf{p}$  и направлением  $\mathbf{l}$ . Требуется найти пересечение луча  $(\mathbf{p} + \mathbf{l})$  с поверхностью, что означает определить параметр дальности вдоль луча  $t \geq 0$ .

Трассировка луча основана на алгоритме обхода вокселей (Amanatides, Woo, 1987). В процессе трассировки луч движется от одной ячейки к другой. Вычисляются следующие параметры:

1.  $\Delta t_i, \Delta t_j$  — приращения параметра  $t$ , чтобы полностью пересечь ячейку по направлению  $i$  и  $j$  соответственно:

$$\Delta t_i = \frac{\Delta_i}{|\mathbf{l}_x|}, \quad \Delta t_j = \frac{\Delta_j}{|\mathbf{l}_y|}.$$

2. Знаки направления движения луча

$$s_i = \text{sign}(\mathbf{l}_x), \quad s_j = \text{sign}(\mathbf{l}_y).$$

3. Координаты текущей ячейки сетки  $(r_i, r_j)$  — целые числа.

Процесс трассировки заключается в последовательном движении луча от границы одной ячейки к границе следующей. Это движение описывается пересчётом двух значений:  $t_i$  — дальностью луча до пресечения с границей ячейки вдоль  $i$ ,  $t_j$  — дальностью луча до пресечения с границей ячейки вдоль  $j$ .

Алгоритм трассировки вычисляет координаты начальной ячейки  $(r_i, r_j)$  и начальные параметры дальности  $(t_i, t_j)$  по заданной начальной точке  $\mathbf{p}$ . Далее, алгоритм последовательно обновляет параметры  $(t_i, t_j)$ , текущие координаты ячейки  $(r_i, r_j)$  и текущую высоту луча  $h_{ray}$  следующим образом:

1. Если  $t_i < t_j$ , тогда

$$t_i := t_i + \Delta t_i, \quad r_i := r_i + s_i, \quad h_{ray} = \mathbf{p}_z + t_i \mathbf{l}_z.$$

2. Иначе

$$t_j := t_j + \Delta t_j, \quad r_j := r_j + s_j, \quad h_{ray} = \mathbf{p}_z + t_j \mathbf{l}_z.$$

Приближённое условие, что ячейка  $(r_i, r_j)$  и луч пересекаются, можно сформулировать следующим образом:

$$h_{ray} \leq h_{00} \vee h_{ray} \leq h_{10} \vee h_{ray} \leq h_{01} \vee h_{ray} \leq h_{11}.$$

Если это условие выполняется, то, возможно, луч пересекает поверхность и нужно проверить точное условие. Здесь  $h_{00}, h_{10}, h_{01}, h_{11}$  — высота в четырёх узлах, составляющих рассматриваемую ячейку. Точная проверка пересечения луча и ячейки описана в разд. «Пересечение луча и треугольника».

## Пересечение луча и треугольника

Алгоритм трассировки луча позволяет найти ячейку поверхности, где её пересекает луч из точки наблюдения. Для нахождения точных координат точки пересечения прямоугольная ячейка представляется в виде двух треугольников в трёхмерном пространстве и применяется алгоритм вычисления точки пересечения между трёхмерным треугольником и трёхмерным лучом.

Алгоритм (Möller, Trumbore, 1997) принимает на вход три трёхмерные вершины треугольника  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  и луч  $(\mathbf{p} + t\mathbf{L})$  и вычисляет искомую точку пересечения в виде коэффициентов выпуклой комбинации относительно вершин треугольника. Расчёт коэффициентов выпуклой комбинации позволяет легко проверить, лежит ли точка пересечения внутри треугольника. Алгоритм вычисляет пять вспомогательных векторов и одно значение:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0; \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0; \mathbf{s} = \mathbf{p} - \mathbf{v}_0; \mathbf{g} = \mathbf{L} \times \mathbf{e}_2; \mathbf{q} = \mathbf{s} \times \mathbf{e}_1; n = (\mathbf{g}, \mathbf{e}_1)$$

и три результирующих числа:

$$t = \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{e}_2)}{n}; \quad d_1 = \frac{(\mathbf{g}, \mathbf{s})}{n}; \quad d_2 = \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{L})}{n}.$$

Здесь  $t$  — дальность до треугольника вдоль луча;  $d_1, d_2$  — коэффициенты выпуклой комбинации точки пересечения луча и треугольника относительно вершин треугольника. Если треугольник и луч пересекаются, то должно выполняться условие

$$d_1 \geq 0 \wedge d_2 \geq 0 \wedge d_1 + d_2 \leq 1 \wedge t \geq 0.$$

Тогда точка пересечения вычисляется по формуле

$$\mathbf{v} = (1 - d_1 - d_2)\mathbf{v}_0 + d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2.$$

### Результаты

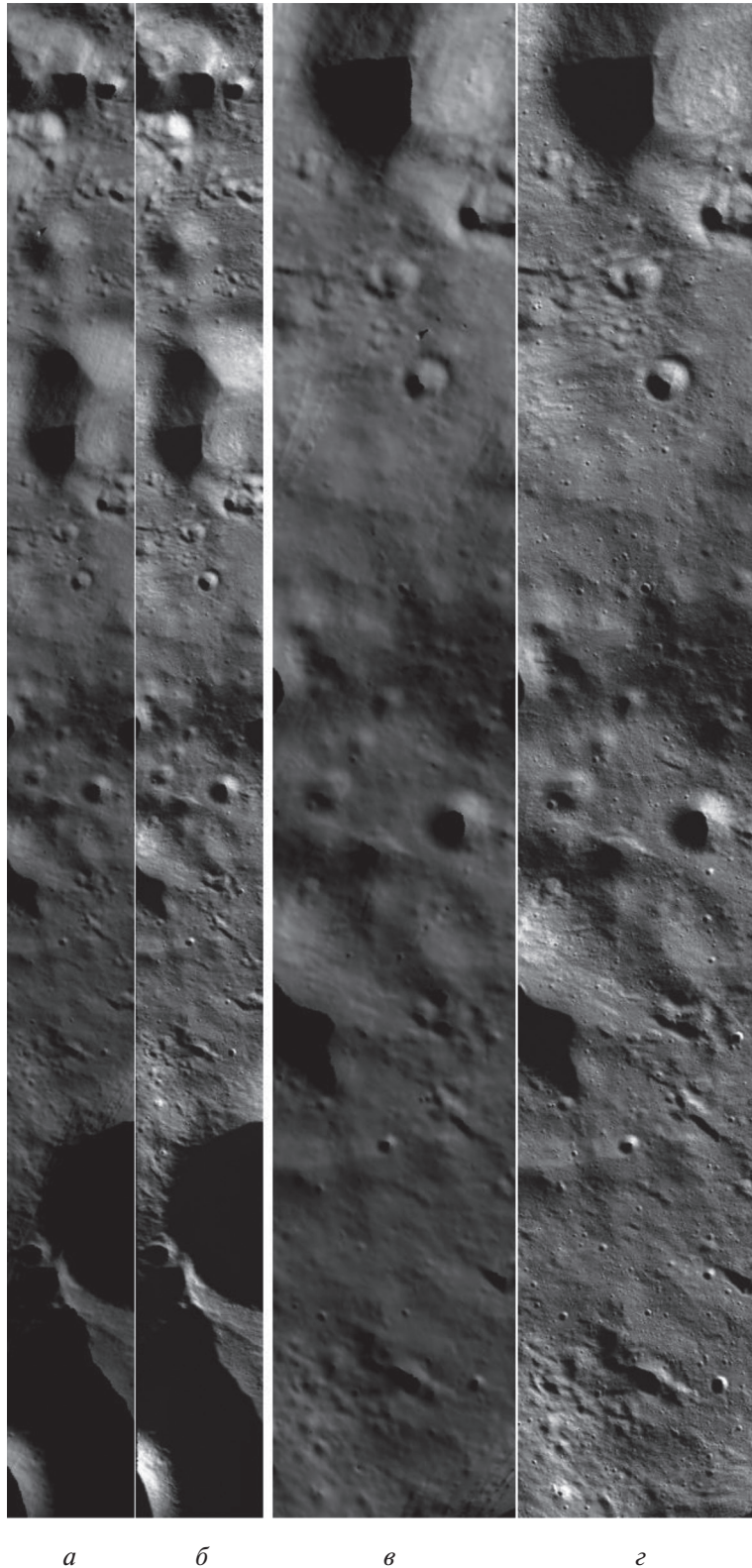


Рис. 3. Изображения поверхности Луны: а, в — отрисованные; б, г — полученные с LROC-NAC

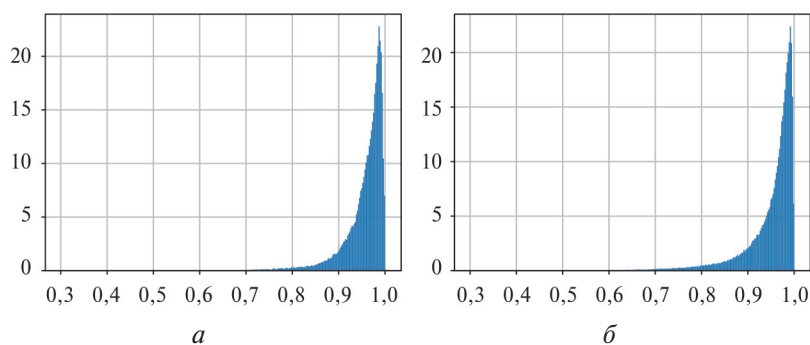
Для оценки качества отрисовки изображений поверхности Луны по её ЦМР проводилось сравнение полученных модельных (отрисованных) изображений с реальными изображениями поверхности Луны, полученными узкоугольной камерой LROC-NAC (англ. Lunar Reconnaissance Orbiter Camera Narrow Angle Camera) на автоматической межпланетной станции LRO (англ. Lunar Reconnaissance Orbiter). Разрешение камеры LROC-NAC составляет около 2 м на пиксель, и для каждого снимка известны положение КА, ориентация КА и положение Солнца. Согласно *таблице* наилучшее разрешение изображения, которое можно отрисовать с помощью ЦМР, равно 10 м на пиксель, поэтому изображения LROC-NAC, вообще говоря, более детализированные, чем отрисованные. Это позволяет использовать изображения, полученные от LROC-NAC, для проверки алгоритма отрисовки.

На *рис. 3* (см. с. 408) приведено сравнение модельных и реальных изображений. Иллюстрация на *рис. 3а* смоделирована для случая, когда разрешение отрисованного изображения соответствует разрешению ЦМР. Для проверки качества отрисовки был выбран соответствующий ему реальный снимок от LROC-NAC (см. *рис. 3б*) и заглублен до разрешения отрисованного изображения.

Вторая пара изображений на *рис. 3* (см. *рис. 3в* и *г*) смоделирована для случая, когда разрешение отрисованного изображения на *рис. 3в* выше, чем разрешение ЦМР. Иллюстрации на *рис. 3в* соответствует реальное изображение от LROC-NAC (см. *рис. 3г*). Сравнение второй пары изображений сделано, чтобы проверить корректность алгоритма отрисовки для случая, когда требуется интерполяция точек и нормалей поверхности.

Сравнение представленных изображений показывает корректность алгоритма отрисовки. Похожесть распределения полутеней говорит о корректности отражающей функции поверхности и вычисления нормалей. Похожесть конфигураций затенённых участков свидетельствует о корректности моделирования высоты и корректности учёта положения Солнца.

Одна из основных задач отрисовки поверхности — моделирование КТ. Отрисованные КТ должны надёжно находиться на изображениях, полученных от камеры в процессе навигации. Для решения задачи поиска может использоваться нормированный и центрированный коэффициент корреляции.



*Рис. 4.* Гистограмма коэффициента корреляции между отрисованными и реальными изображениями: *а* — между *рис. 3а* — *б*; *б* — между *рис. 3в* — *г*

На *рис. 4* построены гистограммы коэффициента корреляции между отрисованными и реальными изображениями. Каждое из двух изображений было просканировано окном размера  $16 \times 16$  пикселей. Между соответствующими окнами отрисованного и реального изображения были вычислены нормированные и центрированные коэффициенты корреляции. Гистограмма *рис. 4а* соответствует паре изображений *рис. 3а* и *б*. Доля значений коэффициента корреляции более 0,9 равна 89 %, а мода гистограммы составляет 0,985. Гистограмма *рис. 4б* соответствует паре изображений *рис. 3в* и *г*, когда разрешение ЦМР ниже разрешения изображения. Доля значений коэффициента корреляции более 0,9 равна 84 %, а мода гистограммы — 0,985. Эти значения позволяют сделать заключение, что точность отрисовки КТ на различных масштабах предложенным алгоритмом достаточная для их поиска на реальном изображении.

## Заключение

Предложен метод отрисовки поверхности Луны по её ЦМР, основанный на алгоритме трассировки лучей. Показана важность качественной отрисовки поверхности для корректного составления каталога контрольных точек и для точного решения задачи навигации. Метод проверен на реальных изображениях, полученных с помощью узкоугольной камеры LROC-NAC. Проведено сравнение реальных и отрисованных изображений с помощью корреляционного анализа, которое позволяет утверждать, что метод применим для решения задачи оптической навигации.

## Литература

1. Жуков Б. С., Гришин В. А., Жуков С. Б. и др. Моделирование оптических навигационных измерений на траектории полёта к районам посадки на Луну // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2018. Т. 15. № 6. С. 154–168. DOI: 10.21046/2070-7401-2018-15-6-154-168.
2. Hapke B. Theory of reflectance and emittance spectroscopy. N.Y.: Cambridge University Press, 2012. 527 p.
3. Harris C., Stephens M. A combined corner and edge detector // Proc. 4<sup>th</sup> Alvey Vision Conf. Manchester, UK, 1988. P. 147–151.
4. Amanatides J., Woo A. A fast voxel traversal algorithm for ray tracing // Proc. European Computer Graphics Conf. 1987. V. 87. P. 3–10.
5. Möller T., Trumbore B. Fast, minimum storage raytriangle intersection // J. Graphics Tools. 1997. V. 2. Iss. 1. P. 21–28.

## Rendering of the lunar surface for autonomous optical navigation measurements

D. G. Pivovarchuk, B. S. Zhukov, I. A. Metelkov, I. V. Polyanskiy

*Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia  
E-mails: pivovarchuk@cosmos.ru, bzhukov@cosmos.ru,  
metelkov@cosmos.ru, ivpolyan@cosmos.ru*

Rendering the lunar surface based on a topographic map is considered. This problem arises in the context of autonomous optical navigation during the spacecraft motion in orbit around the Moon and during the landing phase. The rendering algorithm is required for two tasks. The first task is the preliminary creation of a catalog of control points — landmarks on the lunar surface — that will be used for navigation. The second task arises directly during navigation: rendering the control points from the catalog for their matching with images captured by the camera. The proposed method is based on a ray tracing algorithm that allows both computing brightness of visible pixels in the surface image and identifying pixels shadowed by the surrounding terrain. The algorithm input data are camera position and orientation, and Sun position. To accurately compute brightness of the rendered points, a surface reflection model is specified. For lunar navigation tasks, the Hapke model or the Lommel–Seeliger model is usually employed. The quality of surface rendering produced by the proposed algorithm is verified using high resolution real images of the Moon. A correlation analysis between real images and rendered images is carried out to assess the reliability of control points detection for solving the navigation problem.

**Keywords:** Moon, navigation, moon landing, optical measurements, topographic map, control points, ray tracing, rendering

Accepted: 19.12.2025

DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-2-401-411

## References

1. Zhukov B. S., Grishin V. A., Zhukov S. B. et al., Simulation of optical navigation measurements at the approach trajectory to the lunar landing areas, *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2018, V. 15, No. 6, pp. 154–168 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2018-15-6-154-168.
2. Hapke B., *Theory of reflectance and emittance spectroscopy*, New York: Cambridge University Press, 2012, 527 p.
3. Harris C., Stephens M., A combined corner and edge detector, *Proc. 4<sup>th</sup> Alvey Vision Conf.*, Manchester, UK, 1988, pp. 147–151.
4. Amanatides J., Woo A., A fast voxel traversal algorithm for ray tracing, *Proc. European Computer Graphics Conf.*, 1987, V. 87, pp. 3–10.
5. Möller T., Trumbore B., Fast, minimum storage ray-triangle intersection, *J. Graphics Tools*, 1997, V. 2, Iss. 1, pp. 21–28.