

Формальное описание профиля линии стока на основе статистического анализа цифровой модели рельефа. Часть вторая: матрица падения

А. А. Златопольский

Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия

E-mail: aazlat@gmail.com

Излагается продолжение поиска формального описания усреднённого профиля водотока. Опираемся на статистический анализ линий стока, полученных моделированием стока по цифровой модели рельефа. Предложен новый инструмент изучения рельефа — матрица падения, которая отражает связь величины падения с расстоянием до истока и высотой истока над уровнем моря. Приведён подробно проиллюстрированный пример этой матрицы для большого участка Дальнего Востока. Дана оценка разброса данных, попадающих в одну ячейку матрицы. С матрицей падения сопоставили приведённую в предыдущей статье формулу падения. Разработан и описан алгоритм поиска параметров этой формулы, дающих хорошее совпадение формулы с большей частью матрицы. Проверили, что нет систематического накопления ошибки с увеличением длины линий стока. Аналогичные исследования провели ещё для двух территорий и для матрицы, суммирующей данные по трём территориям. Насколько оказалось возможным объединили формулы, полученные для разных территорий. Подтверждена необходимость учёта высоты истока и степенной характер зависимости от неё.

Ключевые слова: ЦМР, модель стока, профиль линии стока, падение линии стока, длина линии стока, высота истока, статистическая зависимость

Одобрена к печати: 29.05.2026

DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-4-171-181

Введение

Продолжаем исследовать задачу, поставленную в предыдущей публикации, — формальное описание общих, базовых, статистических, средних закономерностей формы продольного профиля водотока (Златопольский, 2025). В той статье даны ссылки на работы, в которых отмечено, что уже к 1950 гг. было предложено много вариантов описания профиля, включая степенную и логарифмическую функции. Возможность для аккуратного, объёмного статистического исследования нам даёт моделирование стока. Цифровая модель рельефа (ЦМР) указывает высоту V (в м) в любой точке территории. В геоинформационной системе (ГИС) модель стока D8 задаёт по ЦМР направление стока в каждой точке, определяя этим линии стока (ЛС) (Чернова и др., 2010). Для каждой точки территории в ГИС измеряется расстояние вдоль ЛС до самого дальнего истока L_d . Проследившая линию стока вверх, находим этот исток, определяем его высоту V_0 (авторская программа) и падение к данной точке $F = V_0 - V$. Поставленную задачу решаем поэтапно, начиная с тех ситуаций, когда есть возможность получить достаточно точное формальное описание. Формулы, описывающие профиль, обычно учитывают L_d (иногда расстояние до устья), будем включать и другие характеристики территории, в первую очередь рельефа. Значения линейных характеристик (расстояние, высота...) входят в формулы в метрах. В таблицах и тексте они также приведены в метрах, если не указано, что расстояние дано в километрах.

Продолжим работу с формулой, полученной нами по экспериментальным данным:

$$F = C \cdot V_0^q \ln \left(\frac{L_d}{M} + b \right), \quad (1)$$

где параметры C , q , b безразмерные, M — в метрах, $C = 1$; $q = 0,7$; $M = 307$; $b = 1,06$. Используем двумерное описание данных, аналогичное матрице уклонов (Златопольский, 2026). В отличие от уклона падение более устойчивая интегральная характеристика, а кроме того,

теперь задачу облегчает понимание, какую именно зависимость ищем. Экспериментально рассчитываем матрицу падения $F^{tab}(V_0, L_d)$ и сопоставляем с ней формулу (1).

Постараемся так модифицировать эту формулу, чтобы она совпадала с возможно бóльшим числом клеток матрицы, т. е. с бóльшим числом ситуаций (V_0, L_d) . Можно интересоваться и совпадением формулы (1) с бóльшим числом точек территории. Разница принципиальная: некоторые ситуации встречаются на территории в тысячи раз чаще, «забывая» остальные. Так около 30 % точек территории — это истоки (и формула $F = 0$ совпадает с третьей территории), а ещё 40 % территории относятся к первым трём шагам стока. На предыдущем этапе мы уже отметили трудности при работе с ЛС низменности (недостаточная точность ЦМР и, как следствие, ошибки моделирования стока) и особенностями ЛС на первых шагах стока (особенности начальных участков водотоков и неточность дискретного измерения). Поэтому не будем стремиться найти закономерность сразу для всех ситуаций (всех значений высоты и расстояния), работаем с теми, где закономерность определяется надёжно и может стать точкой опоры.

Применяем достаточно надёжную и доступную модель рельефа SRTM (*англ.* Shuttle Radar Topographic Mission) в проекции UTM (*англ.* Universal Transverse Mercator), устранив локальные понижения. Декларируется, что в SRTM абсолютная ошибка измерения высоты меньше 16 м. Такая ошибка может существенно сказаться при малых значениях высоты и/или падения. Рассмотрим три территории с условными названиями (для краткости): «Амур» — от горной системы Сихотэ-Алинь до р. Буреи; «Кама» — Татарстан и вокруг; «Пара» — юго-восток бассейна Амазонки, *табл. 1*. На территории «Амур» мы настроим алгоритм анализа, а в остальных местах его повторим. Изучим также и общее описание трёх территорий.

Таблица 1. Территории, ЦМР которых использовались для экспериментальных расчётов

Территория	Широта	Долгота	Размер, км	Размер, пиксель	Разрешение, км/пиксель	Площадь суши, км ²	Площадь суши, пиксель
Амур	47,15—53,5° с. ш.	130,66—140,11° в. д.	717,50×719,40	11 033×11 004	0,0651	502 663	118 977 538
Кама	52—58° с. ш.	48—57° в. д.	617,70×683,40	9 488×10 498	0,0651	412 885	97 424 163
Пара	3—10° ю. ш.	48—54° з. д.	667,08×775,29	10 245×11 907	0,0651	510 418	121 608 897

Расчёт матрицы падения

Матрицей падения $F^{tab}(m, n)$ называем двумерную таблицу, в каждом элементе которой указано среднее падение для пикселей со значениями высоты и расстояния в интервалах с номерами m и n . Целые $m \geq 0$ и $n \geq 1$ — номера строк и столбцов таблицы (не включаем истоки с $n = 0$ и $F = 0$). Ячейке (m, n) соответствует интервал расстояний $nL_{step} \leq L_d < (n+1)L_{step}$ и высот $mV_{0step} \leq V_0 < (m+1)V_{0step}$. В обсуждении используем и обозначение $F^{tab}(V_0, L_d)$, где V_0 и L_d относятся к центру интервалов: $V_0 = V_{0step}(m + 0,5)$, $L_d = L_{step}(n + 0,5)$. Для статистической оценки значений матрицы падения считаем ещё две матрицы: для каждой ячейки фиксируется число измерений падения, которые дали в неё вклад, а также разброс этих измерений в ячейке, равный среднеквадратичному отклонению измерений в ячейке, делённому на их среднее, эту матрицу обозначаем $s(m, n)$.

Для расчёта матрицы падения нужно задать V_{0step} , L_{step} и области измерения переменных. Ради сопоставимости результатов постараемся установить эти параметры по возможности одинаковыми для рассматриваемых территорий. Область расстояний для всех территорий оставляем ту же, что и в начале исследования, до 30 км, так как и таких ЛС получается уже немного (в «Амуре» около 700). Область высот для «Амура» оставим аналогичной той, что была в первой части исследования 0—1300 м. (Область высот можно увеличить до 2000 м, но существенных отличий в результат это не вносит, а часть строк будет наполовину пустой.) Для остальных территорий возьмём всю их небольшую область высот.

Чем меньше V_{0step} и L_{step} , тем детальнее анализ, но одновременно тем меньше измерений в каждой ячейке, а значит, результат статистически менее надёжен. Используем большие интервалы, чтобы найти устойчивые зависимости, а их детали уточним потом. Везде $V_{0step} = 10$ м. (Возможно, стоит уменьшать V_{0step} на тех высотах, которые встречаются часто, а значит данных в ячейках будет достаточно.) Все данные некоторой ЛС попадают в одну строку матрицы, в ячейки разного расстояния, пока ЛС не закончится (впадёт). Так как фактически ГИС измеряет расстояние дискретно, пикселями, нет смысла задавать шаг по длине меньше, чем разрешение h . Отметим, что при $L_{step} = h$ ЛС не даёт вклад, пропускает следующую ячейку матрицы, если сток идёт по диагонали. Большее L_{step} не устранил непостоянство вклада в соседние ячейки, так как там, где диагональный сток даст один вклад, не диагональные дадут два вклада. Это нельзя изменить, нужно учитывать.

Чтобы сделать предложенный способ описания рельефа интуитивно понятным, представим матрицы, рассчитанные для «Амура» визуально. Ради читаемости изображения показываем содержание матрицы зашумлённым до небольшого числа значений (небольшого числа полутонов). На *рис. 1* приведена матрица числа измерений.

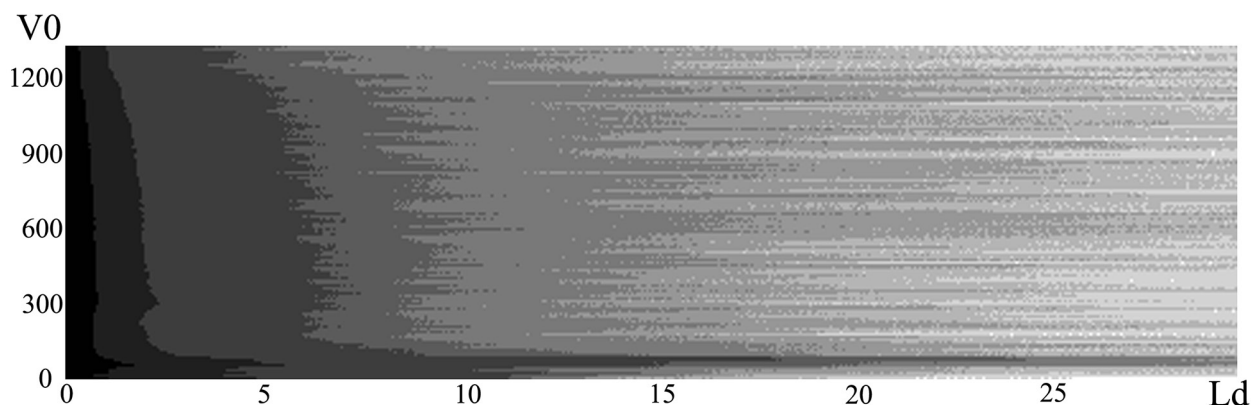


Рис. 1. Визуализация числа измерений в ячейках матрицы падения, L_d (в км), V_0 (в м). Больше число — тон темнее. Пояснения в тексте

На всех рисунках белый цвет — это 0 и «нет данных», а чем значение больше, тем тон темнее. Полутона на *рис. 1* последовательно светлеют слева направо, так как с увеличением длины ЛС их число падает, как квадрат длины. Самый тёмный тон (у левого края) относится к значениям $>10\,000$, следующий (правее) >1000 , далее >100 , >50 , >20 , >10 , >5 , >1 . Длинная тёмная полоса при высоте 50 м отражает большой участок низменности (около 30 % территории), а небольшой выступ тёмного тона около высоты 300 м порождён фрагментами бассейнов Буреи и Селемджи (13 % территории «Амур»), основная часть этих бассейнов расположена западнее. Горизонтальные линии одного тона на всех изображениях обусловлены тем, что все данные ЛС с истоками примерно на одной высоте попадают в одну строку матрицы.

На *рис. 2* представлена матрица падения (логарифм падения сведён к нескольким уровням серого и дополнительно повышен контраст границ полутонов). Падение меняется от 1 до 1192 м и в целом всё выглядит ожидаемо. Падение увеличивается с ростом L_d (в строке), например, при $V_0 = 500$ м в первой ячейке (расстояние 65–130 м) среднее падение 15 м, а при расстоянии 6,5 км оно 281 м. Падение усиливается с возрастанием V_0 (в столбце), например, при $L_d = 6,5$ км в первой ячейке (высота истока 0–10 м) среднее падение 2 м, а при истоке на 1300 м падение 600 м. Величина F^{tab} с ростом V_0 увеличивается не строго монотонно, так как чем выше исток, тем меньше линий стока, а значит больше флуктуаций среднего. И с ростом L_d увеличение F^{tab} не строго монотонно, поскольку меняются наборы ЛС, дающие вклад в последовательные ячейки (пояснено выше). В некоторых «пропущенных» ячейках вообще

не оказывается данных — белые точки ближе к правому краю. На высотах около 50 м почти белая полоса малых, неточных значений. Светлый выступ (пониженные значения) при V_0 около 300 м, возможно, связан с участками бассейнов Буреи и Селемджи.

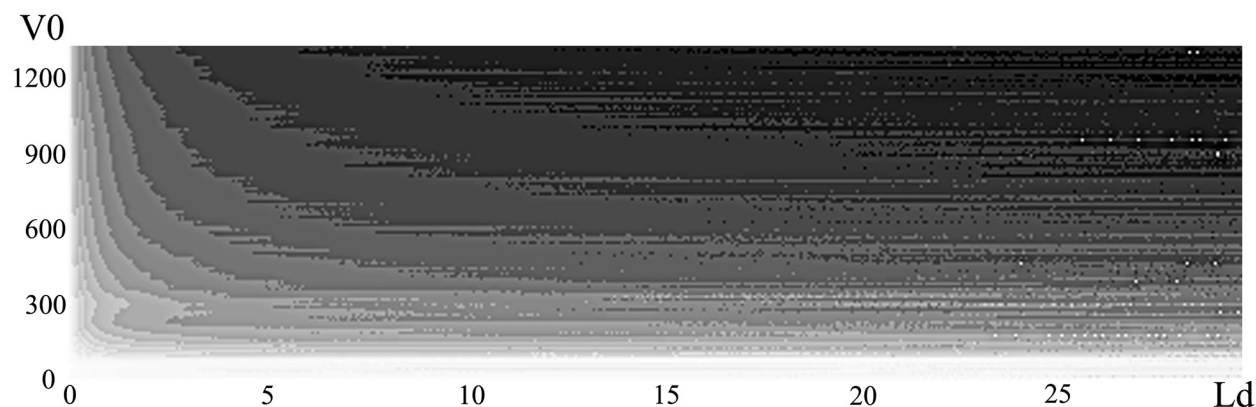


Рис. 2. Визуализация логарифма матрицы падения $\lg(F^{tab}(V_0, L_d))$, L_d (в км), V_0 (в м). Больше падение — тон темнее. Подчёркнуты границы смены полутонов. Пояснения в тексте

На рис. 3 представлена матрица разброса s . Показаны значения от 0 до 1 с шагом 0,1. Чтобы сориентироваться в полутонах смотрим на высоте 900 м яркости вдоль строки (слева направо): разброс в узкой вертикальной полосе 0,5, правее область значений 0,4, затем 0,3, широкая 0,2. Очень большой разброс в области низменности ($V_0 < 120$ м), где небольшое абсолютное отклонение оказывается относительно большим. Как отмечали, данные малых высот требуют специального рассмотрения.

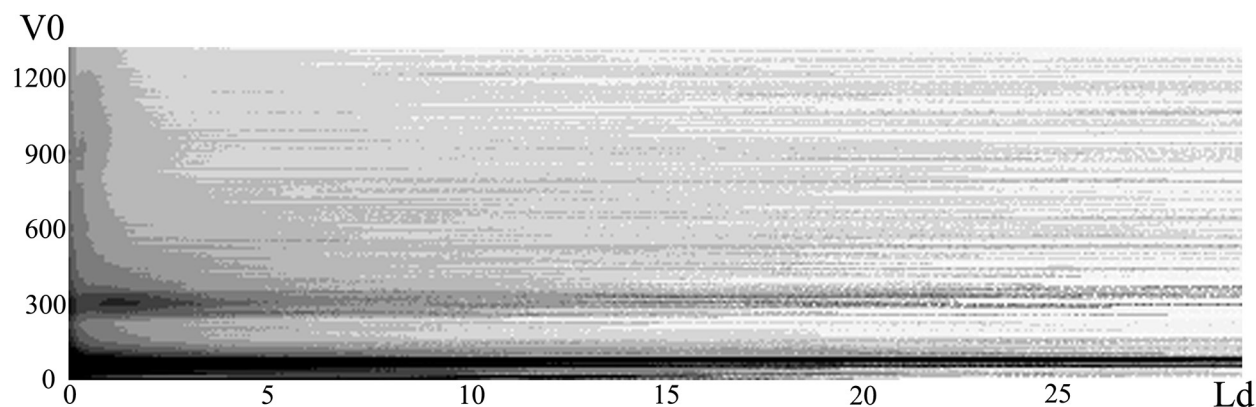


Рис. 3. Визуализация разброса измерений в ячейках матрицы падения, L_d (в км), V_0 (в м). Больше разброс — тон темнее. Пояснения в тексте

Сопоставление матрицы падения с формулой

Для каждой ячейки (m, n) вычисляем отношение значений матрицы и формулы падения:

$$t(m, n) = \frac{F^{tab}(m, n)}{V_0^q \ln(L_d / M + b)}, \quad V_0 = V_{0step}(m + 0,5), \quad L_d = L_{step}(n + 0,5), \quad 0 \leq m \leq 129, \quad 1 \leq n \leq 459.$$

Поскольку работаем с отношением, из сравнения исключён столбец $n = 0$ с нулевым падением. По всем $t(m, n)$ находим среднее, среднеквадратичное отклонение и разброс R ,

равный отклонению, делённому на среднее. Подбираем параметры q , M и b так, чтобы получить минимум R . При этом среднее значение t даст параметр C формулы (1).

Начнём с описания результата подбора и сравнения, а потом детально приведём методу подбора. На *рис. 4* представлен итог сопоставления матрицы падения и функции с оптимальными параметрами, т.е. значения t для каждой ячейки (падение, рассчитанное по формуле, меньше экспериментального в t раз). Идеально было бы получить все $t=1$ и $R=0$. Фактически t получилось от 0,1 до 2 (больше 2 только шесть значений), т.е. значение формулы бывало меньше экспериментального только в 2 раза, но бывало больше в 10 раз. При этом большое отклонение — крайне редкая ситуация: у 80 % ячеек t от 0,9 до 1,2. Рассмотрим полученный результат детально.

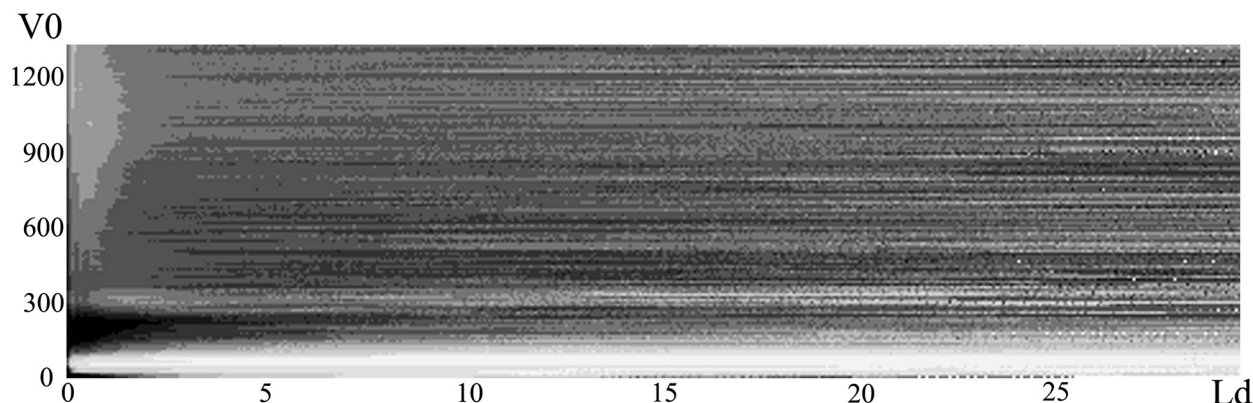


Рис. 4. Визуализация отношения значений матрицы и формулы падения t , L_d (в км), V_0 (в м). Больше отношение — тон темнее. Пояснения в тексте

На *рис. 4* показаны значения t от 0 (белое) до 1,35 (чёрное) и 9 полутонов между ними, где $t = 0,175 \pm 0,175$; $0,45 \pm 0,1$; $0,65 \pm 0,1$; а дальше $0,8 \pm 0,05$; $0,9 \pm 0,05$ и т.д. Укажем на рисунке соответствие некоторых полутонов центрам тонового диапазона. На высоте 900 м большие однотонные области слева направо соответствуют значениям 0,9; 1 и 1,1; а дальше большая полосатая область в основном из значений 1 и 1,1. На высоте 200 м в тёмной вытянутой области слева значения $t > 1,35$. Белая полоса на высотах около 50 м содержит все имеющиеся значения $t < 0,5$, они получены на низменности.

Явно отличается от остальных ситуация с первыми шагами стока — первые столбцы матрицы. Сильнее всего расходится с формулой первый столбец. Ещё у трёх явные отличия, которые стираются к 10–15-му столбцу. Особенно это проявляется на малых высотах. Возможно, дело в том, что на первых шагах мало падение, плюс оно резко меняется (мала «интегральность» характеристики), вдобавок сказывается неточность ЦМР. А может дело в модели стока, которая хорошо соответствует реальности там, где ЛС собрались в водотоки, а на первых шагах соответствие хуже (весь сток в модели идёт в одну соседнюю точку). Возможно, сказывается и иная физика начала стока. Отметим, что столбцы с $n > 20$ соответствуют линиям гидросети, которые в ГИС получаются при пороге на площадь водосбора примерно в 100 пикселей.

Самое плохое совпадение с формулой у данных с низменности. Вероятно, для этих высот недостаточна точность ЦМР и получаются большие ровные участки, на которых плохо работает модель стока. Область низменности требует отдельного анализа, и нет смысла учитывать её при подборе параметров, так как она очень сильно и неинформативно ухудшает оценку совпадения. Поэтому не учитываем ячейки с $V_0 < 120$ м. Это 9,2 % от всех ячеек, но это большая территория, почти четверть всей. Без низменности (т.е. рабочий диапазон V_0 120–1300 м) оценка совпадения матрицы и формулы падения $R = 0,096607$, а с низменностью она хуже (больше в 2 раза с лишним) и приводит к выбору других параметров (покажем ниже).

Методика определения параметров формулы

Подробно опишем алгоритм поиска параметров, дающих лучшее сходство формулы падения с матрицей (минимум R) для территории «Амур». Тот же алгоритм применим и в остальных случаях. В алгоритме два шага: определение q и итеративный попеременный поиск M и b . Нельзя гарантировать получение глобального минимума R подбором, но на практике мы приходили примерно к одному результату, используя разные начальные условия. О параметре b . В истоке при $L_d = 0$ должно быть $F = 0$, $\ln(b) = 0$, а значит $b = 1$. Надеемся, что к этому варианту мы и придём в дальнейшем. Но поскольку пока работаем с отношением t и не используем столбец $n = 0$ с нулевыми значениями F , ничего не мешает подобрать более близкую аппроксимацию рабочей части матрицы, используя и $b \neq 1$.

Начинать поиск можно с фиксированных значений $q = 1$, $M = 200$ и $b = 1$, а можно ради ускорения подбора найти их для конкретной территории, далее покажем как. «Амур» мы анализировали в предыдущей публикации и ради преемственности берём в качестве начальных параметров значения из той работы: $q = 0,7$, $M = 300$ и $b = 1$.

В табл. 2 показан выбор самого существенного параметра, показателя степени $q = 0,925$, исходя из минимума R (при $V_0 \geq 120$ м). Приведена и оценка R по всей матрице.

Таблица 2. Поиск оптимального значения q при $M = 300$ и $b = 1$

q	0,600	0,700	0,800	0,900	0,925	0,950	1,000
R	0,325900	0,285747	0,247155	0,214366	0,208127	0,203139	0,198220
R при $V_0 \geq 120$	0,199410	0,157624	0,121429	0,101064	0,100236	0,101463	0,109947

Таблица 3. Поиск оптимального значения M при $q = 0,925$ и $b = 1$

M	400	350	300	250	200	150
R при $V_0 \geq 120$	0,106595	0,102672	0,100236	0,099702	0,101619	0,106675

Таблица 4. Поиск оптимального значения b при $q = 0,925$ и $M = 250$

b	1,00	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65
R при $V_0 \geq 120$	0,099702	0,097635	0,096876	0,096889	0,099535	0,113419	0,205015

Таблица 5. Результаты 9 итеративных шагов поиска оптимального значения b и M при $q = 0,925$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	250,0	250,0	240,7	240,7	230,1	230,1	224,1	224,1	218,5
b	1,0000	0,8500	0,8500	0,8100	0,8100	0,7875	0,7875	0,7725	0,7725
R	0,099702	0,096876	0,096797	0,096435	0,096303	0,096182	0,096121	0,096061	0,096041

Таблица 6. Среднее t в столбцах номер n (при $V_0 \geq 120$ м), делённое на C

n	1	2	10	20	67	100	200	300	459
При $M = 300$, $b = 1$	0,640	0,842	0,986	1,032	1,055	1,042	1,009	0,973	0,957
При $M = 218$, $b = 0,7725$	0,988	0,949	0,932	0,983	1,035	1,032	1,012	0,983	0,972

Для $q = 0,925$ поочерёдно итеративно уточняем M и b , пока они изменяются существенно. В табл. 3 показан выбор $M = 250$ при $b = 1$, в табл. 4 — выбор $b = 0,85$ при $M = 250$, а в табл. 5 — результаты 9 таких итераций. (Оптимальное q почти не поменялось при таком

изменении M и b . Но, чтобы получить q с высокой точностью, нужно и шаг его подбора уменьшить и повторить подбор q , если M и b далеко ушли от начальных значений.) Результирующее среднее t даёт $C = 0,25363$. Итоговая формула для «Амура» $F = 0,254V_0^{0,925} \ln(L_d/218 + 0,7725)$.

Если предложенная формула неточно учитывает изменение падения с ростом L_d (вдоль строки), то от столбца к столбцу должно нарастать её несовпадение с матрицей. У среднего t в столбцах ($V_0 \geq 120$ м), табл. 6, есть изменение в первых столбцах, о чём писали выше, но при $n > 15-20$ существенных систематических изменений нет. Для сравнения приведены такие же измерения при начальных значениях: $M = 300$, $b = 1$. Как видим, изменение b и M очень существенно сказываются на первых столбцах, где логарифмическая кривая особенно крута, но дальше отличий практически нет. Причём вариант с $b \neq 1$ описывает первые столбцы матрицы явно лучше. Но остаётся вопрос, хорошо ли отражают реальность первые шаги модели стока, с которыми сравниваем.

Как получить начальные значения параметров для территории. Степенная аппроксимация столбцов матрицы ($V_0 \geq 120$ м) даёт начальное q . Учитываем, что в самых первых столбцах данных много, но значения q неточные, а дальше (в «Амуре» после 50–90-го столбца) начинаются флуктуации. Нет необходимости анализировать столько столбцов, как в табл. 7, но хотелось показать динамику этого параметра. Искомое начальное q здесь 0,8–0,9.

Таблица 7. Степенная аппроксимация данных столбцов матрицы (с точностью r^2)

Номер столбца	1	10	15	25	50	90	130
Показатель степени q	0,6723	0,6907	0,7433	0,8216	0,8775	0,9025	0,9298
Коэффициент корреляции r^2	0,9825	0,9832	0,9828	0,9842	0,9905	0,9882	0,9861

Для определения начальных M и b считаем средние значения столбцов матрицы (у первых 200 столбцов, где меньше флуктуаций). Они образуют табличную зависимость от расстояния. Аппроксимируем её логарифмической функцией (качество аппроксимации у степенной явно хуже). Получили $M = 252,839$ и $b = 0,771242$ с $r^2 = 0,9984$. Можно брать среднее не всего столбца, а «хорошо населённой» полосы строк. Так для высот 1080–1130 м по первым 200 столбцам получили аппроксимацию с близкими значениями $M = 255,4857$ и $b = 0,699648$ при $r^2 = 0,9952$.

Есть ещё одна возможность определить M и b . Рассчитать по территории одномерную табличную функцию F/V_0 от L_d (как мы это делали в прошлой работе) и аппроксимировать её логарифмической функцией. Аналогично можно уточнить M и b перед итерациями, когда q определено. Аппроксимация табличной функции F/V_0^q с $q = 0,925$ даёт результат близкий к конечному $M = 234$ и $b = 0,763835$ с $r^2 = 0,9984$.

(Детали. Пусть f_i — это i -е измерение падения в точке ЛС с расстоянием L_{di} от истока, расположенного на высоте V_{0i} . Это измерение попало в ячейку матрицы со значениями V_0 и L_d в центре. Мы считаем t как отношение среднего по всем f_i в ячейке к $F(V_0, L_d)$. Такой расчёт удобен при подборе параметров функции F , но точнее было бы усреднять $f_i/F(V_{0i}, L_{di})$ по всем i в ячейке. Разница расчётов может оказаться ощутимой только при малых высотах и расстояниях (n и m меньше 5), но в этих же ситуациях возможны большие ошибки из-за неточности полученных по ЦМР высоты и/или падения.)

Другие территории

Описанный алгоритм поиска параметров формулы падения применили ещё на двух территориях. Параметры расчёта матрицы падения (V_{0step}, L_{step}) и область расстояний до 30 км сохранили. Высоты и статистика их распределения на этих территориях существенно иные, чем у «Амура», и нет такого большого участка низменности (дающего дополнительный пик гисто-

граммы). Найденные параметры формулы сведены в *табл. 8*. Краткие описания их поиска (приводим в скобках, можно пропустить при первом чтении) иллюстрируют варианты алгоритма. (Пример такого описания для поиска по «Амуру». Из предыдущей статьи — $M = 300$, $b = 1$. Подбором — $q = 0,925$. Итерациями — $M = 218$ и $b = 0,7725$. Значение q не изменилось.)

Высоты «Камы» распределены по почти симметричной унимодальной кривой между 20 и 400 м, с максимумом в 200 м и длинным «хвостом» до 900 м. При этом ЛС, начавшиеся с самых больших и самых малых высот, оказываются короткими, впадают, не достигнув 30, а то и 10 км. В результате 5 из первых 8 и 11 из последних 15 строк матрицы на больших расстояниях оказываются пустыми. Первые 6 строк плохо совпадают с остальными и поэтому их не учитываем при аппроксимации. Это 7,3 % территории и примерно 0,068 часть матрицы. Рабочий диапазон V_0 80–900 м. (Из аппроксимации F/V_0 получили $M = 359,95$ и $b = 0,903$. Подбором — $q = 1,05$. Итерациями — $M = 325$ и $b = 0,872$. Значение q не изменилось.)

Таблица 8. Оптимальные параметры формулы для данных трёх территорий и объединённых данных

Территория	$n \geq 1$					$n \geq 20$				
	q	M	b	C	R	q	M	b	C	R
Амур	0,925	218	0,7725	0,25363	0,096041	0,94	153	0	0,21273	0,090729
Кама	1,050	325	0,8720	0,09792	0,120758	1,05	289	0,7	0,09500	0,118428
Пара	1,430	79	0,1950	0,00640	0,124360	1,43	52	0–0,25	0,00592	0,112590
Общие	1,200	200	0,2750	0,03770	0,110996	1,20	130	0	0,03416	0,106176

Сходная ситуация с территорией «Пара». Высота распределена по унимодальной кривой от 0 до 600 м, с максимумом в 200 м, со ступенькой в районе 100 м и хвостом до 900 м. Восемь из первых 9 и 11 из последних 14 строк матрицы на больших расстояниях оказываются пустыми. Первые 16 строк не учитываем при аппроксимации. Это 20,5 % территории и примерно 0,188 часть матрицы. Рабочий диапазон V_0 160–900 м. (Из аппроксимации средних по первым 200 столбцам матрицы при $V_0 \geq 160$ м получили $M = 90,33$ и $b = 0,7196$. Подбором — $q = 1,44$. Итерациями — $M = 78,3$ и $b = 0,21$. Подбором — $q = 1,43$. Итерациями — $M = 79$ и $b = 0,195$.)

Объединили данные трёх территорий: для каждой ячейки матрицы нашли общее среднее по измерениям в интервалах ячейки на всех территориях. В объединённых данных существенные особенности «Амура» и «Пары» на малых высотах сгладились, отличие начальных высот от остальных стало меньше. Но всё же при аппроксимации не учитывали $V_0 < 100$ м. В расчёт брались высоты до 900 м, куда вносят вклад все территории, так как выше только у «Амура», но если учитывать и большие высоты, то результат почти тот же. (Из аппроксимации средних по 200 столбцам матрицы при $100 \leq V_0 \leq 850$ м получили $M = 156,64$ и $b = 0,62245$. Подбором — $q = 1,2$. Итерациями — $M = 200$ и $b = 0,275$. Значение q не изменилось.)

Как отмечали выше, параметры логарифма M и b особенно существенно влияют на значения формулы падения, соответствующие первым столбцам. И на оборот, необходимость соответствовать первым столбцам матрицы существенно определяет подбор этих параметров. В *табл. 8* дан пример результатов подбора без учёта первых 19 столбцов.

Рассмотрим полученные параметры формулы (1), *табл. 8* ($n \geq 1$). Значения q близки между собой, хотя, конечно, и небольшое изменение этого параметра влияет на результат существенно. Относительно b нужно будет проверить, сильно ли ухудшается совпадение с матрицей, если положить $b = 1$. Значение C меняется синхронно с q , причём эта зависимость хорошо, с $r^2 = 0,9987$ (по имеющимся 4 точкам), аппроксимируется как $C = 203,08/1374,713^q$. Заменим параметр C этими постоянными значениями и получим:

$$F = 203(V_0/1375)^q \ln(L_d/M + b).$$

Мы ещё далеки от единой формулы для разных территорий, но движение в этом направлении происходит.

Разброс исходных данных матрицы падения

Найденная формула описывает матрицу падения, а точнее средние значения падения в ячейках. Насколько измерения, попавшие в ячейку (m, n) , близки к своему среднему, показывает разброс измерений в ячейке $s(m, n)$ (см. рис. 3). В матрице падения «Амура» есть ячейки с $s > 2$, но в большинстве ячеек (81,22 %) $s < 0,4$, в 62,69 % ячеек $s < 0,3$ и в 21,02 % — $s < 0,2$. (В той части матрицы, которую аппроксимируем, $V_0 \geq 120$ м, в 87,62 % ячеек $s < 0,4$, в 68,07 % — $s < 0,3$ и в 23,02 % — $s < 0,2$.)

Одного показателя s недостаточно, чтобы понять близость значений в ячейке к среднему, важно и то, как распределены эти значения. Покажем это на примере значений, нормированных на среднее в ячейке. Если распределение нормальное, то в диапазон $1 \pm s$ попадает в среднем 68,26 % нормированных значений. В том случае, когда есть группа очень близких значений и другая группа вдвое больших значений, в диапазон $1 \pm s$ попадает 0 значений, а в диапазон $1 \pm 2s$ — 100 % значений. Если есть 10 очень близких значений и одно в 20 раз больше, то 91 % окажется в диапазоне $1 \pm 0,3s$. Поэтому, чтобы уточнить ситуацию, подсчитали также и какая часть измерений в ячейках попадает в некоторый заданный диапазон, например, какая доля (в %) нормированных измерений будет находиться в диапазоне $1 \pm 0,4$. (Рассматриваем ячейки, в которых больше одного измерения.) Крайне редко в диапазон $1 \pm 0,4$ попадает только 10 %, а то и 0 % измерений. У ячеек с $s < 0,4$ почти всегда (в 89 % случаев) в этом диапазоне не меньше 80 % измерений, а среди всех ячеек матрицы таких только 64 %. Среди тех ячеек, которые используем при аппроксимации, $V_0 \geq 120$ м, в 44,6 % случаев в этот диапазон попадают почти все измерения (90 % и больше) и в большинстве случаев (83 %) — больше 70 % измерений. Таким образом, разброс $\pm 0,4$ довольно хорошо характеризует ситуацию. Разброс не мал (отличие от среднего примерно в 1,5 раза), но теперь мы представляем его значение. Сходная картина у «Камы» и «Пары», табл. 9. В матрице, суммирующей данные по трём территориям, разброс в ячейках больше, но несущественно.

Таблица 9. Разброс данных во всех ячейках матрицы падения и в её «рабочей» части

Для какой части ячеек матрицы (в %) выполняется условие	Амур		Кама		Пара	
	Все	$V_0 \geq 120$ м	Все	$V_0 \geq 80$ м	Все	$V_0 \geq 170$ м
$s < 0,4$	81,2	87,6	86,5	89,0	78,1	81,5
>80 % значений ячейки в диапазоне $1 \pm 0,4$	63,9	69,0	72,0	74,0	58,5	61,5
>70 % значений ячейки в диапазоне $1 \pm 0,4$	77,3	82,8	83,0	85,5	74,0	77,4

Обсуждение результатов

Предложен новый инструмент изучения рельефа — матрица падения $F^{tab}(m, n)$. Описан способ её расчёта и приведён подробно проиллюстрированный пример для большого участка Дальнего Востока. Внимательно оценили разброс данных в ячейках матрицы. С матрицей падения сопоставили полученную ранее формулу падения и нашли параметры формулы, дающие хорошее совпадение с большей частью матрицы (ЛС начинаются выше 120 м). Проверили, что нет систематического накопления ошибки формулы с ростом длины ЛС. Аналогичные исследования провели ещё для двух территорий и для матрицы, суммирующей данные по трём территориям. Нашли параметры формулы падения и для этих матриц.

Подтверждены необходимость учёта высоты истока и степенной характер зависимости от неё. В итоговой формуле $F = 203(V_0/1375)^q \ln(L_d/M + b)$ параметры q и b безразмерные,

а все остальные параметры и переменные — в метрах. Параметры, найденные для этих территорий, отличаются больше всего у «Пары». Значения q близки, но и небольшое отличие этого параметра сказывается существенно. Велико различие в параметрах логарифма M и b . Возможно, правильнее фиксировать $b = 1$, чтобы $F = 0$ при $L_d = 0$. С другой стороны, более уместной представляется зависимость от расстояния не логарифмическая (с бесконечным ростом), а степенная (обратная гипербола), но пока она совпадает с матрицей хуже, чем логарифмическая (даёт $R = 0,095$ вместо $0,09$). Продолжим изучать этот вопрос. Возможно, на разных расстояниях зависимость не одинаковая, например, логарифмическая в начале, а затем степенная. Причём «начало» может определяться как неточностью дискретного измерения, скажем на первых 10 или 20 шагах стока, так и физическими особенностями начала стока.

В дальнейшем детальнее рассмотрим эти и другие территории в поисках более тонкого учёта в формуле высоты и расстояния. Возможно, за счёт этого придём к единым параметрам для территорий. Также важно выяснить, что порождает большой разброс данных в некоторых ячейках, разобрать конкретные ситуации. Надеемся, это подскажет, какие ещё характеристики территории (в первую очередь рельефа) нужно учесть в расчёте падения.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Мониторинг», госрегистрация № 126031818938-6).

Литература

1. Златопольский А. А. Мультимасштабный статистический анализ гидрологических характеристик рельефа (по растрам модели стока) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2025. Т. 22. № 4. С. 164–172. DOI: 10.21046/2070-7401-2025-22-4-164-172.
2. Златопольский А. А. Статистическая связь локального продольного уклона водотока с другими локальными характеристиками (матрица уклонов) // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2026. Т. 23. № 1. С. 140–149. DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-1-140-149.
3. Чернова И. Ю., Нугманов И. И., Даутов А. Н. Применение аналитических функций ГИС для усовершенствования и развития структурно-морфологических методов изучения неотектоники // Геоинформатика. 2010. № 4. С. 9–23.

Formal description of the runoff profile based on statistical analysis of the digital terrain model: Part 2 — the fall matrix

A. A. Zlatopolsky

Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia
E-mail: aazlat@gmail.com

The article continues the search of the average streamflow profile formal description. We use statistical analysis of runoff lines obtained by runoff modeling using a digital elevation model. A new tool for the relief studying is proposed — the fall matrix, which reflects the relationship between fall magnitude and distance to the source and the source elevation above the sea level. A detailed, illustrated example of this matrix for a large region of the Far East is provided. An assessment of the spread of data within a single matrix cell is provided. The fall matrix is compared with the fall formula presented in the previous article. An algorithm for the search of parameters for that formula that provide good agreement with most of the matrix is developed and described. We verify that there is no systematic accumulation of error with the length of the runoff lines. Similar studies are conducted for two additional territories and for a matrix summarizing data for three territories. To the extent possible, the formulas obtained for the different territories are combined. The necessity of taking into account the height of the source and the power-law nature of the dependence on it are confirmed.

Keywords: DTM, runoff model, runoff line profile, fall of the runoff line, runoff line length, source height, statistical dependence

Accepted: 29.05.2026

DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-4-171-181

References

1. Zlatopolsky A. A., Multi-scale statistical analysis of hydrological characteristics of the relief (based on runoff model rasters), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2025, V. 22, No. 4, pp. 164–172 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-1-164-172.
2. Zlatopolsky A. A., Statistical relationship of local longitudinal slope of watercourse with other local characteristics (slope matrix), *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2026, V. 23, No. 1, pp. 140–149 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-1-140-149.
3. Chernova I. Yu., Nugmanov I. I., Dautov A. N., Application of GIS analytic functions for improvement and development of the structural morphological methods of the neotectonics studies, *Geoinformatica*, 2010, No. 4, pp. 9–23 (in Russian).