Формальное описание профиля линии стока на основе статистического анализа цифровой модели рельефа. Часть третья

А. А. Златопольский

Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия
E-mail: aazlat@gmail.com

Представлено продолжение поиска формального описания усреднённого профиля линий стока (ЛС). Опирались на статистический анализ ЛС, полученных моделированием стока по цифровой модели рельефа. Обосновали и проверили предположение, что падение вдоль ЛС зависит не только от текущей длины ЛС и высоты её истока, но и от её полной длины до базиса эрозии *Lall*. Эксперименты на большом участке Дальнего Востока показали, что учёт *Lall* определённо, хотя и не принципиально, уменьшает отличие расчётов по формуле падения от прямых измерений падения в точках ЛС. Формулу падения и её параметры подбирали по минимуму этого отличия. Чтобы при оценке отличия часто встречающиеся ситуации не «заглушали» редкие, мы ориентировались на участки ЛС примерно одного масштаба (длины). В основном отклонение реального падения от значения по формуле невелико: на длинах 2-30 км больше чем на 30% от расчёта по формуле отклоняется 22% измерений, а больше чем на 50% — 6,3% измерений. Точки с большим отклонением не разбросаны хаотично по территории, а сгруппированы в ряде мест. Предстоит разобраться в причинах отклонения в этих местах, проанализировать, правильно ли мы измеряем *Lall*, и нужно ли ориентироваться на абсолютный или на локальный базис эрозии.*

Ключевые слова: ЦМР, модель стока, профиль линии стока, падение линии стока, длина линии стока, высота истока, базис эрозии, статистическая зависимость

Одобрена к печати: 17.06.2026
DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-5-233-243

Введение

Продолжаем поиск формального описания среднего профиля водотока. Возможность для аккуратного, объёмного статистического исследования даёт моделирование стока по цифровой модели рельефа (ЦМР), в которой для каждой точки территории указана высота *V*. Модель стока D8 в геоинформационной системе (ГИС) задаёт направление стока в каждой точке, определяя этим линии стока (ЛС). Для каждой точки территории в ГИС измеряется расстояние вдоль ЛС до самого дальнего истока *Lup* (в предыдущих статьях использовали обозначение L_d). Практичное описание этих ГИС-операций можно найти у И. Ю. Черновой с соавторами (2010). Прослеживая линию стока вверх от данной точки, находим этот исток (авторская программа), определяем его высоту *V0* и падение к этой точке *F=V0-V*. В предыдущей статье (Златопольский, 2026) мы предложили использовать для статистического анализа матрицу падения *F*(*V0*, *Lup*). В её ячейку попадают и усредняются измерения падения в точках ЛС со значениями *V0* и *Lup* из небольшого интервала. Линейные характеристики и параметры формул по умолчанию указываем в метрах.

Для участка Дальнего Востока (от горной системы Сихотэ-Алинь до Буреи, 47,15–53,5° с. ш., 130,66–140,11° в. д., 717,5×719,4 км, площадь суши 502680 км^2 или 118977538 пикселей, при разрешении *h*=65 м/пиксель) рассчитали матрицу падения и нашли для неё довольно близкую аппроксимацию:

$$F=C\cdot V0^{p}\ln((Lup/M)+b), \quad (1)$$

где *C*=0,254, *p*=0,925, *M*=220 м, *b*=0,8.

* Статья размещена в авторской редакции.

Таблица 1. В первых пяти столбцах данные ЛС, стекающих на запад, в остальных — на восток

Lup	18522	18460	18482	18495	18516	18466	18478	18471	18473	18518
V	247	252	272	240	258	89	146	59	44	56
V0	327	321	323	327	323	326	321	324	322	320
F	80	69	51	87	65	237	175	265	278	264

Опишем особенности, которые проявились как в предыдущем исследовании, так и в дополнительных измерениях и потребовали уточнить наш подход. По большей части значения падения, попадавшие в одну ячейку матрицы (с близкими *V0* и *Lup*), не очень сильно отличались от их среднего значения E_F: в большинстве ячеек (83%) в интервал $E_F(1\pm0{,}4)$ попадало более 70% измерений. Но в некоторых ячейках в этот интервал попало 10%, а то и ни одного измерения. Одна из причин такой ситуации — редкие случаи существенно разного падения при стоке с одной высоты. И это не случайность на первых шагах стока. Например, так получилось в ячейке для ЛС, стекающих с высот 320-330 (Буреинского хребта) и достигших длины 18460–18525. Половина этих ЛС стекает на восток, а половина на запад, и падение у стекающих на запад оказалось в 3 раза меньше, чем у стекающих на восток (*табл. 1*).

Предположили, что при одной высоте истока и одинаковой длине стока различие в падении вызвано разным расстоянием до базиса эрозии (глобального): стекающие на запад впадают в Амур почти на 2000 км выше по его течению, чем стекающие на восток. Для каждой точки из бассейна Амура в ГИС кроме длины ЛС до истока измеряется и длина стока до нижней точки бассейна, а значит можно найти длину ЛС от истока до базиса эрозии *Lall*.

Заманчиво предположить, что существует кривая среднего профиля ЛС, которая масштабируется по вертикали *V0*, а по горизонтали *Lall*, так что получается зависимость *F*/*V0* от *Lup*/*Lall* (какая часть высоты теряется за такую часть пути). С отношением *F*/*V0* мы уже работаем, а *Lup*/*Lall* нужно изучить.

Пока логарифмическая зависимость *F* от *Lup* (1) получалась ближе к экспериментальным данным, но логичнее была бы зависимость степенная (обратная гипербола), при которой *F* стремится к *V0*, а не растёт бесконечно, как логарифм. Если зависимость от всех переменных степенная, $F=C\cdot V0^p\cdot Lup^w/Lall^q$, то также логично было бы прийти к $q=w$ и $p=1$, чтобы в конце $Lup/Lall=1$ и $F/V0=1$. (Если $p\neq1$, получится, что в конце $V0=V0^p\cdot\varphi(Lup, Lall)$ и $\varphi(Lup, Lall)$ при $Lup=Lall$ должно оказаться равным $V0^{(1-p)}$. Как-то сложно.) Мы изучаем не продольный уклон, а падение, так как не нашли ЦМР на большие территории, по которым уклон можно измерять достаточно аккуратно. Но если базовой можно считать зависимость для уклона, то пожелание $q=w$ отпадает, да и логарифмическая зависимость в формуле уклона переходит в гиперболу $1/Lup$ (при дифференцировании).

Таковы предположения, а далее аккуратно рассмотрим, что дают статистические измерения. Работаем внутри той части бассейна Амура, речная сеть которой остаётся связной на этой территории, так что для неё правильно измеряется расстояние до нижней точки бассейна на территории, *Lall*. Пока не прибавляем к *Lall* расстояние от этой нижней точки до базиса эрозии: так как добавка очень мала и не очевидна, что мы ещё обсудим. Используем достаточно надёжную и доступную для многих территорий модель рельефа SRTM (*англ.* Shuttle Radar Topographic Mission) в проекции UTM (*англ.* Universal Transverse Mercator). В ЦМР убраны локальные понижения.

Не ставим задачу сразу найти формальное описание профиля для всех ситуаций. Пока не работаем там, где измерения неточны по следующим причинам:

- низкая точность ЦМР (малые высоты);
- дискретность измерений (малые длины);
- недостаточно статистических данных (очень большие длины).

Пороги для этих ограничений задаём «строгие», чтобы работать с заведомо надёжными данными, так как чем меньше шумовых данных, тем лучше чувствительность алгоритма под-

бора формулы и её параметров. Здесь работаем с $V>120$, хотя можно и $V>90$ (рассмотрим ниже), с *Lup* между 1 и 30 км (примерно пять первых порядков). Реальную рабочую область переменных будем определять, когда уже найдём формальное описание.

Подготовительный анализ

Предположение о влиянии *Lall* на величину падения проверяем, начиная с единичных измерений. У нас нет данных об *Lall* для ЛС с Буреинского хребта на запад, поэтому смотрим аналогичное разделение стока с хребта Мяо-Чан, хотя тут различие *Lall* меньше. Строки 1 и 2 *табл. 2* относятся к текущим на запад истокам реки Кур, строка 3 содержит данные для северного притока реки Харпи, текущей на юг к Амуру через озеро Болонь, строка 4 — для реки Правая Поха, которая начинается рядом с истоками Кура и течёт на юг в реку Эльбан и в Амур. Для этих ЛС измеряем данные на одинаковом расстоянии от истока, *Lup*=30 км.

Таблица 2. Для четырёх ЛС на расстоянии 30 км от истока характеристики и отношения $t_1=F/(1{,}25\cdot V0^{0{,}925})$, $t_2=F/(V0\cdot Lup/Lall)$, $t_3=F/(85\cdot V0(Lup/Lall)^{0{,}8})$. *R* — разброс в столбце

№	*F*	*V0*	*Lall*	*Lup*/*Lall*	t_1	t_2	t_3
1	412	992	1 447 241	0,020729	0,557460	20,035730	0,853349
2	722	1278	1 441 349	0,020814	0,772834	27,142770	1,156991
3	1000	1276	907 317	0,033065	1,071959	23,702120	1,108319
4	929	1202	796 069	0,037685	1,052432	20,508820	1,108319
R	0,344338				0,284425	0,144183	0,132565

Здесь и далее отличие падения *f*, вычисленного по формуле, от измеренного *F* определяем отношением $t=F/f$, насколько *t* близко к 1. Расхождение формулы с набором измерений (здесь четыре измерения) оцениваем разбросом отношений *t*, где разброс (обозначим *R*) — это среднеквадратичное отклонение в наборе значений *t*, делённое на их среднее *E*. Разброс показывает, насколько сильно и часто *f* отклоняется от *F*. Чем меньше разброс, тем лучше совпадение формулы с данными. При нормальном распределении *t* в интервал значений $E(1\pm R)$ попадает в среднем 68,26% выборки.

Отношение t_1 — это сравнение измерений с формулой (1), т. е. без учёта *Lall*. Разброс значений t_1 большой, так как *F*/*V0* «западных» ЛС меньше *F*/*V0* «южных» в 1,59 раза, хотя при равной *Lup* они должны быть близки. Но и *Lup*/*Lall* западных меньше, чем *Lup*/*Lall* южных в 1,7 раза. Таким образом, возможно, различие падения связано с влиянием *Lall*. Действительно, добавление в формулу t_2 деления на *Lall* существенно уменьшает разброс, и ещё немного меньше разброс у t_3, где для *Lall* подобрана степень 0,8. (Возведение в степень *Lup* разброс не меняет, так как *Lup* одинакова у всех этих точек.)

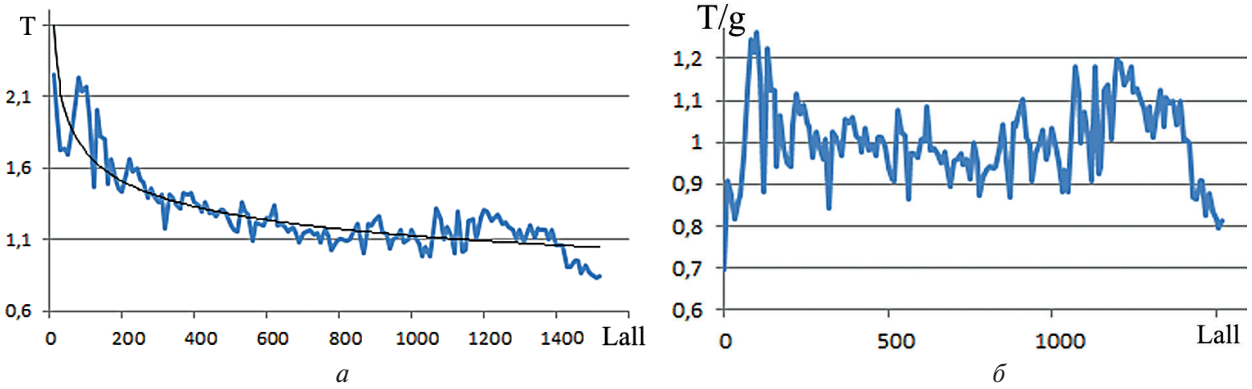
Здесь и далее не пишем о выборе множителя *C*, который, конечно, важен, но не сказывается на используемом критерии сходства (разбросе), а значит, не влияет на выбор остальных параметров. Поэтому при подборе используем $C=1$. А когда параметры выбраны, то задаём *C*, равным полученному среднему значению *t* (т. е. *E*), и тогда в среднем отношение *F*/*f* около 1.

Мы детально рассмотрели, как влияет учёт *Lall* для четырёх ЛС (четыре измерения). Перейдём к статистической оценке, начиная с небольшого участка хребта Мяо-Чан, 11,7×14,95 км, 180×230 пикселей, 1668 точек ЛС с $Lup>1300$. Совпадение формулы с измеренным падением оцениваем разбросом. Пока параметры формул подбираем грубо.

Для формулы (1) разброс значений *t* получился довольно большой, $R=0{,}250354$. Для $V0^{0{,}925}\ln((Lup/220)+0{,}8)/Lall^q$ при подобранном $q=0{,}7$ $R=0{,}160613$, т. е. учёт *Lall* существенно приблизил формулу к экспериментальным данным. Переход от логарифмической зависимости для *Lup* к степенной улучшил оценку: для $V0^{0{,}925}Lup^w/Lall^q$ при $w=0{,}2$ и $q=0{,}7$ $R=0{,}152795$.

(Но вот $w=q$ уменьшает сходство с данными: лучший результат с R=0,189045 получается для $V0^{0,925}(Lup/Lall)^{0,35}$.)

Поскольку и здесь учёт *Lall* улучшает формулу падения, смотрим, как это работает для всех точек территории, подходящих по указанным выше ограничениям (2052269 точек). Для этого отличие реального падения от формулы (1) $t=F/(V0^{0,925}\ln((Lup/220)+0,8))$ собираем в табличную функцию $T(Lall)$: разбиваем значения *Lall* на интервалы по 10 км и в ячейку функции с номером n, $0\leqslant n<160$ (здесь максимальная $Lall<1600$ км), заносим среднее t для точек с $10n\leqslant Lall<10(n+1)$ км. График табличной функции представлен на *рис. 1а*. Зависимость от *Lall* хорошо видна и аппроксимируется функцией $g=2,6786(Lall/10000)^{-0,188}$. Поскольку кривая не гладкая, оценка её аппроксимации невелика, r^2=0,7677, r — коэффициент корреляции. (Для $Lup\geqslant h$ точек на порядок больше, 29325197, но зависимость почти та же $g=2,5971(Lall/10000)^{-0,182}$ с r^2=0,7623.) Таким образом, и этот анализ показывает, что зависимость падения от общей длины есть и что она похожа на степенную. Правда степень здесь существенно меньше той, что получалась на ограниченном наборе данных с хребта Мяо-Чан.



а *б*

Рис. 1. Графики функций: *а* — табличная $T(Lall)$ (синий цвет) только и аппроксимирующая её $g(Lall)$ (чёрный); *б* — $T(Lall)/g(Lall)$. Функции безразмерные, *Lall* (в км)

(Детали. Фактически мы рассчитывали двумерную табличную функцию $B(n, m)$ не только от *Lall*, но и от *Lup* с интервалами $mh\leqslant Lup<(m+1)h$. В каждой ячейке $B(n, m)$ записано среднее $F/V0$ для точек из интервала (n, m). По этой таблице уточнили зависимость $F/V0$ от *Lup* (получились несколько иные параметры, $\ln((m+1)/2,1)$), разделили на неё $B(n, m)$, и среднее по m для $B(n, m)/\ln((m+1)/2,1)$ дало искомую $T(n)$. Таблицу $B(n, m)$ хорошо аппроксимирует функция $Bap(m,n)=\ln((m+1)/2,1)/(n+0,5)^{0,188}$, разброс значений $B(n,m)/Bap(n,m)$ только 0,115651.)

Поиск формулы падения

Поскольку предварительный анализ подтвердил статистическую связь падения ЛС с *Lall*, сопоставим с измерениями по всей территории два варианта формулы:

$$F=C\cdot V0^{p}\ln((Lup/M)+b)/Lall^{q} \text{ и } F=C\cdot V0^{p}Lup^{w}/Lall^{q}. \quad (2)$$

Для формул необходимо подобрать адекватные параметры. Параметров три, и нет возможности контролировать подбор визуально через двумерную таблицу, как это делали прежде. Поэтому сравниваем формулу непосредственно с измерениями на территории: для каждой точки ЛС по её характеристикам *F*, *V0*, *Lup*, *Lall* ищем отличие *F* от рассчитанного по формуле значения *f*: $t=F/f(V0, Lup, Lall)$. Оптимальные параметры формулы дают минимальный разброс значений *t*. (О размерности. *F*, *V0*, *Lup*, *Lall*, *M* в метрах, остальные параметры кроме *C* безразмерны. Размерность *C* должна привести правую часть формул (2) к метрам. В степенном варианте это $м^{(1-p+q-w)}$; при p=1 и $q=w$ *C* безразмерен. А можно задать *C* в метрах, а *V0*, *Lall*, в степенном варианте и *Lup*, разделить на константу в 1 м).

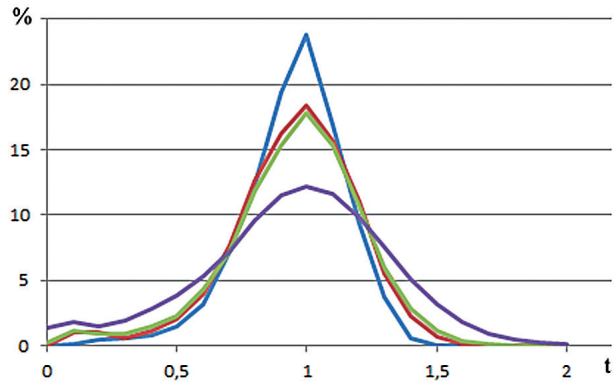


Рис. 2. Гистограммы *t* (с шагом 0,1) для разных диапазонов L_{up}: сиреневый цвет — 1–2 км, $R = 0{,}359107$; зелёный — 2–30 км, $R = 0{,}265314$; красный — 4–8 км, $R = 0{,}245166$; синий — 8–16 км, $R = 0{,}195729$

Есть преимущество в непосредственном сравнении формулы с данными (а не с их средним в ячейке таблицы), но есть и сложность. Точки с малыми *Lup* встречаются несравненно чаще и могут «перекрыть», помешать учесть ситуацию на больших длинах. Поэтому ищем параметры формулы и для точек ЛС одного масштаба (примерно одного порядка). Масштаб определяют диапазоны значений *Lup*: 1-2, 2-4, 4-8, 8-16 км (примерно первые четыре порядка, при пороге площади водосбора для первого порядка в 50 пикселей). Смотрим и объединение этих диапазонов. Работаем с теми точками ЛС, которые укладываются в приведённые выше ограничения. Точек не мало, так в диапазоне 4-8 км 365364 точки (суммарно длина этих участков ЛС около 25000 км).

На *рис. 2* представлены гистограммы *t* для ЛС нескольких масштабов. Как видим, разброс *R* определяет форму кривой: распределения для диапазонов 2-30 и 4-8 почти одинаковы, так как их *R* почти совпадают. У приведённых распределений (E=1) в интервал $1 \pm R$ попадает 70-73% измерений *t*, в интервал 1±0,3 у диапазона 2-30 — 78% измерений, а у диапазона 8-16 — 89% (только небольшая часть измерений отклоняется от формулы больше чем на 30%). (Детали. Медиана распределений около 1,025, т. е. среднее сдвинуто в сторону меньших значений из-за того, что существенное отличие от расчётного происходит скорее в меньшую сторону, иными словами, измеренное падение скорее меньше расчётного. Весомый хвост распределения в сторону меньших *t* увеличивает среднее отклонение. Возможно, работая с отношением, логичнее рассматривать для *t* не интервал 1±0,3, а *t* от 1/1,3 до 1,3.)

Таблица 3. Отличие формулы падения от измерений, *R*, при разных параметрах

*q**w*	0,175	0,180	0,185	0,190	0,195
			p=0,970		
0,120	0,24554	0,2455	0,24546	0,24542	0,24539
0,125	0,24548	0,24543	0,24539	0,24536	0,24533
0,130	0,24544	0,2454	0,24536	0,24532	0,24529
0,135	0,24543	0,24539	0,24535	0,24531	0,24528
0,140	0,24545	0,24541	0,24537	0,24533	0,24530
			p=0,975		
0,120	0,24553	0,24549	0,24545	0,24542	0,24538
0,125	0,24547	0,24542	0,24538	0,24535	0,24532
0,130	0,24543	0,24539	0,24535	0,24531	0,24528
0,135	0,24542	0,24537	0,24533	0,24530	**0,24527**
0,140	0,24543	0,24539	0,24535	0,24531	0,24528
			p=0,980		
0,120	0,24555	0,24550	0,24546	0,24543	0,24540
0,125	0,24548	0,24543	0,24540	0,24536	0,24533
0,130	0,24544	0,24539	0,24535	0,24532	0,24529
0,135	0,24542	0,24538	0,24534	0,24531	0,24528
0,140	0,24544	0,24539	0,24535	0,24532	0,24529

Гистограммы *рис. 2* рассчитаны для степенной формулы с оптимальными параметрами p, q, w, которые дают минимальное значение R. Такие параметры можно найти перебором, так как интервалы их возможных значений не велики, но мы подбирали их направленным поиском, в частности и для того, чтобы разобраться, как выглядит зависимость $R(p, q, w)$, проверить, что у неё один минимум. Как пример, приведём фрагмент нашего поиска для диапазона 4-8 км. Задаём интервал и шаг изменения каждого параметра. Авторская программа для каждого варианта набора параметров рассчитывает сходство формулы с данными, R, и заносит его в таблицы, *табл. 3*. Если в таблицах не найден набор параметров, дающий минимальный R, то меняем какие-то интервалы и/или шаг и повторяем вычисление. В *табл. 3* приведён расчёт R для степенной формулы с p, меняющимся от 0,97 до 0,98, q — от 0,12 до 0,14, w — от 0,175 до 0,195, шаг везде 0,005. Это близкий к завершению, но не последний этап поиска: вариант с минимальным значением R=0,24527 (выделено в таблице полужирным начертанием) находится на верхнем краю интервала w, а значит нужно посмотреть ещё и бóльшие значения w. При этом шаге подбора минимум R, равный 0,245167, получается для p=0,975, q=0,135 и w=0,23.

Таблица 4. Максимальное и минимальное отличие формулы падения от измерений при разных параметрах q и w

p	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7
Rmin	0,45415	0,38299	0,32070	0,27288	0,24798	0,25333	0,28685	0,34288	0,41411
Rmax	0,85587	0,80526	0,76558	0,73886	0,72709	0,73179	0,75381	0,79321	0,84945

Поскольку R рядом с минимумом изменяется крайне мало, динамику и чувствительность оценки смотрим при больших изменениях параметров. Пусть все показатели степени меняются от 0,1 до 1,7 с шагом 0,2. В *табл. 4* для каждого значения p приведены минимальный и максимальный R по всем q и w из заданного интервала. Обратим внимание, что и при таком очень грубом переборе оценка «чувствует» оптимальные значения при не малом отклонении от них:

- значение и у *Rmin*, и у *Rmax* минимальны при близком к оптимальному p=0,9;
- при всех p значение *Rmin* получается при ближайших к оптимальному q=0,1 и w=0,3 (или w=0,1 при p>1).

Обратный вариант: детальный осмотр окрестности оптимума с p 0,97-0,98; q 0,13-0,14; w 0,23-0,24; с шагом 0,001 даёт R=0,245166 при p=0,974; q=0,135; w=0,23. Худшая оценка в этом интервале параметров 0,24520, так что искать с таким шагом смысла нет.

Описанным способом нашли оптимальные параметры и оценку сходства для разных вариантов формулы и различных масштабов (шаг подбора у p, q, w 0,005, у M 10, у b 0,1). Результаты сведены в *табл. 5-8*.

Таблица 5. Параметры и оценки для логарифмической формулы падения. N число точек ЛС указанного диапазона *Lup* (точки участвуют во всех вариантах подбора параметров)

Lup, км	N	p	q	M	b	C	R
1–2	1 414 993	0,885	0,135	120	0,1	1,8074	0,359087
2–4	667 810	0,940	0,130	90	0,1	1,1109	0,303207
4–8	365 364	0,975	0,135	70	0,3	0,9118	0,245163
8–16	201 328	0,985	0,135	30	0,9	0,7380	0,195668
2–30	1 325 702	0,960	0,135	70	0,2	0,9921	0,264643
4–30	657 892	0,980	0,135	40	0,1	0,7913	0,220172
2–30, V>90	1 520 079	0,985	0,145	60	0,4	0,9273	0,290399

Таблица 6. Параметры и оценки для степенной формулы падения. Справа для p=1

Lup, км	*p*	*q*	*w*	*C*	*R*	*q*	*w*	*C*	*R*
1–2	0,885	0,135	0,405	0,2363	0,359107	0,155	0,375	0,1853	0,364015
2–4	0,940	0,130	0,290	0,3819	0,303211	0,140	0,275	0,3335	0,304426
4–8	0,975	0,135	0,230	0,5488	0,245167	0,135	0,225	0,4852	0,245442
8–16	0,985	0,135	0,190	0,7437	0,195729	0,135	0,165	0,8471	0,195772
2–30	0,960	0,135	0,225	0,6159	0,265242	0,140	0,215	0,5505	0,265850
4–30	0,980	0,135	0,185	0,7915	0,220362	0,135	0,180	0,7235	0,220530
2–30, *V*>90	0,985	0,145	0,215	0,6503	0,290898	0,140	0,215	0,5898	0,291009

Таблица 7. Параметры и оценки для степенной формулы падения при w=q в левой части и p=1, w=q в правой части

Lup, км	*p*	*w*=*q*	*C*	*R*	*w*=*q*	*C*	*R*
1–2	0,900	0,165	1,8224	0,363087	0,180	1,0617	0,366073
2–4	0,950	0,150	1,4223	0,304750	0,155	1,0570	0,305605
4–8	0,980	0,150	1,2968	0,245824	0,150	1,1353	0,245998
8–16	0,985	0,140	1,2673	0,195750	0,140	1,1442	0,195830
2–30	0,980	0,190	1,5352	0,267580	0,190	1,3446	0,267150
4–30	0,990	0,160	1,3035	0,220987	0,160	1,2185	0,221039

Таблица 8. Параметры и оценки для формулы падения без учёта *Lall* (q=0)

Lup, км	*p*	*M*	*b*	*C*	*R*	*p*	*w*	*C*	*R*
	Логарифмический вариант					Степенной вариант			
4–8	0,955	70	0,2	0,1662	0,255212	0,955	0,230	0,1000	0,255217
8–16	0,985	20	0,1	0,1135	0,206323	0,975	0,165	0,1595	0,206325
2–30	0,940	60	0,5	0,1739	0,274129	0,940	0,220	0,1170	0,274732

Перечислим закономерности, которые проявляются в этих результатах. Будем называть переход к диапазону бóльших *Lup* — ростом масштаба.

1. Во всех вариантах расчёта с ростом масштаба в 2 раза число измерений (точек ЛС) уменьшается примерно в 2 раза, что соответствует закону Хортона.

2. С ростом масштаба в 2 раза оценка сходства формулы с данными улучшается примерно на 0,05 (около 20%). Существенно меньшее изменение оценки (меньше 0,005) будем считать незначительным. Для ЛС с *Lup*>2 км оценка около 0,2-0,3. (Улучшение оценки с ростом масштаба связано не с уменьшением числа измерений: в диапазонах 2-4 и 4-30 км число измерений почти одинаково, а *R* отличаются существенно.)

3. Учёт характеристики *Lall* (q≠0) явно улучшает сходство формулы с данными (оценка улучшается примерно на 0,01).

4. Сходство с данными у формулы в логарифмическом варианте всегда выше, чем в степенном, но очень незначительно (отличие меньше 0,0002).

5. Оптимальное p в логарифмическом и степенном варианте одинаково.

6. Оптимальное q в логарифмическом и степенном варианте одинаково.

7. Оптимальное значение q почти не меняется — в основном оно между 0,13 и 0,14. Это гораздо меньше q=0,7, которое мы подобрали для небольшого участка Мяо-Чан. На том участке у ЛС, текущих на запад, падение меньше рассчитанного по формуле (с q=0,135) на 10-30%, а у ЛС, текущих на восток, падение больше на 10-30%. Но при q=0,7 совпадение

формулы в среднем по всей территории гораздо хуже: R=0,369036 вместо 0,265242 (все при Lup>2 км).

8. Оптимальное значение w существенно меньше 1 (между 0,185 и 0,29 для Lup>2 км).

9. Оптимальные параметры логарифма (M и b) с ростом масштаба меняются существенно.

10. Оптимальные параметры в степенном варианте (кроме C) при Lup>2 км с ростом масштаба изменяются не сильно: p и q на 5%, w на 30%.

11. Оптимальные параметры в степенном варианте с ростом масштаба меняются монотонно: p и C растут, w падает. Возможно, параметры изменяются закономерно в зависимости от Lup и/или друг от друга. Аппроксимация относительно начала диапазона L даёт: C=0,0554(0,003L+1) с r^2=0,9958 и w=4,7165/$L^{0,361}$ с r^2=0,9834. Это лишь примеры возможных зависимостей, так как они получены только по четырём точкам (диапазонам).

12. Чем больше масштаб, тем ближе оптимальное p к 1. Для Lup>2 км p от 0,94 до 0,985.

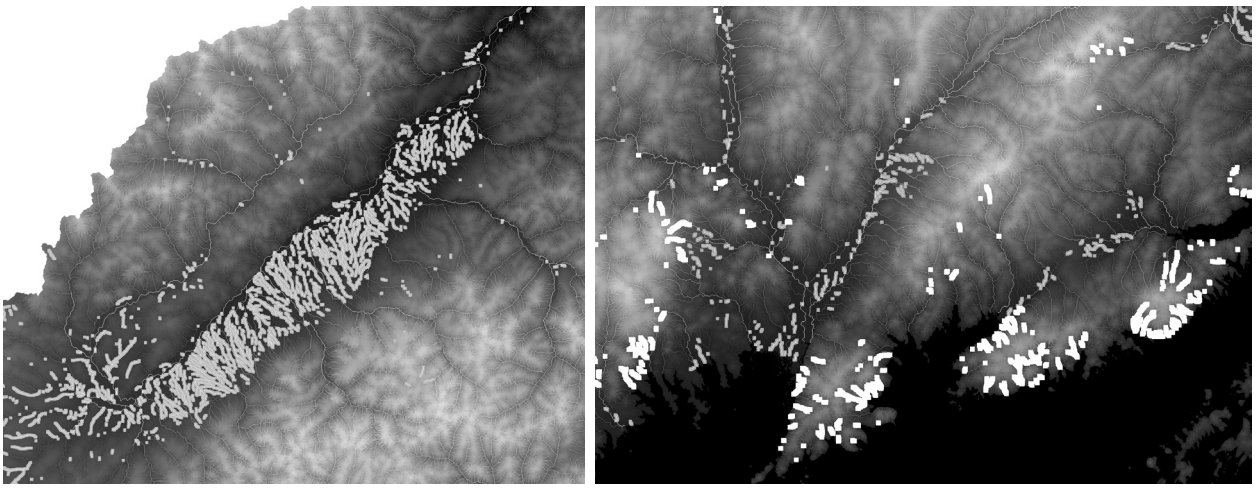
13. Если зафиксировать p=1, то это сказывается только для диапазона 1-2 км (правая часть *табл. 6*). В остальных случаях оптимальное p и так близко к 1, так что оптимальные q и w меняют мало, а оценка сходства ухудшится незначительно, на 0,001-0,00001.

14. Если зафиксировать q=w, то оценка сходства становится хуже незначительно, на 0,004-0,00002 (у диапазона 1-2 км на 0,007), *табл. 7.*

Если кроме q=w зафиксировать и p=1, то оптимальные q=w изменятся мало, а оценка сходства ухудшится незначительно, на 0,002-0,0002, *табл. 7.*

15. В эксперименте с V>90 (*табл. 5* и *6*), по сравнению с V>120, данных больше лишь на 12%, оптимальные параметры отличаются не сильно, а сходство с формулой явно хуже.

К этим фактам мы вернёмся при обсуждении результатов, а сейчас рассмотрим те ситуации, в которых падение существенно (больше чем на 50%) отличается от того, что даёт формула, т. е. те точки ЛС, где t<0,5 (будем называть это малым падением) или t>1,5 (большое падение). Рассматриваем широкий диапазон длин, 2-30 км, V>120, 1325702 точек ЛС. Большие отличия редки: t>1,5 в 1,61% измерений, а вот t<0,5 в 4,675%. Важно, что эти точки сгруппированы, а не разбросаны хаотично по территории. Некоторые участки, где их особенно много приведены на *рис. 3.*



а *б*

Рис. 3. Участки, где точек ЛС особенно много: *а* — долина реки Амгунь (в белой области нет измерений *Lall* западнее Бурейнского хребта), *б* — окрестности низовья реки Урми (в чёрной области V<120). На фоне ЦМР (чем темнее тон, тем меньше высота) полосами серого тона отмечены участки ЛС с t<0,5 и белого тона с t>1,5

Большие падения превышают расчётные меньше чем в 2 раза. Точки большого падения расположены рядом с низменностью Амура (см. *рис. 3б*). А вот малые падения не только

встречаются гораздо чаще, но и могут отличаться от расчётного в разы. Похоже, что если в ЛС начинается малое падение, то оно сохраняется до устья. (Короткие участки малого падения на *рис. 3* — это короткие ЛС, а не части длинных.) Участки малого падения группируются в расширениях долин рек (Амгунь, Самани, Хурмули, Кур, Сутара и др.). Больше всего таких ситуаций в Верхне-Амгуньской долине (см. *рис. 3а*), которая тянется на юго-восток от Амгуни примерно на 20 км с подъёмом на 170 м. Почти у всех ЛС с истоком внутри долины падение в 3-10 раз меньше расчётного. Площадь долины составляет только 0,57% анализируемой территории, но на ней 20% всех участков с малым падением. Нужно будет разобраться, соответствуют ли ЛС в долине реальным водотокам в специфических геологических условиях (кайнозойская впадина, грабен) или это артефакт алгоритма стока на ровном участке с малым уклоном (между ними по 500-800 м). Малые падения, но не так плотно, отмечены также в долине Сулука (одного из истоков Амгуни) (см. *рис. 3а*), в районе слияния Амгуни и Дуки, немного севернее этого слияния в долине Нимнягун при впадении Саргаты и немного южнее этого слияния в районе впадения Хагдуни в Горни.

Обсуждение результатов

Ранее мы показали статистическую связь падения вдоль линии стока не только с её текущей длиной *Lup*, но и с высотой её истока *V0*. Здесь обосновали и проверили предположение, что величина падения связана и с полной длиной ЛС *Lall*. Основное, что получено в представленных экспериментах, — учёт *Lall* определённо улучшает сходство формулы падения с данными. Хотя улучшает незначительно. (*Lall* входит в формулу в степени только 0,14, но и у *Lup* степень больше только в 1,3-2,3 раза при *Lup*>2 км.)

Формулы падения (2) и их параметры мы подбирали, сравнивая результат расчёта по формуле с фактическим падением в точках ЛС. Так можно понять, в каких точках формула не работает, и искать причину. Чтобы при таком сравнении часто встречающиеся начальные участки ЛС не «заглушали» редкие, мы работали и с точками ЛС одного масштаба по отдельности. Далее нужно будет свести все результаты в общую формулу. Стоит проверить, не получится ли равный учёт измерений, если вклад в оценку сходства брать с весом, растущим для редких ситуаций. (Ранее мы опирались на матрицу падения, где ЛС разной длины участвуют в оценке сходства равноправно, но измерения там участвуют не прямо, а через их среднее значение в ячейке матрицы, так что нужно как-то учитывать разброс измерений в ячейках.)

Чем больше масштаб ЛС, тем лучше формулы с оптимальными параметрами описывают экспериментальные измерения. Сходство с данными у логарифмического варианта формулы незначительно лучше, чем у степенного, а общие для этих вариантов параметры p и q получаются одинаковыми. Чем больше масштаб ЛС, тем ближе оптимальное p к 1 (при *Lup*>2 км p между 0,94 и 0,985). Оптимальное значение q почти не меняется — в основном оно между 0,13 и 0,14, w изменяется мало (при *Lup*>2 км между 0,185 и 0,29). Если зафиксировать p=1 и/или q=w, то оценка сходства ухудшается незначительно. Параметры логарифма от диапазона к диапазону меняются очень существенно, а в степенном варианте — мало, монотонно и, как показали выше, возможно, закономерно, что может быть путём к формуле единой для всех диапазонов. Сейчас формула профиля складывается из произведения зависимостей для отдельных характеристик ЛС, хотя вполне возможно, что эти характеристики взаимосвязаны более сложным образом.

В основном отклонение реального падения от значения по формуле невелико: больше чем на 30% при *Lup*>2 км отклоняются только 10-20% измерений. Нужно проверить, не является ли часть таких отклонений артефактом модели стока.

В ряде вопросов ещё предстоит разобраться. Во-первых, нет уверенности, что *Lall* мы учитываем лучшим образом. С одной стороны, для отдельных рек, стекающих с Мяо-Чан, мы определили гораздо более сильное влияние *Lall*, чем в среднем для всех. С другой стороны, нет уверенности, правильно ли определяем *Lall*. Можно измерять *Lall* до впадения основной реки бассейна в море, но, вероятно, правильнее — до конца промоины, которую река делает

в морском дне (тогда и *V0* измерять не от уровня моря, а от уровня дна в конце этой промоины). Более того, возможно, нужно ориентироваться при определении *Lall* и *V0* не на абсолютный, а на локальный базис эрозии.

Во-вторых, скорее всего мы учли не все характеристики территории, которые влияют на средний профиль, и даже, возможно, не все необходимые характеристики рельефа.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема «Мониторинг», госрегистрация № 126031818938-6).

Литература

1. *Златопольский А. А.* Формальное описание профиля линии стока на основе статистического анализа цифровой модели рельефа. Часть вторая: матрица падения // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2026. Т. 23. № 4. С. 171–181. DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-4-171-181.
2. *Чернова И. Ю.*, *Нугманов И. И.*, *Даутов А. Н.* Применение аналитических функций ГИС для усовершенствования и развития структурно-морфологических методов изучения неотектоники // Геоинформатика. 2010. № 4. С. 9–23.

Formal description of the runoff profile based on statistical analysis of the digital terrain model: Part 3

A. A. Zlatopolsky

Space Research Institute RAS, Moscow 117997, Russia
E-mail: aazlat@gmail.com

The article presents a continuation of the search for a formal description of the averaged runoff line (RL) profile. We relied on a statistical analysis of RLs obtained by runoff modeling using a digital elevation model. We substantiated and verified the hypothesis that the drop along a RL depends not only on the RL's current length and the elevation of its source, but also on its total length up to the erosion baseline, *Lall* Experiments across a large area of the Far East showed that taking *Lall* into account significantly, although not dramatically, reduces the difference between calculations using the drop formula and direct measurements of drop at RL points. The drop formula and its parameters were selected to *min*imize this difference. To prevent frequently occurring situations from "drowning out" rare ones when assessing the difference, we focused on RL sections of approximately the same scale (length). In general, the deviation of actual drop from the value calculated using the formula is small: over lengths of 2-30 km, 22% of measurements deviate from the formula by more than 30%, and 6.3% of measurements deviate by more than 50%. Points with large deviations are not scattered randomly across the area, but are clustered in a number of locations. We need to understand the causes of the deviations in those locations, analyze whether we are measuring *Lall* correctly, and whether we should focus on an absolute or local erosion basis.

Keywords: DTM, runoff model, runoff line profile, fall of the runoff line, runoff line length, source height, erosion basis, statistical dependence

Accepted: 17.06.2026
DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-5-233-243

References

1. Zlatopolsky A. A., Formal description of the runoff profile based on statistical analysis of the digital terrain model: Part 2 — the fall matrix, *Sovremennye problem distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa*, 2026, V. 23, No. 4, pp. 171–181 (in Russian), DOI: 10.21046/2070-7401-2026-23-4-171-181.
2. Chernova I. Yu., Nugmanov I. I., Dautov A. N., Application of GIS analytic functions for improvement and development of the structural morphological methods of the neotectonics studies, *Geoinformatica*, 2010, No. 4, pp. 9–23 (in Russian).